3.38

Закон Ньютона в проекціях на напрямок руху (вісь x) та перпендикулярний (вісь y):

$$mg\sin\alpha - kN = mg\sin\alpha - bxN = m\frac{dv}{dt} \tag{1.1}$$

$$mg\cos\alpha - N = 0 \tag{1.2}$$

Підставивши N з (1.2) у (1.1):

$$\begin{gathered} m\frac{dv}{dt} = mg\sin\alpha - bxmg\cos\alpha \\ \frac{dv}{dt} = g\sin\alpha - bxg\cos\alpha \end{gathered} \tag{1.3}$$

В останньому рівнянні одразу три змінних тому в такому вигляді його інтегрувати не можна і треба перейти до змінних x,v:

$$\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx}v = g\sin\alpha - bxg\cos\alpha \tag{1.4}$$

Інтегруючи:

$$\begin{gathered} \int_0^v vdv = \int_0^x \left(g\sin\alpha - bxg\cos\alpha\right)dx \\ v^2/2 = gx\sin\alpha - bgx^2\cos\alpha/2 \end{gathered} \tag{1.5}$$

Кінцева координата визначається умовою v=0:

$$\begin{gathered} gs\sin\alpha - bgs^2\cos\alpha/2 = 0 \\ s = 2\tan\alpha/b \end{gathered} \tag{1.6}$$

Для того щоб знайти час треба проінтегрувати швидкість з (1.5):

$$v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{2xg\sin\alpha - bx^2g\cos\alpha} \tag{1.7}$$

Що дає:

$$\int_0^s \frac{dx}{\sqrt{2x\sin\alpha - bx^2\cos\alpha}} = \int_0^t \sqrt{g}dt \tag{1.8}$$

Щоб взяти інтеграл зліва (1.8) виділяємо повний квадрат під коренем в знаменнику:

$$\begin{gathered} \int_0^s \frac{dx}{\sqrt{b\cos\alpha\left(\frac{2x\sin\alpha}{b\cos\alpha} - x^2\right)}} = \sqrt{g}t \\ \int_0^s \frac{dx}{\sqrt{b\cos\alpha\left((\frac{\tan\alpha}{b})^2 - (\frac{\tan\alpha}{b})^2 + \frac{2x\tan\alpha}{b} - x^2\right)}} = \sqrt{g}t \\ \int_0^s \frac{dx}{\sqrt{b\cos\alpha\left((\frac{\tan\alpha}{b})^2 - \left(x - \frac{\tan\alpha}{b}\right)^2\right)}} = \sqrt{g}t \end{gathered} \tag{1.9}$$

І зводимо до табличного інтегралу:

$$\int_0^s \frac{dx}{\frac{\tan\alpha}{b}\sqrt{b\cos\alpha\left(1 - \left(\frac{b}{\tan\alpha}x - 1\right)^2\right)}} = \sqrt{g}t \tag{1.10}$$

Заміною змінної

$$\frac{b}{\tan\alpha}x-1=z$$
$$\frac{b}{\tan\alpha}dx=dz \tag{1.11}$$

Що дає:

$$\frac{1}{\sqrt{b\cos\alpha}}\int\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}=\frac{1}{\sqrt{b\cos\alpha}}\arcsin z=\frac{1}{\sqrt{b\cos\alpha}}\arcsin\left(\frac{bx}{\tan\alpha}-1\right)\Bigg|_0^s=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{b\cos\alpha}}\left[\arcsin\left(\frac{2b\tan\alpha}{b\tan\alpha}-1\right)-\arcsin\left(-1\right)\right]=\frac{1}{\sqrt{b\cos\alpha}}2\arcsin(1)=\frac{\pi}{\sqrt{b\cos\alpha}}=\sqrt{g}t \tag{1.12}$$

Відповідь:

$$t=\frac{\pi}{\sqrt{bg\cos\alpha}} \tag{1.13}$$