7.33

Запишемо закон збереження імпульсу:

$$M\vec{v}_1 = m\vec{u}_2 + M\vec{u}_1 \tag{0.1}$$

Та закон збереження енергії:

$$\frac{Mv_1^2}{2} = \frac{mu_2^2}{2} + \frac{Mu_1^2}{2} \tag{0.2}$$

В задачі цікавить кут між початковою швидкістю великої кулі та кінцевою, і не цікавить куди летить легка кулька. Тоді з (0.1) отримаємо:

$$M\vec{v}_1 - M\vec{u}_1 = m\vec{u}_2 \tag{0.3}$$

І підносимо до квадрату (використовуючи те що спочатку обидві кульки летять в одному напрямку):

$$\begin{gathered}\left(M\vec{v}_1 - M\vec{u}_1\right)^2 = \left(m\vec{u}_2\right)^2 \\ M^2v_1^2 + M^2u_1^2 - 2M^2u_1v_1\cos\alpha = m^2u_2^2\end{gathered} \tag{0.4}$$

Квадрат кінцевої швидкості легкої кульки підставимо зі закону збереження енергії (0.2):

$$\left(Mv_1\right)^2 + M^2u_1^2 - 2Mu_1\left(Mv_1\right)\cos\alpha = m^2\left(\frac{M}{m}(v_1^2 - u_1^2)\right) \tag{0.5}$$

Виразимо косинус з (0.5) як функцію u_1 і будемо шукати екстремум (мінімум cos):

$$\cos\alpha = \frac{M^2v_1^2 + M^2u_1^2 - mM(v_1^2 - u_1^2)}{2M^2u_1v_1} \tag{0.6}$$

$$\cos\alpha = \frac{(Mv_1^2 - mv_1^2) + (M+m)u_1^2}{2Mv_1u_1} \tag{0.7}$$

Відносно змінної u_2 вираз (0.7) має структуру

$$\frac{a}{x} + bx \tag{0.8}$$

Де

$$a = Mv_1^2 - mv_1^2;\ b = M + m \tag{0.9}$$

Легко показати, що мінімум (0.8) досягається при

$$x = \sqrt{\frac{a}{b}} \tag{0.10}$$

Та має значення:

$$2\sqrt{ab} \tag{0.11}$$

Підставимо вирази для a,b (0.9) у (0.11) і отримуємо мінімальне значення косинуса (максимальний кут):

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{\left(Mv_1^2 - mv_1^2\right)\left(m+M\right)}}{Mv_1} \tag{0.12}$$

Можемо виразити сінус:

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} =$$
$$= \frac{\sqrt{(Mv_1)^2 - \left(Mv_1^2 - mv_1^2\right)(m+M)}}{Mv_1} =$$
$$= \frac{\sqrt{M^2v_1^2 - mMv_1^2 + m^2v_1^2 - M^2v_1^2 + mMv_1^2}}{Mv_1} = \tag{0.13}$$
$$= \frac{\sqrt{m^2v_1^2}}{Mv_1} = \frac{mv_1}{Mv_1} = \frac{m}{M}$$

В кінці ми врахували, що важка кулька наздоганяє маленьку ($v_1 > v_2$)

Відповідь:

$$\sin\alpha = \frac{m}{M}$$