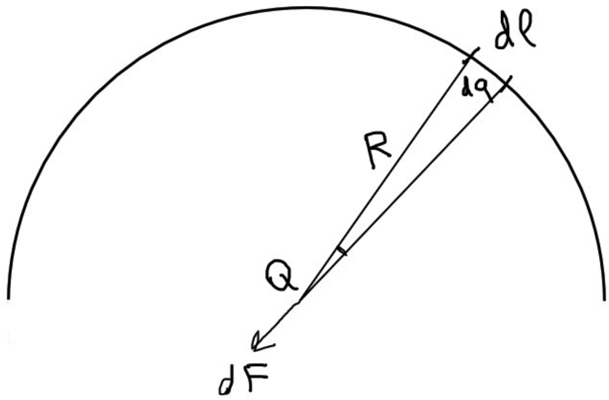
Тема: Напруженість електричного поля. Закон Кулона

$$\vec{F} = k\frac{Q_1 Q_2}{r^3}\vec{r}$$
$$\vec{E}_1 = \frac{\vec{F}}{Q_2} = k\frac{Q_1}{r^3}\vec{r} \qquad (0.1)$$

$$\vec{E} = \int k\frac{dq}{r^3}\vec{r} = k\int\frac{\rho dV}{r^3}\vec{r}$$
$$dq = \lambda dl \qquad (0.2)$$
$$dq = \sigma ds$$
$$dq = \rho dV$$

$$\oint_S \vec{E}\vec{n}dS = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad (0.3)$$

КПІ 1.4

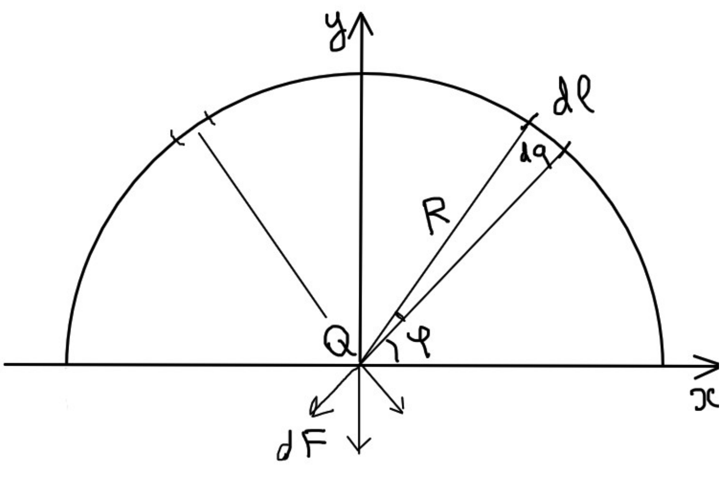


Розіб'ємо кільце на маленькі кусочки достатньо малі, щоб їх можна було вважати точковими зарядами з величиною:

$$dq = \lambda dl \qquad (1.1)$$

Тоді ці заряди будуть створювати силу:

$$d\vec{F} = k\frac{Qdq}{r^3}\vec{r} \qquad (1.2)$$



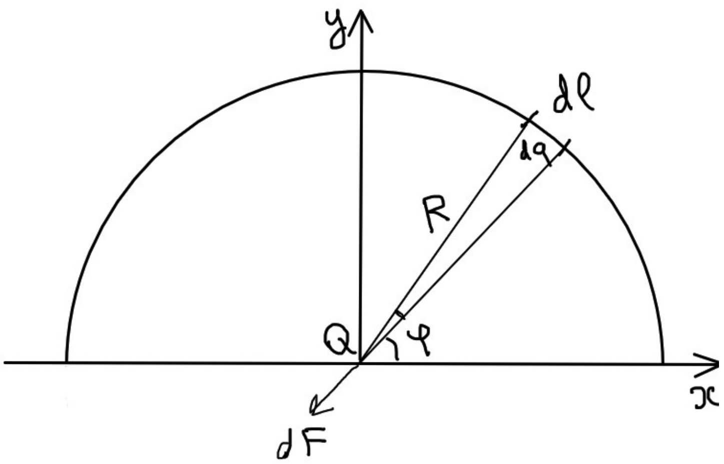
З міркувань симетрії розуміємо що повна сила яка діє заряд з боку кільця буде направлена вниз і відповідно нам треба взяти проекцію на вісь *y*:

