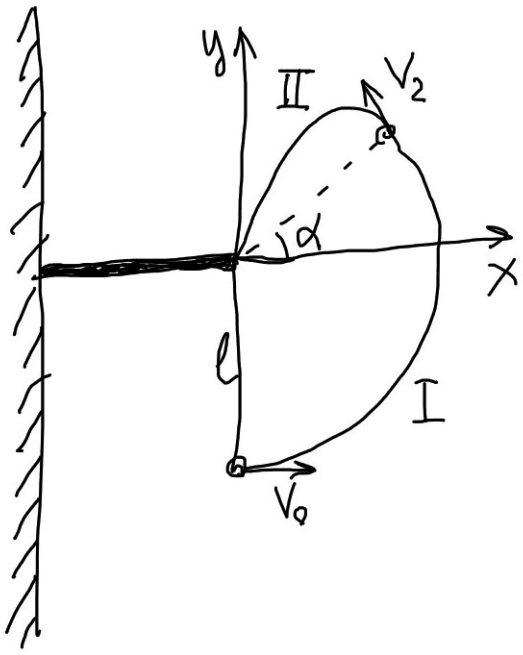
7.51

Першу частину шляху нитка буде натягнута і кулька буде рухатись по колу. В певний момент часу кулька почне рухатись по параболі (етап II) і сила натягу 0.

Знайдемо кут радіус вектора кульки в той момент часу коли пропадає сила натягу.

Можна записати закон Ньютона для першого етапу:



$$-mg\cos\alpha = m\frac{dv}{dt}$$

$$T + mg\sin\alpha = m\frac{v^2}{l} \tag{1.1}$$

Тоді в необхідний нам момент часу:

$$mg\sin\alpha = m\frac{v_2^2}{l} \tag{1.2}$$

З іншого боку, якщо проінтегрувати перше рівняння отримуємо закон збереження енергії:

$$\frac{mv_0^2}{2} = mgl(1+\sin\alpha) + \frac{mv_2^2}{2} \tag{1.3}$$

Підставимо (1.2) в (1.3):

$$v_0^2 = 2gl(1+\sin\alpha) + gl\sin\alpha = gl\left(2+3\sin\alpha\right) \tag{1.4}$$

$$\sin\alpha = \frac{v_0^2}{3gl} - \frac{2}{3} \tag{1.5}$$

$$v_2 = \sqrt{gl\sin\alpha} = \sqrt{gl\left(\frac{v_0^2}{3gl} - \frac{2}{3}\right)} = \sqrt{\frac{v_0^2}{3} - \frac{2gl}{3}} \tag{1.6}$$

Далі на етапі II маємо по параболі попасти в точку підвісу (0,0).

$$\begin{aligned} x &= v_2\sin\alpha\cdot t \\ y &= v_2\cos\alpha\cdot t - gt^2/2 \end{aligned} \tag{1.7}$$

Підставимо кінцеву точку:

$$\begin{aligned} l\cos\alpha &= v_2\sin\alpha\cdot t \\ -l\sin\alpha &= v_2\cos\alpha\cdot t - gt^2/2 \end{aligned} \tag{1.8}$$

Підставимо t :

$$-l\sin\alpha = v_2\cos\alpha\frac{l\cos\alpha}{v_2\sin\alpha} - \frac{g}{2}\left(\frac{l\cos\alpha}{v_2\sin\alpha}\right)^2 \tag{1.9}$$

$$\frac{g}{2}\left(\frac{l\cos\alpha}{v_2\sin\alpha}\right)^2 = l\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\sin\alpha} = \frac{l}{\sin\alpha} \tag{1.10}$$

$$gl\cos^2\alpha = gl(1-\sin^2\alpha) = 2v_2^2\sin\alpha \tag{1.11}$$

$$gl(1-\sin^2\alpha) = 2\left(\frac{v_0^2}{3} - \frac{2gl}{3}\right)\sin\alpha \tag{1.12}$$

$$gl(1-\left(\frac{v_0^2}{3gl} - \frac{2}{3}\right)^2) = 2\left(\frac{v_0^2}{3} - \frac{2gl}{3}\right)\left(\frac{v_0^2}{3gl} - \frac{2}{3}\right) \tag{1.13}$$

$$g^2l^2(9-\left(\frac{v_0^2}{gl}-2\right)^2)=2\left(v_0^2-2gl\right)^2 \tag{1.14}$$

$$9g^2l^2-\left(v_0^2-2gl\right)^2=2\left(v_0^2-2gl\right)^2 \tag{1.15}$$

$$9g^2l^2=3\left(v_0^2-2gl\right)^2 \tag{1.16}$$

$$\sqrt{3}gl=v_0^2-2gl \tag{1.17}$$

Відповідь

$$v_0=\sqrt{gl\left(2+\sqrt{3}\right)} \tag{1.18}$$