Скалярний потенціал електростатичного поля

$$\Delta\varphi = -\int_1^2 \vec{E}d\vec{r} \quad (1.1)$$

$$\vec{E} = -grad\varphi = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x};\frac{\partial\varphi}{\partial y};\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$$
$$\vec{E} = -grad\varphi = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r};\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha};\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) \quad (1.2)$$

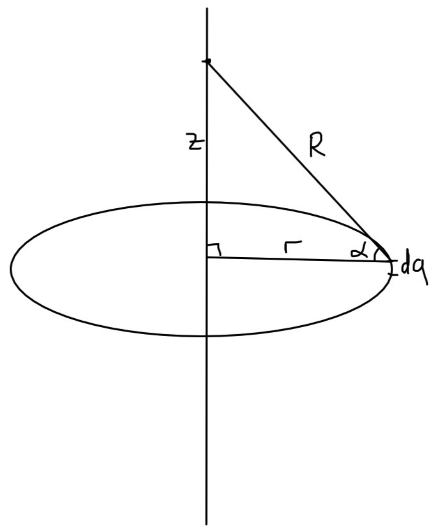
Потенціал точкового заряду:

$$\varphi = k\frac{q}{R} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} \quad (1.3)$$

КПІ 1.27

Розіб'ємо кільце на маленькі відрізки на кожному з яких знаходиться заряд dq. Кожен такий кусочок будемо вважати точковим зарядом, тоді сумарний потенціал:

$$\varphi = \int k\frac{dq}{R} \quad (1.4)$$



При цьому $R = \sqrt{r^2 + z^2}$ - є константою під час інтегрування. Інтеграл набуває вигляду:

$$\varphi = k\int\frac{dq}{\sqrt{r^2+z^2}} = \frac{k}{\sqrt{r^2+z^2}}\int dq = \frac{kq}{\sqrt{r^2+z^2}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+z^2}} \quad (1.5)$$

Якщо ми знаходимось на відстані значно більшій ніж радіус кільця r, тоді:

$$\varphi \approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{z^2}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 z} \quad (1.6)$$

Що відповідає полю точкового заряду.

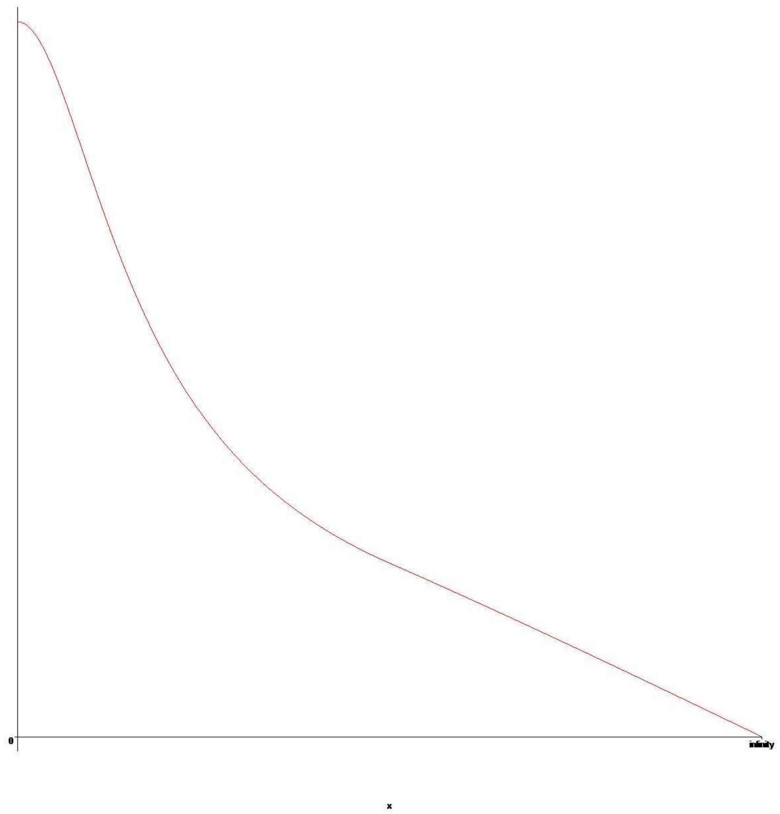
Якщо ми знаходимось поблизу центра кільця ($z \ll r$) тоді застосуємо розклад в ряд Тейлора (наближення)

$$(1+x)^n \approx 1+nx \quad (1.7)$$

Для (1.5) це дає:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+z^2}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r\sqrt{1+\left(\frac{z}{r}\right)^2}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(1+\left(\frac{z}{r}\right)^2\right)^{-1/2} \approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(1-\frac{1}{2}\frac{z^2}{r^2}\right) \quad (1.8)$$

Графік потенціалу



КПІ 1.38

Знайдемо напруженість по значенню потенціалу використовуючи (1.5):

$$E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+z^2}}\right) = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial z}(r^2+z^2)^{-1/2} = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0}\frac{2z}{(r^2+z^2)^{3/2}} = \\ = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{(r^2+z^2)^{3/2}} \tag{1.9}$$

КПІ 1.36

Знайдемо напруженість по відомому значенню потенціалу за допомогою (1.2). Для цього подивимось на x-ву компоненту градієнту:

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\frac{\alpha}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{\alpha}{2}\frac{2x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \frac{\alpha x}{r^3} \tag{1.10}$$

Видно, що y та z компоненти дадуть аналогічні вирази:

$$E_y = \frac{\alpha y}{r^3}$$
$$E_z = \frac{\alpha z}{r^3} \tag{1.11}$$

Тоді для повного вектора напруженості електричного поля можемо записати:

$$\vec{E} = \alpha\frac{\vec{r}}{r^3} \tag{1.12}$$

КПІ 1.37

а)

відповідно до формули (1.2) маємо покомпонентно:

$$E_x = ay = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \tag{1.13}$$

$$E_y = ax = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} \tag{1.14}$$

Інтегруючі (1.13) по *x* маємо:

$$\begin{gathered}\int aydx = -\int d\varphi \\ ayx + C_1(y) = \varphi\end{gathered} \tag{1.15}$$

З іншого боку інтегруючи (1.14) по y маємо:

$$\begin{gathered}\int axdy = -\int d\varphi \\ axy + C_2(x) = -\varphi\end{gathered} \tag{1.16}$$

Порівнюючи (1.16) з (1.15) робимо висновок що C_2 має бути чистою константою так само як і C_1. Відповідно:

$$\varphi = -axy + C \tag{1.17}$$

Підставляємо початкову умову $\varphi(0;0) = 0$:

$$\begin{gathered}0 = 0 + C \\ C = 0\end{gathered} \tag{1.18}$$

б)
маємо для x компоненти:

$$\begin{gathered}E_x = 2axy = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \int 2axydx = -\int d\varphi \\ ax^2 y + C_1(y) = -\varphi\end{gathered} \tag{1.19}$$

Для y компоненти:

$$\begin{gathered}E_y = a(x^2 - y^2) = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \int a(x^2 - y^2)dy = -\int d\varphi \\ ax^2 y - a\frac{y^3}{3} + C_2(x) = -\varphi\end{gathered} \tag{1.20}$$

Порівнюючи (1.20) з (1.19) бачимо що $C_1(y) = -a\frac{y^3}{3} + C_1'$ та $C_2(x) = C$

Тоді повний вираз:

$$\varphi = -ax^2 y + a\frac{y^3}{3} + C \tag{1.21}$$

Нормування:

$$\begin{gathered}0 = 0 + 0 + C \\ C = 0\end{gathered} \tag{1.22}$$

КПІ 1.41

Напруженість поля зарядженої нитки визначили як:

$$E_r = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \tag{1.23}$$

Використовуючи формулу (1.1) маємо для різниці потенціалів:

$$\Delta\varphi = -\int_{r_1}^{r_2} \vec{E}d\vec{r} = -\int_{r_1}^{r_2} E_r dr = -\int_{r_1}^{r_2} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} dr = = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\frac{r_2}{r_1} \quad (1.24)$$

КПІ 1.59

Спочатку знайдемо напруженість електричного поля за допомогою теореми Гауса:

Якщо беремо кулю радіуса r потік через її поверхню складатиме:

$$\Phi = \oint_S \vec{E}\vec{n}ds = \oint_S EdS = E\oint_S dS = ES = E\cdot 4\pi r^2 \quad (1.25)$$

Заряд який попаде всередину цієї кулі:

$$Q_{вн} = \int \rho dV = \int_0^r \alpha r \cdot 4\pi r^2 dr = 4\pi\alpha \frac{r^4}{4} = \pi\alpha r^4 \quad (1.26)$$

Тоді за теоремою Гауса:

$$\Phi = E_{вн}\cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_{вн}}{\varepsilon_0} = \frac{\pi\alpha r^4}{\varepsilon_0}$$
$$E_{вн} = \frac{\alpha r^2}{2\varepsilon_0} \quad (1.27)$$

Знайдемо потенціал в середині кулі:

$$\varphi_{вн} = -\int \vec{E}_{вн} d\vec{r} = -\int \frac{\alpha r^2}{2\varepsilon_0} dr = -\frac{\alpha r^3}{6\varepsilon_0} + C_{вн} \quad (1.28)$$

Зовні кулі (r>R) матимемо поле як у точкового заряду:

$$Q_{зв} = \int_0^R \rho dV = \pi\alpha R^4 = const$$
$$E_{зв} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\alpha R^4}{4\varepsilon_0 r^2} \quad (1.29)$$

Відповідно потенціал:

$$\varphi_{зв} = -\int Edr = -\int \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + C_{зв} \quad (1.30)$$

Умова нормування потенціалу – має складати 0 на нескінченності:

$$\lim_{r\to\infty} \varphi_{зв} = C_{зв} = 0 \quad (1.31)$$

Умова неперервності потенціалу:

$$\varphi_{вн}(R) = \varphi_{зв}(R)$$
$$-\frac{\alpha R^3}{6\varepsilon_0} + C_{вн} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} = \pi\alpha R^4 \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{\alpha R^3}{4\varepsilon_0} \quad (1.32)$$
$$C_{вн} = \frac{\alpha R^3}{\varepsilon_0}\frac{5}{12}$$

Тоді:

$$\varphi_{вн} = -\frac{\alpha r^3}{6\varepsilon_0} + \frac{\alpha R^3}{\varepsilon_0}\frac{5}{12} \quad (1.33)$$

Д.З.

КПІ 1.35; 1.41;