$$F_y = \int k\frac{Qdq}{r^3}r_y = \frac{kQ}{R^3}\int dq\cdot y \tag{1.3}$$

Підставляючи (1.1) у (1.3) маємо:

$$F_y = \frac{kQ}{R^3}\int \lambda dl\cdot y \tag{1.4}$$

Перейдемо до полярної системи координат



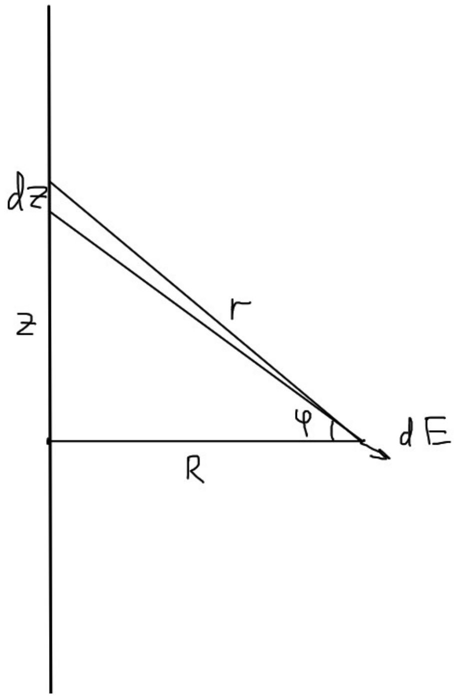
Відрізок $dl = Rd\varphi$, а координата $y = R\sin\varphi$, тоді:

$$\begin{aligned} F_y &= \frac{kQ\lambda}{R^3}\int_0^\pi Rd\varphi\cdot R\sin\varphi = \frac{kQ\lambda}{R}\int_0^\pi \sin\varphi d\varphi = \\ &= -\frac{kQ\lambda}{R}\cos\varphi\Big|_0^\pi = \frac{kQ\lambda}{R}\big(1-(-1)\big) = \frac{2kQ\lambda}{R} = \frac{Q\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R} \end{aligned} \tag{1.5}$$

КПІ 1.32

Розіб'ємо нитку на маленькі кусочки так, щоб кожен кусочок можна було вважати точковим тоді поле такого кусочка:

$$d\vec{E} = k\frac{dq}{r^3}\vec{r} \tag{1.6}$$



Після сумування по всім кусочкам результуюче поле буде направлено перпендикулярно до нитки (вздовж оси x):

$$E_x = k\int \frac{dq}{r^3} r_x = k\int \frac{dq}{r^3} x = k\int \frac{dq}{r^3} R \tag{1.7}$$

Заряд $dq = \lambda dz$, відстань $r = R/\cos\varphi$:

$$E_x = k\int \frac{\lambda dz}{R^3} R\cos^3\varphi = \frac{k\lambda}{R^2}\int \cos^3\varphi dz \tag{1.8}$$

Далі маємо або кут через z виразити або навпаки. Якщо виразимо z через кут:

$$z = R\tan\varphi \tag{1.9}$$

Можемо записати диференціал:

$$dz = d\left(R\tan\varphi\right) = R\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} \tag{1.10}$$

В результаті маємо інтеграл:

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{k\lambda}{R}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3\varphi \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{k\lambda}{R}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi d\varphi = \frac{k\lambda}{R}\sin\varphi\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \\ &= \frac{k\lambda}{R}\left(1-(-1)\right) = \frac{2k\lambda}{R} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R} \end{aligned} \tag{1.11}$$

Другий спосіб

Теорема Гауса:

$$\oint_S \vec{E}\vec{n}dS = \frac{Q}{\varepsilon_0} \tag{1.12}$$

Визначаємо, що напруженість поля направлена перпендикулярна до нитки. Якщо обираємо поверхню у вигляді циліндра, то на боковій поверхні напруженість перпендикулярна до поверхні, а на торцях напруженість паралельна до поверхні (перпендикулярна до нормалі n), тоді:

$$\int_{S_{бок}} EdS = \frac{Q}{\varepsilon_0} \tag{1.13}$$

Заряд враховуємо той який попаде всередину циліндру (H – висота циліндру):

