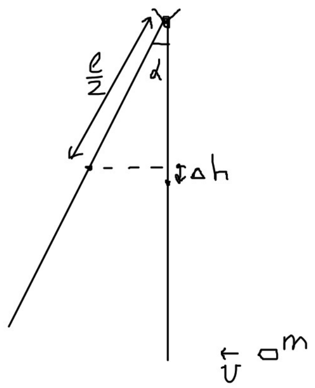
Д.з.

Іродов 1.306



Закон збереження моменту імпульсу

$$lmv = I\omega = (\frac{ML^2}{3} + ml^2)\omega \tag{0.1}$$

$$\begin{gathered}\frac{I\omega^2}{2} = Mg\Delta h + mg2\Delta h \\ \Delta h = L/2 - l\cos\alpha/2\end{gathered} \tag{0.2}$$

$$\begin{gathered}\Delta p = Mu + m2u - mv = 0 \\ u = 2\omega/L\end{gathered} \tag{0.3}$$

Закон Кулона

$$\vec{F} = k\frac{Qq}{r^3}\vec{r} = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r} \tag{1.1}$$

Напруженість електричного поля

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \tag{1.2}$$

Напруженість електричного поля точкового заряду:

$$\vec{E} = k\frac{Q}{r^3}\vec{r} \tag{1.3}$$

Напруженість електричного поля розподілених зарядів:

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \int k\frac{dq}{r^3}\vec{r} \tag{1.4}$$

Гомонай, Кравцов. Електродинаміка №12

Рівняння динаміки:

$$F = Eq = (E_0 - \varepsilon x)q = m\frac{dv}{dt} \tag{1.5}$$

Зробимо заміну змінної:

$$\begin{gathered}E_0 - \varepsilon x = -\varepsilon x' \\ x' = x - \frac{E_0}{\varepsilon}\end{gathered} \tag{1.6}$$

Тоді рівняння набуде вигляду:

$$-\varepsilon x' q = m\frac{d^2x'}{dt^2} \tag{1.7}$$

Маємо рівняння гармонічних коливань:

$$\frac{d^2x'}{dt^2} + \frac{\varepsilon q}{m}x' = 0 \tag{1.8}$$

Але якщо нас цікавить залежність швидкості від координати тоді можна (1.5) домножити на dx обидві частини рівності та про інтегрувати:

$$\begin{aligned} &\int (E_0 - \varepsilon x) q dx = \int m\frac{dv}{dt}dx = \int mvdv \\ &qE_0 x - \frac{\varepsilon x^2}{2}q = \frac{mv^2}{2} \end{aligned} \tag{1.9}$$

Зупинка задається умовою $v = 0$:

$$\begin{aligned} &E_0 x_0 - \frac{\varepsilon x_0^2}{2} = 0 \\ &x_0 = \frac{2E_0}{\varepsilon} \end{aligned} \tag{1.10}$$

Релятивістський випадок. Якщо кінцева швидкість досить велика маємо використовувати релятивістські формули:

$$Eq = (E_0 - \varepsilon x)q = \frac{d}{dt}\frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = m\frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}\frac{dv}{dt} \tag{1.11}$$

(Тут ми використали результат задачі КШФ 11.2.5)

В цьому випадку рівняння не буде зводитись до гармонічних коливань але прийом з домноженням на dx все одно працює:

$$\int (E_0 - \varepsilon x) q dx = \int m\frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}\frac{dv}{dt}dx = \int m\frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}vdv \tag{1.12}$$

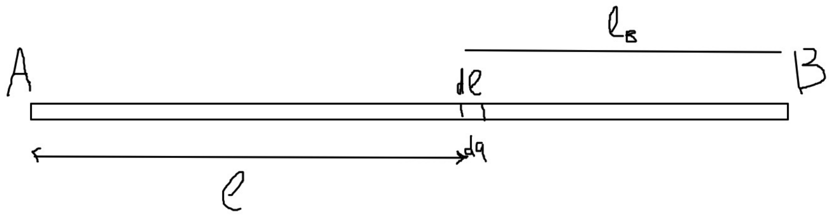
Але тут вже щоб про інтегрувати праву частину треба зробити заміну змінної

$$\begin{aligned} &1 - v^2/c^2 = \alpha \\ &-2vdv/c^2 = d\alpha \\ &vdv = -c^2 d\alpha/2 \end{aligned} \tag{1.13}$$

Тоді (1.12) дає:

$$\begin{aligned} &E_0 x - \frac{\varepsilon x^2}{2} = -\frac{mc^2}{2}\int \alpha^{-3/2}d\alpha = mc^2\frac{1}{\sqrt{\alpha}} = mc^2\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\bigg|_0^v = \\ &= mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1\right) \end{aligned} \tag{1.14}$$

Іродов 2.10



Розіб'ємо стержень на невеликі шматочки довжиною dl, кожен з яких має заряд dq. Якщо кожен такий кусочок знаходиться на відстані l від кінця стержня то створить напруженість:

$$dE = k\frac{dq}{r^2} = k\frac{\lambda dl}{l^2} \tag{1.15}$$

Лінійна густина заряду:

$$\lambda = \frac{dq}{dl} = C \cdot l^2 \tag{1.16}$$

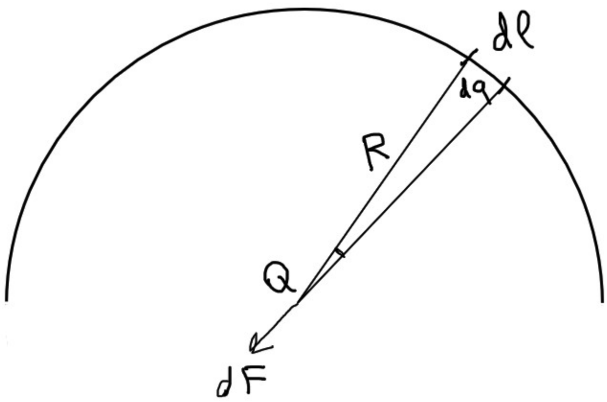
Тоді повний заряд:

$$\begin{gathered} q = \int \lambda dl = \int C \cdot l^2 dl = C \cdot l^3 / 3 \\ C = 3q / l^3 \end{gathered} \tag{1.17}$$

Можемо знайти загальну напруженість:

$$E = \int_0^l k\frac{\lambda dl}{l^2} = k\int_0^l \frac{C \cdot l^2 dl}{l^2} = kC\int_0^l dl = kCl = \frac{3kq}{l^2} \tag{1.18}$$

Гомонай, Кравцов. Електродинаміка №49

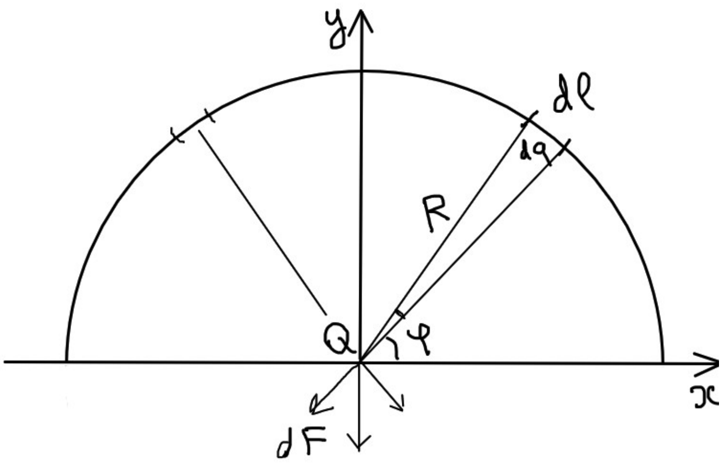


Розіб'ємо кільце на маленькі кусочки достатньо малі, щоб їх можна було вважати точковими зарядами з величиною:

$$dq = \lambda dl \tag{1.19}$$

Тоді ці заряди будуть створювати напруженість:

$$d\vec{E} = k\frac{dq}{r^3}\vec{r} \tag{1.20}$$



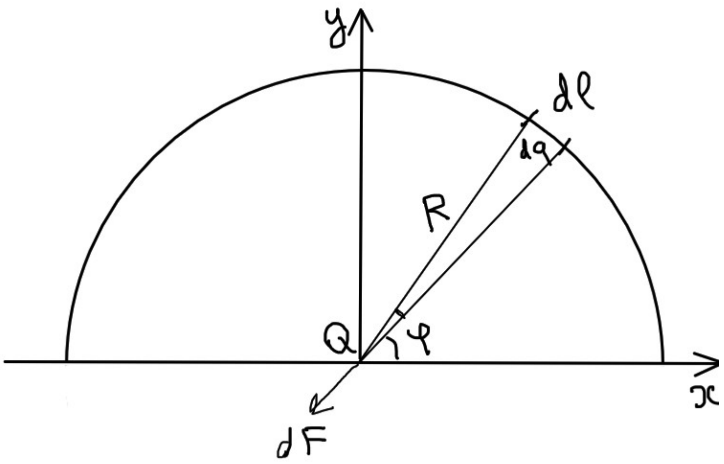
З міркувань симетрії розуміємо що повна сила яка діє заряд з боку кільця буде направлена вниз і відповідно нам треба взяти проекцію на вісь y:

$$E_y = \int k \frac{dq}{r^3} r_y = \frac{k}{R^3} \int dq \cdot y \qquad (1.21)$$

Підставляючи (1.19) у (1.21) маємо:

$$E_y = \frac{k}{R^3} \int \lambda dl \cdot y \qquad (1.22)$$

Перейдемо до полярної системи координат

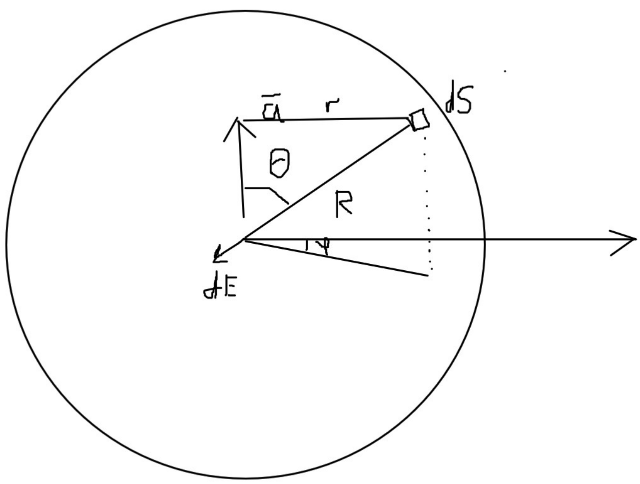


Відрізок $dl = Rd\varphi$, а координата $y = R\sin\varphi$, тоді:

$$\begin{aligned} E_y &= \frac{k\lambda}{R^3} \int_0^{\pi} Rd\varphi \cdot R\sin\varphi = \frac{k\lambda}{R} \int_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi = \\ &= -\frac{k\lambda}{R} \cos\varphi \Big|_0^{\pi} = \frac{k\lambda}{R}\left(1-(-1)\right) = \frac{2k\lambda}{R} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R} = \frac{q}{2\pi^2\varepsilon_0 R^2} \end{aligned} \qquad (1.23)$$

Гомонай, Кравцов. Електродинаміка №52

$$dS = dl_\theta \cdot dl_\varphi =$$
$$= R d\theta \cdot r \cdot d\varphi = R d\theta \cdot R \sin\theta d\varphi$$



Розіб'ємо поверхню сфери на малі елементи площі dS і будемо обраховувати суму напруженостей від всіх зарядів:

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \int k \frac{dq}{r^3} \vec{r} = \int k \frac{\sigma ds}{r^3} \vec{r} = \int k \frac{(\vec{a}\vec{r}) ds}{r^3} \vec{r} \tag{1.24}$$

Будемо шукати проекцію напруженості на вісь z:

$$E_z = \int k \frac{(\vec{a}\vec{r}) ds}{r^3} r_z = \int k \frac{(aR\cos\theta) ds}{r^3} z =$$
$$= \frac{ka}{R^2} \iint \cos^2\theta R \cdot R^2 \sin\theta d\theta d\varphi = kaR 2\pi \int \cos^2\theta \sin\theta d\theta = \tag{1.25}$$
$$= -2\pi kaR \int \cos^2\theta \cdot d\cos\theta = -2\pi kaR \cdot \left.\frac{\cos^3\theta}{3}\right|_0^\pi = \frac{4\pi kaR}{3} = \frac{aR}{3\varepsilon_0}$$