Динаміка

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \qquad (1.1)$$

2-й закон Ньютона в імпульсній формі:

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} \qquad (1.2)$$

Для руху системи матеріальних точок:

$$\sum \vec{F}^{(ex)} = M\vec{a}_c \qquad (1.3)$$

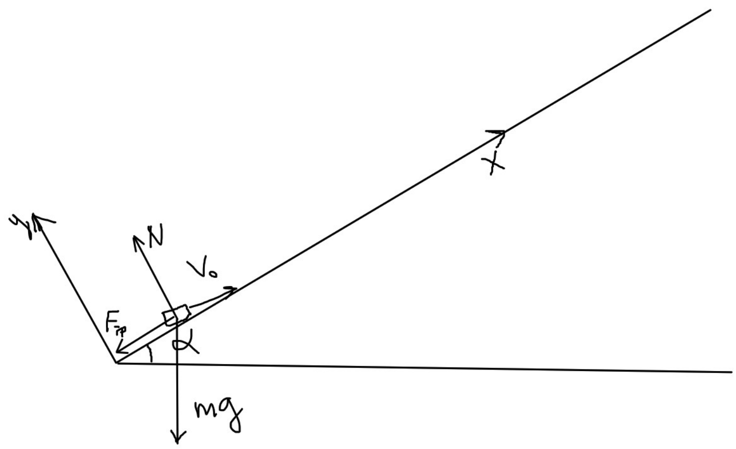
КШФ 3.5

2-й закон Ньютона в векторному вигляді:

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр} = m\vec{a} \qquad (1.4)$$

Проектуємо на напрямок руху та напрямок перпендикулярний до напрямку руху:

$$\begin{aligned} -mg\sin\alpha - F_{тр} &= ma_\tau \\ -mg\cos\alpha + N &= 0 \end{aligned} \qquad (1.5)$$



В той же час при ковзані

$$F_{тр} = kN \qquad (1.6)$$

Тоді виразивши силу реакції опори з проекції на вісь y (1.5), підставляємо у (1.6) та силу тертя підставляємо у проекцію на вісь х (1.5):

$$\begin{aligned} F_{тр} &= kN = kmg\cos\alpha \\ -mg\sin\alpha - kmg\cos\alpha &= m\frac{dv}{dt} \end{aligned} \qquad (1.7)$$

Скоротивши масу можемо виразити прискорення:

$$a = -g(\sin\alpha + k\cos\alpha) \qquad (1.8)$$

Як бачимо прискорення стале, а відповідно можна використовувати «шкільну» формулу рівноприскореного руху:

$$S = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} \qquad (1.9)$$

Якщо тіло буде рухатись до зупинки :

$$S = \frac{-v_0^2}{2a} = \frac{v_0^2}{2g(\sin\alpha + k\cos\alpha)} \qquad (1.10)$$

Найменшу відстань (при умові однаковості початкової швидкості) до зупинки тіло пройде якщо знаменник виразу (1.10) буде максимальний. Максимум виразу шукаємо як екстремум:

$$\frac{d}{d\alpha}\left(\sin\alpha + k\cos\alpha\right) = \cos\alpha - k\sin\alpha = 0$$
$$\tan\alpha = \frac{1}{k} \tag{1.11}$$

Знайшовши значення кута яке відповідає мінімальному шляху який пройде тіло, можемо обрахувати сам шлях:

$$S = \frac{v_0^2}{2g(\sin\alpha + k\cos\alpha)} = \frac{v_0^2}{2g\cos\alpha(\tan\alpha + k)} =$$
$$= \frac{v_0^2\sqrt{1+\tan^2\alpha}}{2g\left(1/k + k\right)} = \frac{v_0^2\sqrt{1+1/k^2}}{2gk\left(1/k^2+1\right)} =$$
$$= \frac{v_0^2}{2kg\sqrt{1+k^{-2}}} = \frac{v_0^2}{2g\sqrt{1+k^2}} \tag{1.12}$$

$$1+\tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

КШФ 3.7

Записуємо 2-й закон Ньютона в проекціях на напрям руху та напрям перпендикулярний до площини:

$$mg\sin\alpha - F_{тр} = ma$$
$$-mg\cos\alpha + N = 0 \tag{1.13}$$

Підставимо значення сили реакції опори в силу тертя:

$$mg\sin\alpha - kmg\cos\alpha = ma \tag{1.14}$$

І після скорочення маси маємо:

$$g\left(\sin\alpha - \gamma x\cos\alpha\right) = \frac{dv}{dt} \tag{1.15}$$

Для того щоб знайти шлях до зупинки, перетворимо рівняння (1.15) на рівняння відносно змінних v(x):

$$g(\sin\alpha - \gamma x\cos\alpha) = \frac{dv}{dt}\frac{dx}{dx} = \frac{dv}{dx}v \tag{1.16}$$

