Д.З.
КПІ 1.35

$$\vec{E} = -grad\varphi = (\alpha y; \alpha x; -2\alpha z) = \alpha y\vec{i} + \alpha x\vec{j} - 2\alpha z\vec{k} \tag{0.1}$$

Діелектрики
Сприйнятливість

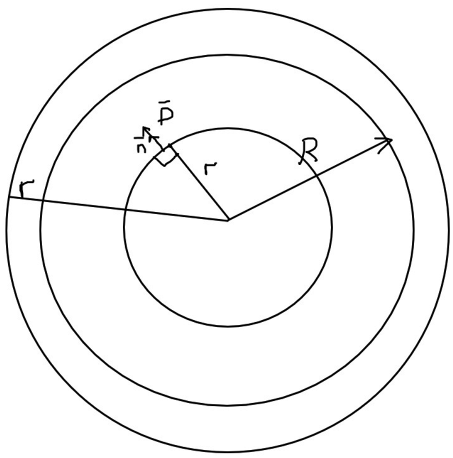
$$\Delta E = -\alpha E_0 \tag{1.1}$$

$$E = E_0 + \Delta E = E_0 - \alpha E_0 = E_0(1-\alpha) = \frac{E_0}{\varepsilon} \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned} &\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E} \\ &D_1 = \varepsilon_0 E_0 \\ &D_2 = \varepsilon\varepsilon_0\frac{E_0}{\varepsilon} = \varepsilon_0 E_0 \end{aligned} \tag{1.3}$$

КПІ 2.4

$$\oint \bar{D}\,\bar{n}\,dS = Q$$



Використаємо 1-е рівняння Максвела в речовині:

$$\oint_S \vec{D}d\vec{S} = Q_{віл} \tag{1.4}$$

Для області в середині маємо:

$$\begin{aligned} &\int_S \vec{D}\vec{n}dS = \int_S DdS = D\int_S dS = DS = 4\pi r^2 D = Q_{віл} = \int_V \rho dV = \rho\int_V dV = \\ &= \rho V = \rho\frac{4}{3}\pi r^3 = Q\frac{r^3}{R^3} \end{aligned} \tag{1.5}$$

$$D_{in} = \frac{\rho r}{3} = \frac{Qr}{4\pi R^3} \tag{1.6}$$

Напруженість:

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E} \tag{1.7}$$

$$E_{in} = \frac{D}{\varepsilon_1\varepsilon_0} = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_1\varepsilon_0 R^3} \tag{1.8}$$

Для області зовні маємо:

$$\oint_S \vec{D}\vec{n}dS = \oint_S DdS = D\oint_S dS = DS = 4\pi r^2 D = Q_{віл} = \int_V \rho dV = \rho\int_V dV = \\ = \rho V = \rho\frac{4}{3}\pi R^3 \tag{1.9}$$

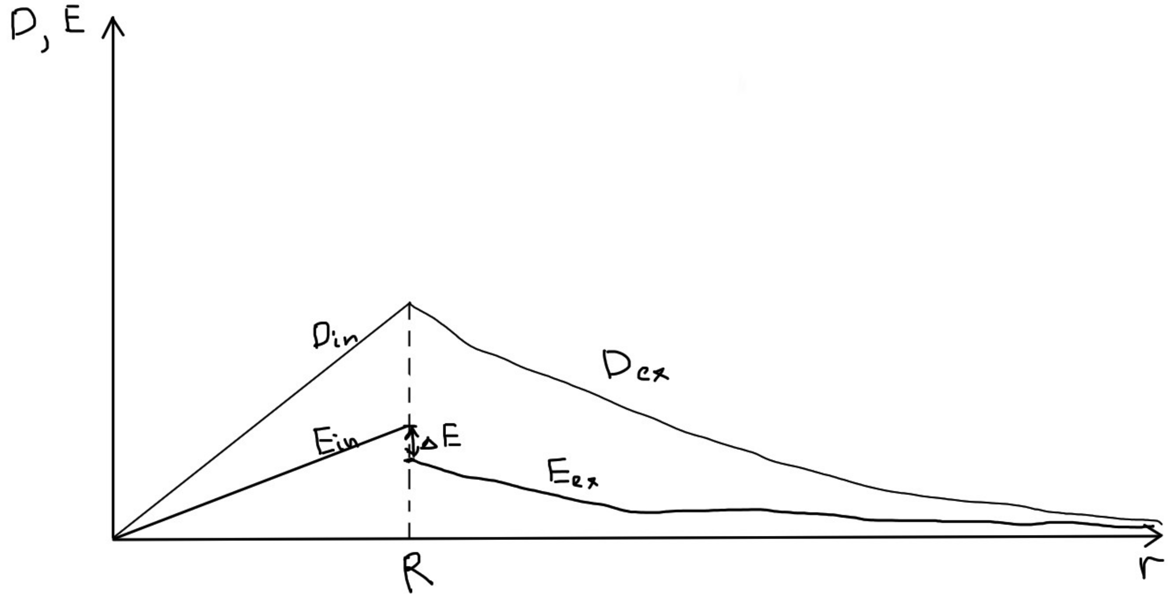
$$D_{ex} = \frac{\rho R^3}{3r^2} = \frac{Q}{4\pi r^2} \tag{1.10}$$

