ДЗ

КШФ 3.3

$$
\begin{aligned}
&F_0\vec{e}_x\cos\omega t = m\frac{d\vec{v}}{dt}\\
&F_0\cos\omega t = m\frac{dv_x}{dt}\\
&\int F_0\cos\omega t dt = \int m dv_x\\
&\frac{F_0}{\omega}\sin\omega t = mv_x + C\\
&0 = mv_0 + C\\
&C = -mv_0\\
&v_x = v_0 + \frac{F_0}{m\omega}\sin\omega t = \frac{dx}{dt}\\
&\int\left(v_0 + \frac{F_0}{m\omega}\sin\omega t\right)dt = \int dx\\
&v_0 t - \frac{F_0}{m\omega^2}\cos\omega t = x + C\\
&-\frac{F_0}{m\omega^2} = x_0 + C\\
&x = v_0 t - \frac{F_0}{m\omega^2}\left(\cos\omega t - 1\right) + x_0
\end{aligned}
\tag{0.1}
$$

КШФ 4.2.10

До моменту дотику пружини кулька буде падати вільно під дією тільки сили тяжіння. Відповідно на момент удару о пружину швидкість кульки можна знайти через закон збереження енергії:

$$
\begin{aligned}
&mgH = \frac{mv^2}{2} + mgl\\
&v = \sqrt{2g(H-l)}
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

Далі протягом певного часу швидкість буде збільшуватись, потім буде момент часу коли сила тяжіння зрівноважить силу пружності і в подальшому сила пружності почне сповільнювати рух кульки, перевищуючи силу тяжіння. Іншими словами за другим законом Ньютона:

$$
\frac{dp}{dt} = F_{пр} - F_{тяж} = 0 \tag{1.2}
$$

Максимальне значення імпульса це екстремум імпульса як функції певного монотонного параметру (наприклад часу). Відповідно в точці екстремуму похідна бути рівною 0, а похідна від імпульсу рівна сумі сил які діють на тіло. Що означає в момент максимуму швидкості сума сил має бути рівною 0:

$$
F_{пр} - F_{тяж} = k\Delta l - mg = 0 \tag{1.3}
$$

Звідси маємо видовження пружини (та координату вантажка) в момент максимуму швидкості:

$$
\begin{aligned}
&\Delta l = \frac{mg}{k}\\
&y = l - \Delta l = l - \frac{mg}{k}
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

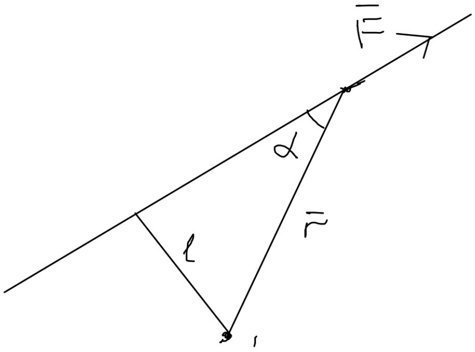
Для знаходження значення швидкості знов можемо застосувати закон збереження енергії (до зіткнення та в момент «х»):

$$
\begin{aligned}
&mgl+\frac{mv^2}{2}=mgH=mgy+\frac{k\Delta l^2}{2}+\frac{mv_{\max}^2}{2}= \\
&=mg(l-\Delta l)+\frac{k}{2}\left(\frac{mg}{k}\right)^2+\frac{mv_{\max}^2}{2}=mg(l-\frac{mg}{k})+\frac{m^2g^2}{2k}+\frac{mv_{\max}^2}{2}= \\
&=mgl-\frac{m^2g^2}{2k}+\frac{mv_{\max}^2}{2}
\end{aligned} \tag{1.5}
$$

Маємо відповідь:

$$
p_{\max}=\sqrt{2m\left(mg(H-l)+\frac{m^2g^2}{2k}\right)} \tag{1.6}
$$

КШФ 4.2.15



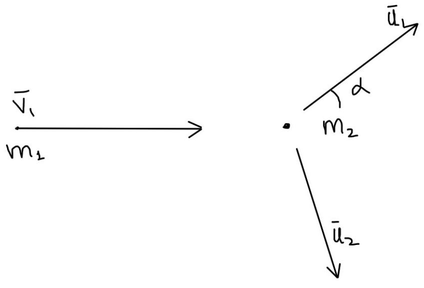
За означенням момент сили:

$$
\begin{aligned}
&\vec{N}=\left[\vec{r}\times\vec{F}\right]=\left[(a\vec{i}+b\vec{j})\times(A\vec{i}+B\vec{j})\right]= \\
&=aB\left[\vec{i}\times\vec{j}\right]+bA[\vec{j}\times\vec{i}\,]=aB\vec{k}-bA\vec{k}
\end{aligned} \tag{1.7}
$$

Плече сили визначається через модуль вектора моменту сили:

$$
\begin{aligned}
&\left|\vec{N}\right|=\left|[\vec{r}\times\vec{F}]\right|=rF\sin\alpha=Fl \\
&l=r\sin\alpha \\
&l=\frac{\left|\vec{N}\right|}{\left|\vec{F}\right|}=\frac{|aB-bA|}{\sqrt{A^2+B^2}}
\end{aligned} \tag{1.8}
$$

КШФ 4.2.13



Під час пружного зіткнення виконується закон збереження енергії:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2} \tag{1.9}$$

Та під час будь якого зіткнення наближено вважаємо що виконується закон збереження імпульсу:

$$m_1 \vec{v}_1 = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2 \tag{1.10}$$

