1.53

Запишемо вектор швидкості та радіус вектор частинки:

$$\vec{V} = \left(V_0 \cos\alpha, \quad V_0 \sin\alpha - gt\right) \tag{1.1}$$

$$\vec{R} = \left(V_0 \cos\alpha t, \quad V_0 \sin\alpha t - gt^2 / 2\right) \tag{1.2}$$

Відповідно якщо вектори перпендикулярні, то скалярний добуток 0:

$$\begin{aligned} &\vec{V} \cdot \vec{R} = V_0^2 \cos^2\alpha \cdot t + \left(V_0 \sin\alpha - gt\right)\left(V_0 \sin\alpha t - gt^2 / 2\right) = \\ &= V_0^2 \cos^2\alpha \cdot t + V_0^2 \sin^2\alpha \cdot t - 3/2 \cdot V_0 g \sin\alpha t^2 + g^2 t^3 / 2 = \\ &= V_0^2 t - 3/2 \cdot V_0 g \sin\alpha t^2 + g^2 t^3 / 2 = 0 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Кінцевий вираз є квадратним рівнянням відносно t

$$g^2 t^2 - 3V_0 g \sin\alpha \cdot t + 2V_0^2 = 0 \tag{1.4}$$

При цьому час має бути>0 і менший повного часу польоту. Крім того на перші половині шляху вектори не можуть давати скалярний добуток 0 (так як усі компоненти додатні), а відповідно час має бути більший ніж час підйому:

$$\frac{V_0 \sin\alpha}{g} < t < 2\frac{V_0 \sin\alpha}{g} \tag{1.5}$$

А відповідно корені рівняння (1.4) мають лежати в межах (1.5):

$$t_{1,2} = \frac{3V_0 g \sin\alpha \pm \sqrt{9V_0^2 g^2 \sin^2\alpha - 8g^2 V_0^2}}{2g^2} = V_0 \frac{3\sin\alpha \pm \sqrt{9\sin^2\alpha - 8}}{2g} \tag{1.6}$$

Один з коренів очевидно буде від'ємним, а для другого застосуємо умову (1.5):

$$\begin{aligned} &\frac{V_0 \sin\alpha}{g} < V_0 \frac{3\sin\alpha + \sqrt{9\sin^2\alpha - 8}}{2g} < 2\frac{V_0 \sin\alpha}{g} \\ &2\sin\alpha < 3\sin\alpha + \sqrt{9\sin^2\alpha - 8} < 4\sin\alpha \\ &-\sin\alpha < 0 < \sqrt{9\sin^2\alpha - 8} < \sin\alpha \\ &0 < 9\sin^2\alpha - 8 < \sin^2\alpha \end{aligned} \tag{1.7}$$

Тоді відповідь:

$$\sin^2\alpha < 1 \tag{1.8}$$

Фактично виконується завжди, а нижнє обмеження дає не тривіальний розв'язок:

$$\begin{aligned} &8 < 9\sin^2\alpha \\ &\alpha > \arcsin\sqrt{8/9} \end{aligned} \tag{1.9}$$