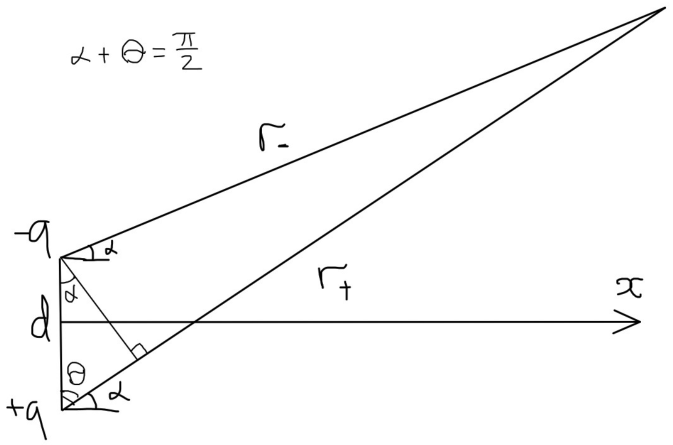
Диполь

Гомонай, Кравцов. Електродинаміка №207



Потенціал диполя – сума потенціалів двох зарядів:

$$\varphi = \varphi_+ + \varphi_- = k\frac{q}{r_+} - k\frac{q}{r_-} = \frac{kq(r_- - r_+)}{r_+ r_-} \tag{1.1}$$

Робимо наближення:

$$\begin{aligned} &r_+ r_- \approx r^2 \\ &r_- - r_+ \approx -d\sin\alpha = -d\cos\theta \end{aligned} \tag{1.2}$$

Тоді

$$\varphi \approx -\frac{kqd\cos\theta}{r^2} = -k\frac{p\cos\theta}{r^2} \tag{1.3}$$

Запишемо у вигляді скалярного добутку

$$\varphi = -\frac{kqd\cos\theta r}{r^3} = -\frac{kq(\vec{d}\vec{r})}{r^3} = -k\frac{(\vec{p}\vec{r})}{r^3} \tag{1.4}$$

Напруженість можемо знайти за допомогою градієнта:

$$\vec{E} = -grad(\varphi) = -k \cdot grad\frac{(\vec{p}\vec{r})}{r^3} \tag{1.5}$$

Компоненти градієнту складаються з похідних тому можемо написати

$$grad\frac{(\vec{p}\vec{r})}{r^3} = grad(\vec{p}\vec{r})\frac{1}{r^3} + (\vec{p}\vec{r})grad\frac{1}{r^3} \tag{1.6}$$

Обрахуємо окремо:

$$grad(\vec{p}\vec{r}) = grad(p_x x + p_y y + p_z z) = (p_x; p_y; p_z) = \vec{p} \tag{1.7}$$

$$\begin{aligned} &grad\frac{1}{r^3} = grad\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \left(\frac{1}{(t)^{3/2}}\right)' \cdot grad(x^2+y^2+z^2) = \\ &= \frac{-3/2}{t^{5/2}} \cdot \left(2x; 2y; 2z\right) = \frac{-3\vec{r}}{r^5} \end{aligned} \tag{1.8}$$

Об’єднуючи все це маємо

$$\vec{E} = k\left(\frac{\vec{p}}{r^3} - \frac{3(\vec{p}\vec{r})\vec{r}}{r^5}\right) \tag{1.9}$$

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r};\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta};0\right) = \left(-kp\cos\theta\frac{2}{r^3};-\frac{1}{r}\frac{kp}{r^2}\sin\theta;0\right)$$

$$E = \sqrt{\left(kp\cos\theta\frac{2}{r^3}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\frac{kp}{r^2}\sin\theta\right)^2} = \frac{kp}{r^3}\sqrt{4\cos^2\theta + \sin^2\theta} = \tag{1.10}$$

$$= \frac{kp}{r^3}\sqrt{3\cos^2\theta + 1}$$

Діелектрики

Гомонай Кравцов 221

При наявності речовини відбувається поляризація – утворення диполів. Результуюче наведене поле:

$$\Delta\vec{E} = -\alpha\vec{E}_0 \tag{1.11}$$

Повне поле

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \Delta\vec{E} = \vec{E}_0 - \alpha\vec{E}_0 = \vec{E}_0(1-\alpha) = \frac{\vec{E}_0}{\varepsilon} \tag{1.12}$$

Потенціал

$$\varphi = -\int \vec{E}d\vec{r} = \int \frac{\vec{E}_0}{\varepsilon}d\vec{r} = \frac{\varphi_0}{\varepsilon} \tag{1.13}$$

Иродов 2.209

Енергія

$$U = \frac{\rho g V h}{2} + \frac{CU^2}{2} = \frac{\rho g 2\pi r d h^2}{2} + \frac{(C_1 + C_2)U^2}{2} =$$
$$= \frac{\rho g 2\pi r d h^2}{2} + \frac{\varepsilon_0 2\pi r(\varepsilon h + (H-h))U^2}{2d} \tag{1.14}$$

В рівновазі мінімум енергії:

$$\frac{dU}{dh} = \rho g 2\pi r d h + \varepsilon_0 \pi r(\varepsilon - 1)U^2 / d = 0 \tag{1.15}$$

$$2\rho g d h = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)U^2 / d$$

$$h = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)U^2}{2\rho g d^2} \tag{1.16}$$

Іродов 2.83

Знайдемо напруженість та індукцію яку створить заряд

$$\oint \vec{D}d\vec{s} = q$$
$$\oint Dds = D\oint ds = D4\pi r^2 = q \tag{1.17}$$

$$D = \frac{q}{4\pi r^2} \tag{1.18}$$

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$$
$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2} \tag{1.19}$$

$$D_{ex} = \varepsilon_0 E_0 = D_{in} = \varepsilon\varepsilon_0 E = \varepsilon\varepsilon_0\frac{E_0}{\varepsilon} = \varepsilon_0 E_0$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$$
$$\vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0\vec{E} = \frac{q}{4\pi r^3}\vec{r} - \varepsilon_0\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^3}\vec{r} = \frac{q}{4\pi r^3}\vec{r}\left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right) \tag{1.20}$$

$$q' = \oint \vec{P}d\vec{S} = \oint\frac{q}{4\pi r^3}\vec{r}\vec{n}\left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right)dS = \oint\frac{q}{4\pi r^2}\left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right)dS =$$
$$= \frac{q}{4\pi r^2}\left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right)S = q\left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right) \tag{1.21}$$

Иродов 2.65

Иродов 2.81

$$F = F_+ + F_- = q_1E(r_+) - q_1E(r_-) \tag{1.22}$$

$$\vec{F} = (\vec{\nabla}\cdot\vec{p})\vec{E} = \left(p_x\frac{\partial}{\partial x} + p_y\frac{\partial}{\partial y} + p_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\vec{E} \tag{1.23}$$

$$F = p_{1z}\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{-2p}{z^3}\right) = \frac{6pp_1}{z^4} = \frac{6pp_1}{l^4} = \frac{6p}{l^4}\beta E = \frac{6p}{l^4}\beta k\frac{2p}{l^3} \tag{1.24}$$