Кінематика обертального руху
Аналогії з поступальним рухом

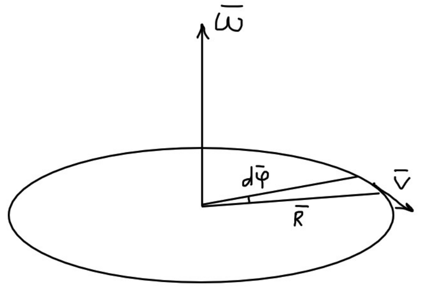
$$\begin{array}{ccc} x & & \varphi \\ v & \leftrightarrow & \omega \\ a & & \beta \end{array} \qquad (1.1)$$

Аналогії продовжуються в динаміці

$$\begin{array}{ccc} p & & L \\ F & \leftrightarrow & N \\ m & & J \end{array} \qquad (1.2)$$

Приклади роботи аналогій:

$$\begin{array}{ccc} \vec{F} = m\dfrac{d\vec{v}}{dt} & & \vec{N} = J\dfrac{d\vec{\omega}}{dt} \\ E_K = \dfrac{mv^2}{2} & \leftrightarrow & E_K = \dfrac{J\omega^2}{2} \\ \vec{p} = m\vec{v} & & \vec{L} = J\vec{\omega} \end{array} \qquad (1.3)$$



Кутова швидкість:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \qquad (1.4)$$

Кутове прискорення:

$$\vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \qquad (1.5)$$

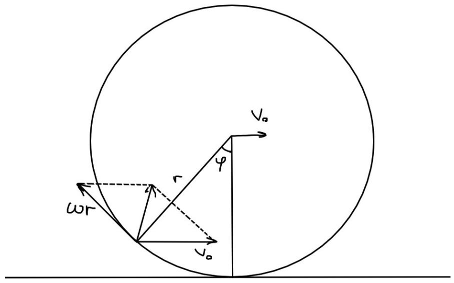
Зв'язок з описом поступального руху:

$$\vec{v} = \left[\vec{\omega} \times \vec{r}\right] \qquad (1.6)$$

$$\vec{a}_\tau = \left[\vec{\beta} \times \vec{r}\right] \qquad (1.7)$$

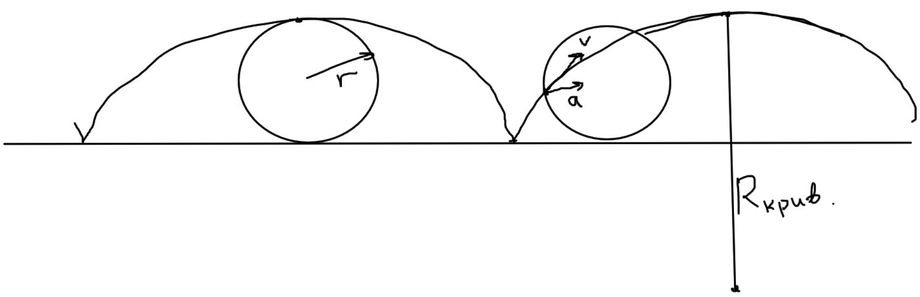
$$a_n = \omega^2 r \qquad (1.8)$$

КШФ 2.9



Для того щоб знайти довжину шляху який проходить точка на ободі використовуємо формулу:

$$S=\int_0^t |\vec{v}|\,dt \qquad (1.9)$$



Як бачимо треба знати модуль швидкості точки, а для цього треба знайти вектор швидкості. Швидкість точки складається з поступальної складової руху як ціле та лінійної швидкості обертання:

$$\vec{v}_A=\vec{v}_0+\vec{\omega}\times\vec{r} \qquad (1.10)$$

При цьому виконується умова не проковзування:

$$v_0=\omega R \qquad (1.11)$$

Відповідно маємо компоненти вектора швидкості:

$$\begin{cases} v_x=v_0-\omega r\cos\varphi \\ v_y=\omega r\sin\varphi \end{cases} \qquad (1.12)$$

При цьому кут повороту за час t при рівномірному русі:

$$\varphi=\omega t \qquad (1.13)$$

Тоді модуль швидкості:

$$\begin{aligned} |\vec{v}| &= \sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{\left(v_0-v_0\cos\omega t\right)^2+v_0^2\sin^2\omega t}=v_0\sqrt{1-2\cos\omega t+\cos^2\omega t+\sin^2\omega t}= \\ &=v_0\sqrt{2-2\cos\omega t}=v_0\sqrt{2}\sqrt{1-\left(1-2\sin^2\frac{\omega t}{2}\right)}=2v_0\left|\sin\frac{\omega t}{2}\right| \end{aligned} \qquad (1.14)$$

Тепер можемо підставити модуль швидкості у (1.9):

$$S=\int_0^t 2v_0\left|\sin\frac{\omega t}{2}\right|dt \qquad (1.15)$$

Якщо треба обрахувати шлях який проходить за один оберт то пройде час рівний періоду обертання:

$$S = \int_0^T 2v_0 \left|\sin\frac{\omega t}{2}\right| dt = \int_0^T 2v_0 \sin\frac{\omega t}{2} dt = -2v_0 \frac{2}{\omega}\left(\cos\frac{\omega t}{2}\right)\Bigg|_0^T =$$

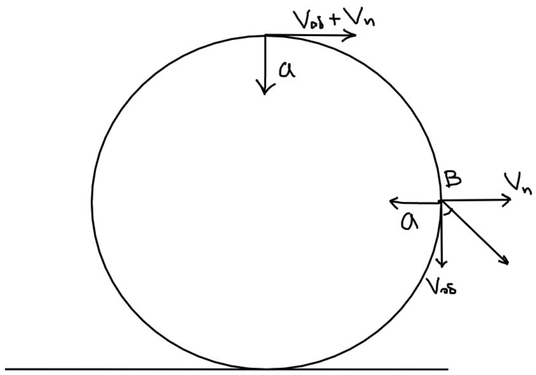
$$= -4\frac{v_0}{\omega}\left(\cos\frac{\omega T}{2} - \cos 0\right) = -4R\left(\cos\pi - 1\right) = 8R \qquad (1.16)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}; \omega T = 2\pi$$

КШФ 2.10

Радіус кривизни можемо визначити за значенням нормального прискорення:

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$
$$R = \frac{v^2}{a_n} \qquad (1.17)$$



В верхній точці A швидкість складає 2v. Повне прискорення весь час складає

$$a = \frac{v_0^2}{r} \qquad (1.18)$$

Тангенціального прискорення у верхній точці не має і значить:

$$a_A = \frac{v_0^2}{r} = a_n = \frac{v^2}{R_A} = \frac{(2v_0)^2}{R_A} \qquad (1.19)$$

Тоді:

$$R_A = 4r \qquad (1.20)$$

В точці B повне прискорення не зміниться, але вже буде присутнє тангенціальне прискорення. При цьому, як можна побачити, швидкість точки направлена під кутом $45°$ до дотичної до кола, а повне прискорення в будь який момент направлено по радіусу кола. Тоді нормальне прискорення (як проекція повного):

$$a_{nB} = a\cos\frac{\pi}{4} = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{v_0^2}{\sqrt{2}r} \qquad (1.21)$$

В той же час швидкість в точці B:

$$v_B = \sqrt{2}v_0 \qquad (1.22)$$

Тоді:

$$a_{nB} = \frac{v_0^2}{\sqrt{2}r} = \frac{v_B^2}{R_B} = \frac{2v_0^2}{R_B}$$
$$R_B = 2\sqrt{2}r \qquad (1.23)$$

КШФ 2.14
Вектор кутової швидкості

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_x + \vec{\omega}_y = \omega_0 \vec{i} + \beta_0 t \cdot \vec{j}$$
$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \beta_0^2 t^2} \qquad (1.24)$$

Кутове прискорення:

$$\vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d\left(\omega_0 \vec{i} + \beta_0 t \cdot \vec{j}\right)}{dt} = \omega_0 \frac{d\vec{i}}{dt} + \beta_0 \cdot \vec{j} = \omega_0 \left[\vec{\Omega}_y \times \vec{i}\right] + \beta_0 \vec{j} =$$
$$= \omega_0 \left[\beta_0 t \cdot \vec{j} \times \vec{i}\right] + \beta_0 \vec{j} = -\omega_0 \beta_0 t \cdot \vec{k} + \beta_0 \vec{j}$$
$$\beta = \beta_0 \sqrt{\omega_0^2 t^2 + 1} \qquad (1.25)$$
$$\frac{d\left|\vec{A}\right|}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{A}}{dt} = \left[\vec{\Omega} \times \vec{A}\right]$$

Іродов 1.50
За умовою кутова швидкість:

$$\omega = \omega_0 - a\varphi \qquad (1.26)$$

За означенням:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \qquad (1.27)$$

Маємо:

$$\omega_0 - a\varphi = \frac{d\varphi}{dt} \qquad (1.28)$$

Розділимо змінні:

$$\int_0^t dt = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\omega_0 - a\varphi} \qquad (1.29)$$

Інтегруємо:

$$t = \frac{-1}{a} \ln(\omega_0 - a\varphi)\Big|_0^\varphi = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{\omega_0}{\omega_0 - a\varphi} \qquad (1.30)$$

Виразимо кут через час:

$$e^{at} = \frac{\omega_0}{\omega_0 - a\varphi}$$
$$\omega_0 - a\varphi = \omega_0 e^{-at} \qquad (1.31)$$
$$\varphi = \frac{\omega_0}{a}\left(1 - e^{-at}\right)$$

Щоб знайти залежність швидкості від часу можемо або підставити (1.31) у (1.26) або взяти похідну від (1.31):

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{dt}\left(-\frac{\omega_0}{a} e^{-at}\right) = \omega_0 e^{-at} \qquad (1.32)$$