11.11

Будемо вважати, що коефіцієнт тертя достатній щоб весь час кільце рухалось без проковзування.

Перший етап вкочування на першу половину гірки. Точка спряження двох частин гірки знаходиться посередині тобто на висоті r від нульового рівня. Використаємо закон збереження енергії:

$$mgr+\frac{mv_0^2}{2}+\frac{J\omega_0^2}{2}=mgr+\frac{mv_0^2}{2}+\frac{mr^2(v_0/r)^2}{2}=mgr+mv_0^2=mg2r+\frac{mv_1^2}{2}+\frac{J\omega_1^2}{2}= \\ =mg2r+mv_1^2 \tag{1.1}$$

Що дає швидкість в точці спряження:

$$v_1=\sqrt{v_0^2-gr} \tag{1.2}$$

З геометрії виходить що швидкість буде направлена під кутом

$$R(1-\cos\theta_1)=r$$

$$\cos\theta_1=1-\frac{1}{2}=0.5 \tag{1.3}$$

$$\theta_1=\frac{\pi}{3}$$

до горизонту.

Далі починається рух по другій частині і тут відрив відбудеться якщо в деякий час кривина траєкторії центра мас під дією сили тяжіння стане більша ніж кривина поверхні (і пропаде сила реакції опори):

$$mg\cos\theta=m\frac{v^2}{3r} \tag{1.4}$$

З іншого боку закон збереження енергії до відриву дає:

$$mgr+mv_0^2=mg3r\cos\theta+mv^2 \tag{1.5}$$

Це дає швидкість в момент відриву:

$$gr+v_0^2=v^2+v^2=2v^2$$

$$v=\sqrt{\frac{gr+v_0^2}{2}} \tag{1.6}$$

Та кут між радіус вектором та вертикаллю (швидкістю та горизонталлю):

$$\cos\theta=\frac{gr+v_0^2}{6gr} \tag{1.7}$$

Для того щоб відбувся відрив за мінімальної швидкості має бути мінімальним кут θ який не може бути меншим ніж θ1:

$$0.5=\cos\theta_1\le\cos\theta=\frac{gr+v_0^2}{6gr}$$

$$2gr\le v_0^2 \tag{1.8}$$

$$v_0\ge\sqrt{2gr}$$

Далі за умови того що виконана умова (1.8) буде частина вільного польоту. Центр мас на початок польоту буде на висоті:

$$h_0=3r\cos\theta=\frac{gr+v_0^2}{2g} \tag{1.9}$$

І далі маючи вертикальну складову швидкості:

$$v_y = v\sin\theta = \sqrt{\frac{gr+v_0^2}{2}}\sqrt{1-\left(\frac{gr+v_0^2}{6gr}\right)^2} \tag{1.10}$$

Підніметься на додаткову висоту:

$$\frac{mv_y^2}{2} = mg\Delta h$$

$$\Delta h = \frac{v_y^2}{2g} = \frac{gr+v_0^2}{2}\left(1-\left(\frac{gr+v_0^2}{6gr}\right)^2\right) = \frac{gr+v_0^2}{2}\frac{\left(36g^2r^2-(gr+v_0^2)^2\right)}{36g^2r^2} = \tag{1.11}$$

$$= \frac{gr+v_0^2}{2}\frac{\left(5gr-v_0^2\right)\left(7gr+v_0^2\right)}{36g^2r^2}$$