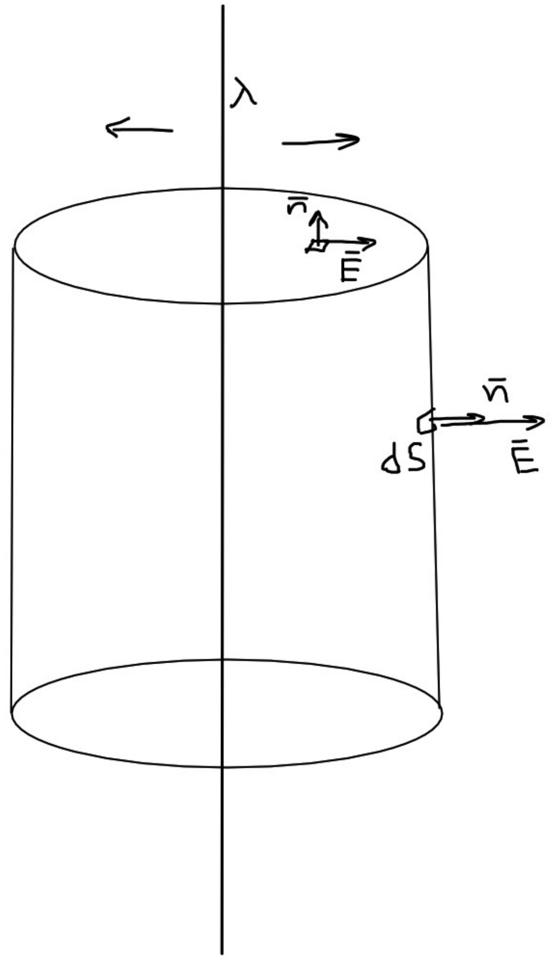
$$Q = \lambda H \tag{1.14}$$

Напруженість залежить тільки від відстані до нитки, а відповідно вона є константою на боковій поверхні

$$E\int\limits_{S_{бок}} dS = ES_{бок} = \frac{\lambda H}{\varepsilon_0} \tag{1.15}$$

Маємо значення:

$$E = \frac{\lambda H}{S_{бок}\varepsilon_0} = \frac{\lambda H}{2\pi R H \varepsilon_0} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R} \tag{1.16}$$



Іродов 2.17

$$\vec{E} = \int k\frac{dq}{r^3}\vec{r} \tag{1.17}$$

$$E_x = k\int \frac{dq}{r^3} r_x = \frac{k}{R^3}\int \lambda_0 \cos\varphi \cdot dl \cdot x \tag{1.18}$$

$$E_x = \frac{k}{R^3}\int \lambda_0 \cos\varphi \cdot dl \cdot x = \frac{k\lambda_0}{R^3}\int \cos\varphi \cdot Rd\varphi \cdot R\cos\varphi =$$
$$= \frac{k\lambda_0}{R}\int\limits_0^{2\pi} \cos^2\varphi d\varphi = \frac{k\lambda_0}{R}\int\limits_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\varphi}{2} d\varphi = \frac{k\lambda_0}{2R}\left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{k\lambda_0 \pi}{R} \tag{1.19}$$

$$E_y = \frac{k}{R^3}\int \lambda_0 \cos\varphi \cdot dl \cdot y = \frac{k\lambda_0}{R^3}\int \cos\varphi \cdot R d\varphi \cdot R\sin\varphi =$$
$$= \frac{k\lambda_0}{R}\int_0^{2\pi} \sin\varphi\cos\varphi d\varphi = \frac{k\lambda_0}{2R}\int_0^{2\pi} \sin 2\varphi d\varphi = \frac{k\lambda_0}{4R}\left(-\cos 2\varphi\right)\Big|_0^{2\pi} = 0 \qquad (1.20)$$