Напруженість:

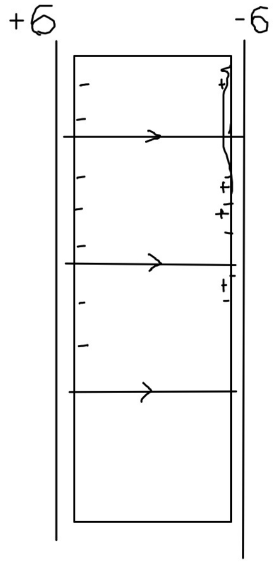
$$E_{ex} = \frac{D_{ex}}{\varepsilon_2\varepsilon_0} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_2\varepsilon_0 r^2} \tag{1.11}$$

Таким чином маємо стрибок напруженості:

$$E_{in}(R) - E_{ex}(R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_1\varepsilon_0 R^2} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_2\varepsilon_0 R^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\left(\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\varepsilon_2}\right) = E_0\left(\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\varepsilon_2}\right) \tag{1.12}$$



КПІ 2.2



Нескінченна заряджена площина створює індукцію:

$$\oint D ds = q$$
$$2Ds = \sigma s \qquad (1.13)$$
$$D = \frac{\sigma}{2}$$

Дві пластини (конденсатор) в середині створять:

$$D = \sigma \qquad (1.14)$$

Та за умови однорідності діелектрика:

$$E = \frac{D}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} \qquad (1.15)$$

За означенням індукції:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$
$$D = \varepsilon\varepsilon_0 E \qquad (1.16)$$

Тоді:

$$\sigma = \frac{\sigma}{\varepsilon} + P$$
$$P = \frac{\sigma(\varepsilon - 1)}{\varepsilon} \qquad (1.17)$$

Густина поляризаційних зарядів:

$$E = E_0 + \Delta E$$
$$-\Delta E = E_0 - E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) = \frac{P}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} \qquad (1.18)$$

Густина дипольного моменту:

$$p = qd$$
$$P = \frac{p}{V} = \frac{\sigma' S d}{S d} = \sigma' \qquad (1.19)$$

КПІ 2.21

Ємність конденсатора:

$$C = \frac{q}{|\Delta\varphi|} \tag{1.20}$$

Різниця потенціалів

$$|\Delta\varphi| = \int_1^2 E dx \tag{1.21}$$

1) $\varepsilon = const$

$$E = \frac{D}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0 S} \tag{1.22}$$

$$|\Delta\varphi| = \frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0 S} d \tag{1.23}$$

$$C = \frac{q}{\frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0 S} d} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d} \tag{1.24}$$

2) $\varepsilon_1, \varepsilon_2$

$$E_1 = \frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_1} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_1} \tag{1.25}$$

$$E_2 = \frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_2} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_2} \tag{1.26}$$

$$|\Delta\varphi| = \int_0^{d/3} \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_1} dx + \int_{d/3}^{d} \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_2} dx = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left(\frac{d}{3\varepsilon_1} + \frac{2d}{3\varepsilon_2}\right) \tag{1.27}$$

$$C = \frac{q}{\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left(\frac{d}{3\varepsilon_1} + \frac{2d}{3\varepsilon_2}\right)} = \frac{q}{\frac{q}{S\varepsilon_0}\frac{d}{3}\left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{2}{\varepsilon_2}\right)} = \frac{S\varepsilon_0 3}{d\left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{2}{\varepsilon_2}\right)} \tag{1.28}$$

3) $\varepsilon = a + bx = \varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{d} x$

$$E = \frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\left(\varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{d} x\right)} \tag{1.29}$$

$$\begin{aligned} |\Delta\varphi| &= \int_0^d \frac{\sigma}{\varepsilon_0\left(\varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{d} x\right)} dx = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\int_0^d \frac{dx}{\varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{d} x} = \\ &= \frac{\sigma d}{\varepsilon_0(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)} \ln\left(\varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{d} x\right)\Bigg|_0^d = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)} \ln\frac{\varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{d} d}{\varepsilon_1} = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)} \ln\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \end{aligned} \tag{1.30}$$

$$C = \frac{q}{\frac{qd}{S\varepsilon_0(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)} \ln\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} = \frac{S\varepsilon_0(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{d \ln\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \tag{1.31}$$

КПІ 2.32

Внутрішня обкладинка заряджена зарядом Q створить напруженість:

$$E_0 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} = E_0 r^2 \tag{1.32}$$

Найбільше значення ***E*** буде при найменшому ***r***. Напруга чисельно дорівнює різниці потенціалів:

$$U = \Delta\varphi = \varphi(R) - \varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) \tag{1.33}$$

Тоді:

$$U = E_0 r^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) \tag{1.34}$$