Коливання

Канонічне рівняння гармонічних не затухаючих коливань:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0 \tag{1.1}$$

Рівняння коливань (розв'язок):

$$x=A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t)=C\cos(\omega t+\varphi_0) \tag{1.2}$$

Закон збереження енергії:

$$\frac{mv^2}{2}+\frac{kx^2}{2}=\frac{m\dot{x}^2}{2}+\frac{kx^2}{2}=const \tag{1.3}$$

Затухаючі гармонічні коливання:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\gamma\frac{dx}{dt}+\omega^2x=0 \tag{1.4}$$

Рівняння затухаючих коливань:

$$\begin{aligned}&x=Ae^{-\gamma t}\cos(\Omega t+\varphi_0)\\&\Omega^2=\omega_0^2-\gamma^2\end{aligned} \tag{1.5}$$

КШФ 9.1.1

а) Запишемо другий закон Ньютона:

$$\begin{aligned}F&=ma\\-\frac{dU}{dx}&=m\frac{d^2x}{dt^2}\end{aligned} \tag{1.6}$$

$$-\frac{dU}{dx}=-\frac{d}{dx}U_0(1-\cos ax)=-U_0a\sin ax \tag{1.7}$$

Гармонічне наближення:

$$-U_0a\sin ax\approx -U_0a^2x=m\frac{d^2x}{dt^2} \tag{1.8}$$

Маємо канонічний вигляд рівняння руху для гармонічних коливань:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{U_0a^2}{m}x=0 \tag{1.9}$$

Закон коливань:

$$\begin{aligned}&x=A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t)\\&\omega^2=\frac{U_0a^2}{m}\end{aligned} \tag{1.10}$$

За малих відхилень енергію частки можна записати у вигляді:

$$U+E_K=U_0(1-\cos ax)+\frac{mv^2}{2}\approx U_0\left(1-(1-\frac{(ax)^2}{2})\right)+\frac{mv^2}{2}=\frac{U_0a^2x^2}{2}+\frac{mv^2}{2}=const \tag{1.11}$$

Тоді робимо висновок, що узагальнена жорсткість системи:

$$\tilde{k}=U_0a^2 \tag{1.12}$$

Відповідно частота коливань:

$$\omega^2=\frac{\tilde{k}}{m}=\frac{U_0a^2}{m} \tag{1.13}$$

б)Знайдемо положення відносно якої будуть виникати коливання:

$$F = -\frac{dU}{dx} = 0 \tag{1.14}$$

$$F = -\frac{d}{dx}\left(\frac{a}{x^2} - \frac{b}{x}\right) = \frac{2a}{x^3} - \frac{b}{x^2} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{2a}{x} - b\right) = 0 \tag{1.15}$$

Точка рівноваги:

$$x_0 = \frac{2a}{b} \tag{1.16}$$

Відповідно при невеликих відхиленнях від положення рівноваги:

$$\begin{aligned} F &= \frac{2a}{x^3} - \frac{b}{x^2} = \frac{2a}{(x_0 + \delta x)^3} - \frac{b}{(x_0 + \delta x)^2} = \frac{2a}{x_0^3}\left(1 + \frac{\delta x}{x_0}\right)^{-3} - \frac{b}{x_0^2}\left(1 + \frac{\delta x}{x_0}\right)^{-2} \approx \\ &\approx \frac{2a}{x_0^3}\left(1 - 3\frac{\delta x}{x_0}\right) - \frac{b}{x_0^2}\left(1 - 2\frac{\delta x}{x_0}\right) = -\frac{6a\delta x}{x_0^4} + \frac{2b\delta x}{x_0^3} = -\frac{2}{x_0^3}\left(\frac{3a}{x_0} - b\right)\delta x = \\ &= -\frac{2}{x_0^3}\frac{b}{2}\delta x = m\frac{d^2 x}{dt^2} \end{aligned} \tag{1.17}$$

Канонічний вигляд:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2 \delta x}{dt^2} + \frac{b}{m x_0^3}\delta x = 0 \\ &\frac{d^2 \delta x}{dt^2} + \frac{b^4}{m 8 a^3}\delta x = 0 \end{aligned} \tag{1.18}$$

Закон руху

$$\begin{aligned} &x = x_0 + \delta x = \frac{2a}{b} + A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \\ &\omega^2 = \frac{b^4}{m 8 a^3} \end{aligned} \tag{1.19}$$

КШФ 9.1.6

2-й закон Ньютона

$$\begin{aligned} &P - F_A = ma \\ &mg - \rho g V' = m\frac{d^2 h}{dt^2} \end{aligned} \tag{1.20}$$

Занурена частина:

$$V' = Sh = S(h_0 + \delta h) \tag{1.21}$$

В положенні рівноваги:

$$mg = \rho g S h_0 \tag{1.22}$$

Тоді (1.20) дає

$$mg - \rho g S h_0 - \rho g S \delta h = -\rho g S \delta h = m\frac{d^2 h}{dt^2} \tag{1.23}$$

Рівняння руху

$$\frac{d^2 \delta h}{dt^2} + \frac{\rho g \pi r^2}{m}\delta h = 0 \tag{1.24}$$

$$\omega^2 = \frac{\rho g \pi r^2}{m} \tag{1.25}$$

КШФ 9.1.13

Знайдемо точку рівноваги:

$$mg - kl_0 = 0 \tag{1.26}$$

Поблизу точки рівноваги:

$$mg - kl = mg - k(l_0 + \delta l) = -k\delta l = m\frac{d^2 l}{dt^2} \tag{1.27}$$

Частота:

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \tag{1.28}$$

Амплітуда – відстань від точки положення рівноваги до точки зупинки. Точку зупинки знайдемо законом збереження енергії:

$$mgh = -mgl_{\max} + \frac{kl_{\max}^2}{2} \tag{1.29}$$

$$kl_{\max}^2 - 2mgl_{\max} - mgh = 0$$

$$l_{\max} = \frac{mg \pm \sqrt{m^2 g^2 + mghk}}{k} \tag{1.30}$$

$$A = l_{\max} - l_0 = \frac{\sqrt{m^2 g^2 + mghk}}{k} \tag{1.31}$$

Знайдемо закон гармонічних коливань через початкові умови. Загальний вигляд:

$$\delta l = A\cos\omega t + B\sin\omega t \tag{1.32}$$

$$v = \frac{d\delta l}{dt} = -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t \tag{1.33}$$

Початковий момент часу – коли тіло торкається терезів. В цей час швидкість:

$$v(0) = \sqrt{2gh} \tag{1.34}$$

Та координата (відносно рівноваги)

$$\delta l(0) = -l_0 \tag{1.35}$$

Підставляємо (1.34) та (1.35) у (1.32) та (1.33):

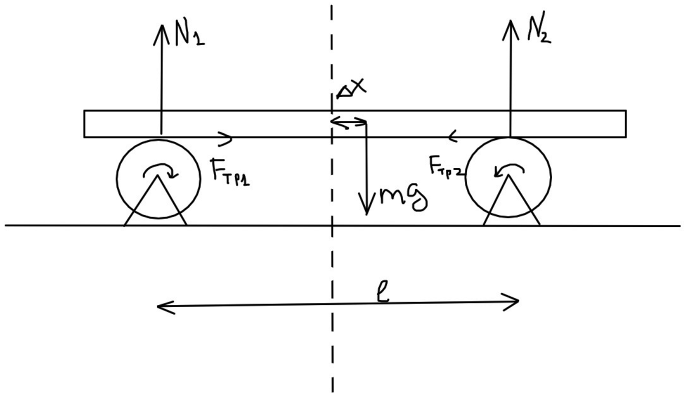
$$\begin{gathered} \delta l(0) = -l_0 = A\cos(0) + B\sin(0) = A \\ V(0) = \sqrt{2gh} = -A\omega\sin(0) + B\omega\cos(0) = B\omega \end{gathered} \tag{1.36}$$

Маємо:

$$\begin{aligned} &\delta l = -l_0\cos\omega t + \frac{\sqrt{2gh}}{\omega}\sin\left(\omega t\right) = \sqrt{l_0^2 + \frac{2gh}{\omega^2}}\cos\left(\omega t + \varphi_0\right) \\ &\omega^2 = \frac{k}{m} \\ &l_0 = \frac{mg}{k} \end{aligned} \tag{1.37}$$

$$\begin{aligned} &A\cos\varphi + B\sin\varphi = \sqrt{A^2 + B^2}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}\cos\varphi + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}\sin\varphi\right) = \\ &= \sqrt{A^2 + B^2}\left(\cos\varphi_0\cos\varphi + \sin\varphi_0\sin\varphi\right) = \sqrt{A^2 + B^2}\cos\left(\varphi - \varphi_0\right) \\ &\tan\varphi_0 = \frac{B}{A} \end{aligned} \tag{1.38}$$

Иродов 3.27



При зміщені центру мас на Δx виникають сили:

$$F_{т1} - F_{т2} = m\frac{d^2x}{dt^2} \qquad (1.39)$$
$$N_1 + N_2 - mg = 0$$

При цьому

$$F_{т1} = kN_1 \qquad (1.40)$$
$$F_{т2} = kN_2$$

Крім того тіло знаходиться в рівновазі відносно обертання

$$[\vec{F}\times\vec{r}]$$
$$N_1(\frac{l}{2}+\Delta x) - N_2(\frac{l}{2}-\Delta x) = 0 \qquad (1.41)$$

Підставимо N_1 з (1.41) до y-проекції (1.39)

$$N_2\frac{l/2-\Delta x}{l/2+\Delta x} + N_2 = mg \qquad (1.42)$$
$$N_2 = mg\frac{l/2+\Delta x}{l}$$

Тоді

$$N_1 = mg\frac{l/2-\Delta x}{l} \qquad (1.43)$$

Записуємо рівняння руху

$$kmg\frac{l/2-\Delta x}{l} - kmg\frac{l/2+\Delta x}{l} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$
$$-2kmg\frac{\Delta x}{l} = m\frac{d^2x}{dt^2} \qquad (1.44)$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2kg}{l}\Delta x = 0$$

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega} \qquad (1.45)$$

Іродов 3.66

Нехай тіло опустилось вниз на відстань y тоді енергія системи:

$$-mgy+\frac{ky^2}{2}+\frac{m\dot{y}^2}{2}+\frac{I\dot{\varphi}^2}{2}=E=const \qquad (1.46)$$

Якщо нитка не проковзує по поверхні блока:

$$\omega R=v \qquad (1.47)$$

Тоді

$$\begin{aligned}&-mgy+\frac{ky^2}{2}+\frac{m\dot{y}^2}{2}+\frac{I\dot{y}^2}{2R^2}=E\\&\frac{k(y-mg/k)^2}{2}+\frac{(m+I/R^2)\dot{y}^2}{2}=E+\frac{m^2g^2}{2k}=const\end{aligned} \qquad (1.48)$$

Тоді узагальнена маса $m+I/R^2$, а частота коливань:

$$\omega^2=\frac{k}{m+I/R^2} \qquad (1.49)$$

Положення рівноваги:

$$y_0=\frac{mg}{k} \qquad (1.50)$$

$$\begin{aligned}&\vec{N}\vec{\omega}=\frac{d\vec{L}}{dt}\vec{\omega}\\&\vec{N}\vec{\omega}=m\frac{d[\vec{r}\times\vec{v}]}{dt}\vec{\omega}=m\frac{d}{dt}[\vec{r}\times(\frac{dr}{dt}\vec{e}_r+r\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_\varphi)]\vec{\omega}=m\frac{d}{dt}[\vec{r}\times\vec{e}_\varphi r\omega]\vec{\omega}=\\&=m\frac{d}{dt}[r\vec{e}_r\times\vec{e}_\varphi r\omega]\vec{\omega}=\frac{m}{r^2}\frac{d}{dt}[\vec{k}r^2\vec{\omega}]r^2\vec{\omega}=\frac{m}{2r^2}\frac{d}{dt}\left(r^2\vec{\omega}\right)^2=\frac{d}{dt}\left(\frac{mr^2\omega^2}{2}\right)\\&\vec{N}\vec{\omega}=\end{aligned} \qquad (1.51)$$