Так як не цікавить який буде вектор швидкості після зіткнення корисно перейти від векторного запису закону збереження імпульсу до скалярного. Для чого піднесемо його до квадрату попередньо виразивши швидкість другої кульки після удару (щоб потім підставити в закон збереження енергії):

$$\begin{aligned} \left(m_1 \vec{v}_1 - m_1 \vec{u}_1\right)^2 &= \left(m_2 \vec{u}_2\right)^2 \\ m_1^2 \left(\vec{v}_1 - \vec{u}_1\right)^2 &= m_2^2 u_2^2 \\ m_1^2 \left(v_1^2 + u_1^2 - 2 v_1 u_1 \cos\alpha\right) &= m_2^2 u_2^2 \end{aligned} \tag{1.11}$$

Виразимо швидкість другої кульки після зіткнення з закону збереження енергії:

$$u_2^2 = \frac{m_1}{m_2}\left(v_1^2 - u_1^2\right) \tag{1.12}$$

Та підставимо у (1.11):

$$\begin{aligned} m_1^2 \left(v_1^2 + u_1^2 - 2 v_1 u_1 \cos\alpha\right) &= m_2^2 \frac{m_1}{m_2}\left(v_1^2 - u_1^2\right) \\ m_1 \left(v_1^2 + u_1^2 - 2 v_1 u_1 \cos\alpha\right) &= m_2 \left(v_1^2 - u_1^2\right) \end{aligned} \tag{1.13}$$

При цьому початкова швидкість фіксована, а швидкість після зіткнення залежіть від кута. Таким чином можемо виразити $\cos\alpha$ як функцію швидкості після зіткнення:

$$\cos\alpha = \frac{m_1(v_1^2 + u_1^2) - m_2(v_1^2 - u_1^2)}{2 m_1 v_1 u_1} \tag{1.14}$$

І тепер можемо шукати екстремум:

$$\begin{aligned} \frac{d\cos\alpha}{du_1} &= \frac{\left(2m_1 u_1 + 2m_2 u_1\right)u_1 - \left(m_1(v_1^2 + u_1^2) - m_2(v_1^2 - u_1^2)\right)}{2 m_1 v_1 u_1^2} = \\ &= \frac{(m_1 + m_2)u_1^2 - (m_1 - m_2)v_1^2}{2 m_1 v_1 u_1^2} = 0 \end{aligned} \tag{1.15}$$

Відповідно при швидкості:

$$u_1 = v_1 \sqrt{\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}} \tag{1.16}$$

Кут досягає екстремуму:

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{m_1(v_1^2 + u_1^2) - m_2(v_1^2 - u_1^2)}{2 m_1 v_1 u_1} = \\ &= \frac{v_1^2(m_1 - m_2) + u_1^2(m_1 + m_2)}{2 m_1 v_1} \frac{1}{u_1} = \\ &= \frac{v_1^2(m_1 - m_2) + v_1^2 \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}(m_1 + m_2)}{2 m_1 v_1} \frac{1}{v_1}\sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1 - m_2}} = \\ &= \frac{2 v_1^2 (m_1 - m_2)}{2 m_1 v_1^2}\sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1 - m_2}} = \frac{\sqrt{m_1^2 - m_2^2}}{m_1} = \sqrt{1 - \frac{m_2^2}{m_1^2}} \end{aligned} \tag{1.17}$$

А відповідно сінус кута:

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{m_2}{m_1} \tag{1.18}$$

КШФ 4.2.14

Момент імпульсу за означенням:

$$\vec{L} = \vec{M} = [\vec{r}\times\vec{p}] = m[\vec{r}\times\vec{v}] \tag{1.19}$$

Якщо тіло рухається по колу то швидкість перпендикулярна до радіуса. Відповідно величина моменту імпульсу:

$$M = mvR \tag{1.20}$$

При цьому напрямок задається як результат векторного добутку, а тому направлений перпендикулярно до площини руху (вздовж z):

$$\vec{M} = mvR\vec{k} \tag{1.21}$$

Момент сил обрахуємо через значення сили яке в свою чергу можна визначити з 2-го закону Ньютона:

$$\begin{gathered}\vec{N} = [\vec{r}\times\vec{F}] \\ \vec{F} = m\vec{a} = m\left(\vec{a}_n + \vec{a}_\tau\right)\end{gathered} \tag{1.22}$$

Враховуючи напрямок компонент прискорення маємо схожий вираз до (1.21):

$$\begin{aligned}&\vec{N} = [\vec{r}\times m(\vec{a}_\tau + \vec{a}_n)] = m[\vec{r}\times\vec{a}_\tau] + m[\vec{r}\times\vec{a}_n] = m[\vec{r}\times\vec{a}_\tau] = \\ &= mRa_\tau\vec{k}\end{aligned} \tag{1.23}$$

Рівняння моментів

$$\vec{N} = \frac{d\vec{L}}{dt} \tag{1.24}$$

Іродов 1.147

Робота сили рівна зміні кінетичної енергії:

$$\begin{gathered}\int_1^2 \vec{F}d\vec{r} = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} \\ \int_1^2 F_x dx + F_y dy = \int_1^2 F_x dx = \int_1^2 F dx = F\int_1^2 dx = F\Delta x = FR\end{gathered} \tag{1.25}$$

Тоді:

$$\begin{gathered}FR = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} \\ v = \sqrt{v_0^2 + \frac{2FR}{m}}\end{gathered} \tag{1.26}$$