Гомонай, Кравцов. Хвилі №19

Формула Ейлера:

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha \tag{1.1}$$

Плоска е.м. хвиля описується функціями (завдяки формулі (1.1)):

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_0 \cdot e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} \\ \vec{B} &= \vec{B}_0 \cdot e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} \end{aligned} \tag{1.2}$$

Підставимо ці функції у рівняння Максвела. Спочатку у 3-є рівняння:

$$\begin{aligned} rot(\vec{E}) &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ rot(\vec{E}_0 \cdot e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}) &= -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{B}_0 \cdot e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}) \end{aligned} \tag{1.3}$$

Обрахуємо ротор. Розглянемо ***x***-ву складову ротору, та врахуємо що $\vec{E}_0$ - сталий:

$$\begin{aligned} rot(\vec{E})_x &= \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = \\ &= E_{0z}\frac{\partial}{\partial y} e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} - E_{0y}\frac{\partial}{\partial z} e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} \end{aligned} \tag{1.4}$$

Далі маємо знайти сході похідні типу:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} &= -e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} \cdot \frac{\partial}{\partial x} i(\omega t - \vec{k}\vec{r}) = \\ &= -e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} \cdot \frac{\partial}{\partial x} i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z) = \\ &= e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} \cdot (ik_x) \end{aligned} \tag{1.5}$$

Використовуючи підхід як у (1.5), обрахуємо похідні у (1.4):

$$rot(\vec{E})_x = \left(E_{0z}(ik_y) - E_{0y}(ik_z)\right) \cdot e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} \tag{1.6}$$

Аналогічно для інших компонент ротора і все разом дає:

$$rot(\vec{E}) = i\vec{k} \times \vec{E} \tag{1.7}$$

Далі візьмемо похідну по часу від ***B***:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{B}_0 \cdot e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}) = -i\omega\vec{B}_0 \cdot e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} = -i\omega\vec{B} \tag{1.8}$$

Якщо скоротити *i*:

$$\vec{k} \times \vec{E} = \omega\vec{B} \tag{1.9}$$

Швидкість хвилі:

$$c = \frac{\omega}{k} \tag{1.10}$$

$$\vec{k} = |k|\vec{n} \tag{1.11}$$

$$\vec{n} \times \vec{E} = c\vec{B} \tag{1.12}$$

Доведемо друге співвідношення.

Візьмемо 4-е рівняння Максвелла:

$$rot(\vec{B}) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{1.13}$$

Порахуємо ***x***-ву компоненту:

$$rot(\vec{B})_x = \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} =$$

$$= B_{0z}\frac{\partial}{\partial y}e^{-i(\omega t-\vec{k}\vec{r})} - B_{0y}\frac{\partial}{\partial z}e^{-i(\omega t-\vec{k}\vec{r})} = \tag{1.14}$$

$$= -B_{0z}\cdot e^{-i(\omega t-\vec{k}\vec{r})}\cdot\frac{\partial}{\partial y}i(\omega t-\vec{k}\vec{r}) + B_{0y}\cdot e^{-i(\omega t-\vec{k}\vec{r})}\cdot\frac{\partial}{\partial z}i(\omega t-\vec{k}\vec{r})$$

Отримуємо:

$$rot(\vec{B})_x = \left(B_{0z}\cdot ik_y - B_{0y}\cdot ik_z\right)\cdot e^{-i(\omega t-\vec{k}\vec{r})} \tag{1.15}$$

Об’єднуючи:

$$rot(\vec{B}) = i[\vec{k}\times\vec{B}_0]e^{-i(\omega t-\vec{k}\vec{r})} = i[k\times\vec{B}] \tag{1.16}$$

Права частина:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{c^2}\vec{E}_0\frac{\partial e^{-i(\omega t-\vec{k}\vec{r})}}{\partial t} =$$

$$= \frac{-1}{c^2}\vec{E}_0\cdot e^{-i(\omega t-\vec{k}\vec{r})}\cdot\frac{\partial}{\partial t}i(\omega t-\vec{k}\vec{r}) = \tag{1.17}$$

$$= \frac{-i\omega\vec{E}_0\cdot e^{-i(\omega t-\vec{k}\vec{r})}}{c^2} = \frac{-i\omega\vec{E}}{c^2}$$

Об’єднуємо:

$$i[\vec{k}\times\vec{B}] = \frac{-i\omega\vec{E}}{c^2}$$

$$[\vec{n}\times\vec{B}] = \frac{-\vec{E}}{c} \tag{1.18}$$

3-й пункт:
Вектор Пойтингу:

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0}[\vec{E}\times\vec{B}] \tag{1.19}$$

Густина енергії поля:

$$w = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \tag{1.20}$$

Підставимо у (1.20) формулу (1.12):

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0}[\vec{E}\times\vec{B}] = \frac{1}{c\mu_0}[\vec{E}\times[\vec{n}\times\vec{E}]] = \frac{\vec{n}E^2}{c\mu_0} \tag{1.21}$$

Використовуючи (1.20):

$$\frac{\vec{n}E^2}{c\mu_0} = \vec{n}\frac{2w_E}{\varepsilon_0}\frac{1}{c\mu_0} \tag{1.22}$$

Використуємо $\varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}$:

$$\vec{\Pi} = \vec{n}2cw_E \tag{1.23}$$