Інтегруємо:

$$\int_0^s g(\sin\alpha - \gamma x\cos\alpha)dx = \int_0^v vdv$$
$$g(s\cdot\sin\alpha - \gamma\frac{s^2}{2}\cos\alpha) = \frac{v^2}{2} \tag{1.17}$$

Якщо хочемо знайти шлях до зупинки:

$$g(s\cdot\sin\alpha - \gamma\frac{s^2}{2}\cos\alpha) = 0$$
$$s = \frac{2}{\gamma}\tan\alpha \tag{1.18}$$

При цьому ми отримали так звану теорему про зміну кінетичної енергії:

$$\int_0^s mg(\sin\alpha - \gamma x\cos\alpha)dx = \int_0^v mvdv$$

$$\int_0^s \left(m\vec{g}d\vec{r} + \vec{F}_{mp}d\vec{r} + \vec{N}d\vec{r} \right) = A = \frac{mv^2}{2}$$

$$\int_0^s \sum \vec{F}d\vec{r} = A = \Delta E_K \quad (1.19)$$

$$-\Delta U = \Delta E_K$$

$$\Delta(U + E_K) = 0$$

КШФ 3.14

Поки гантель не відірвалась від вертикальної стінки вона тисне на неї і верхня кулька рухається по колу. Якщо гантеля повернулась на кут α закон Ньютона для верхньої кульки має вигляд:

$$m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a} \quad (1.20)$$

Візьмемо проекції на напрямок руху (дотичний до кола) та на напрямок перпендикулярний до траєкторії (паралельно гантелі):

$$mg\cos\alpha = ma_\tau$$
$$mg\sin\alpha - T = ma_n = m\frac{v^2}{l} \quad (1.21)$$

Перетворимо першу проекцію (1.21):

$$g\cos\alpha = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{dv}{d\alpha}\omega = -\frac{dv}{d\alpha}\frac{v}{l} \quad (1.22)$$

Проінтегруємо:

$$\int_{\pi/2}^{\alpha} gl\cos\alpha \cdot d\alpha = -\int_0^v vdv$$
$$gl\sin\alpha\Big|_{\pi/2}^{\alpha} = -v^2/2 \quad (1.23)$$
$$mgl(1-\sin\alpha) = mv^2/2$$

В момент відриву маємо T=0, а відповідно друга проекція (1.21) дає:

$$mg\sin\alpha = m\frac{v^2}{l}$$
$$v^2 = gl\sin\alpha \quad (1.24)$$

Поєднуючи це з (1.23) маємо:

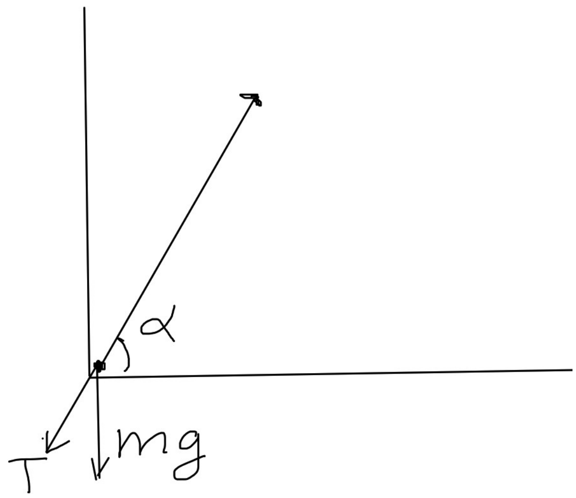
$$2gl(1-\cos\alpha) = gl\sin\alpha \quad (1.25)$$

Визначаємо кут:

$$2(1-\cos\alpha) = \sin\alpha$$
$$2\left(1 - 1 + 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right) = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \quad (1.26)$$
$$4\sin^2\frac{\alpha}{2} = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

Маємо два корені:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = 0$$
$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \quad (1.27)$$



Сила з якою гантеля діє на стінку:

$$F = T\cos\alpha = \left(mg\sin\alpha - m\frac{v^2}{l} \right)\cos\alpha =$$
$$= \left(mg\sin\alpha - m\frac{2gl(1-\sin\alpha)}{l} \right)\cos\alpha = \qquad (1.28)$$
$$= mg\left(3\sin\alpha - 2\right)\cos\alpha$$

Траєкторія тіла при ковзанні по поверхні кулі: