Теоретичні відомості
Радіус вектор точки

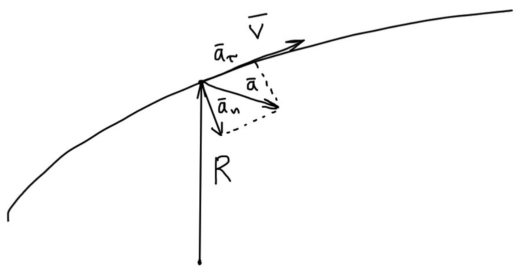
$$\vec{R} = (x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \tag{1.1}$$

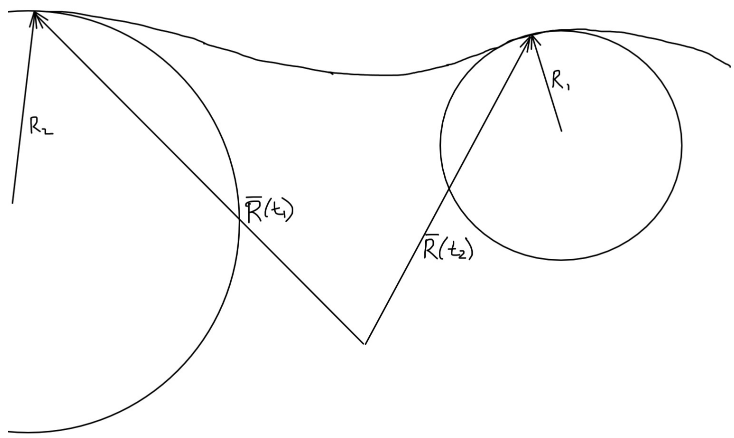
Швидкість

$$\vec{v} = \frac{d\vec{R}}{dt} = (v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) \tag{1.2}$$

Прискорення

$$\begin{gathered}\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n = a_\tau\vec{\tau} + a_n\vec{n} = \frac{dv}{dt}\frac{\vec{v}}{v} + \frac{v^2}{R}\vec{n} \\ \left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right| \neq \frac{d|\vec{v}|}{dt}\end{gathered} \tag{1.3}$$





КШФ 1.7

Проекція прискорення на вектор швидкості:

$$a_\tau = a\cos\varphi \tag{1.4}$$

Cos можемо виразити через скалярний добуток:

$$a_\tau = a\cos\varphi\frac{v}{v} = \frac{(\vec{a}\vec{v})}{v} \tag{1.5}$$

Проекція має бути направлена вздовж вектора швидкості тому домножимо на одиничний вектор в потрібному напрямку:

$$\vec{a}_\tau = a_\tau\vec{\tau} = \frac{(\vec{a}\vec{v})}{v}\frac{\vec{v}}{v} = \frac{(\vec{a}\vec{v})\vec{v}}{v^2} \tag{1.6}$$

Якщо від всього вектору прискорення віднімемо складову $\vec{a}_\tau$, то те що залишиться буде перпендикулярно до швидкості тобто буде рівне нормальному прискоренню:

$$\vec{a}_n = \vec{a} - \vec{a}_\tau = \vec{a} - \frac{(\vec{a}\vec{v})\vec{v}}{v^2} \tag{1.7}$$

КШФ 1.5

Рівняння траекторії – явний запис параметричної функції:

$$\begin{cases} x(t) = \alpha t \\ y(t) = \beta t^2 \end{cases} \tag{1.8}$$

Виражаємо з однієї функції параметр та підставляємо у другу:

$$t = \sqrt{\frac{y}{\beta}}$$

$$x = \alpha \sqrt{\frac{y}{\beta}} \tag{1.9}$$

$$y = \beta \frac{x^2}{\alpha^2}$$

б) вектор швидкості – похідна від радіус вектора:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\alpha t, \beta t^2\right) = \left(\alpha, 2\beta t\right) \tag{1.10}$$

Модуль вектора:

$$\begin{gathered} |\vec{v}| = \sqrt{v^2} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\alpha^2 + 4\beta^2 t^2} \\ \left|\vec{a} + \vec{b}\right| = \sqrt{(\vec{a} + \vec{b})^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + 2\vec{a}\vec{b}} \end{gathered} \tag{1.11}$$

Прискорення:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\alpha, 2\beta t\right) = \left(0, 2\beta\right) \tag{1.12}$$

Модуль прискорення:

$$a = 2\beta \tag{1.13}$$

В) кут між вектора знаходимо за допомогою скалярного добутку:

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{a}\vec{v})}{a \cdot v} = \frac{a_x v_x + a_y v_y}{a \cdot v} = \frac{\alpha \cdot 0 + 2\beta t \cdot 2\beta}{\sqrt{\alpha^2 + 4\beta^2 t^2} \cdot 2\beta} = \frac{2\beta t}{\sqrt{\alpha^2 + 4\beta^2 t^2}} \tag{1.14}$$

З іншого боку кут між вектором швидкості та прискоренням це те саме що кут між тангенціальним прискоренням та повним. Враховуючи що тангенціальне та нормальне це дві перпендикулярні складові повного:

$$\tan\varphi = \frac{a_n}{a_\tau} = \frac{v^2 / R}{dv / dt} \tag{1.15}$$

1.25 Иродов

Шлях можемо знайти за формулою:

$$S = \int |\vec{v}| dt$$
$$|\vec{v}| = \frac{ds}{dt} \tag{1.16}$$

Щоб знайти модуль швидкості спочатку знайдемо вектор швидкості:

$$\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt}; \frac{dy}{dt} \right) = \left(A\omega \cos \omega t; A\omega \sin \omega t \right) \tag{1.17}$$

Тоді модуль:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{A^2\omega^2 \cos^2 \omega t + A^2\omega^2 \sin^2 \omega t} = A\omega\sqrt{\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t} = A\omega \tag{1.18}$$

Бачимо що відбувається рух зі сталою за модулем швидкістю, а відповідно тангенціальне прискорення рівне нулю. Обраховуємо шлях:

$$S = A\omega t \tag{1.19}$$

Якщо не має тангенціального прискорення то є тільки нормальне яке направлено перпендикулярно до швидкості. Перевіримо – спочатку знайдемо вектор прискорення:

$$\vec{a} = \left(-A\omega^2 \sin \omega t; A\omega^2 \cos \omega t \right) \tag{1.20}$$

І знайдемо cos кута між векторами:

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{a}\vec{v})}{a \cdot v} = \frac{a_x v_x + a_y v_y}{a \cdot v} = \frac{-A\omega^2 \sin \omega t \cdot A\omega \cos \omega t + A\omega^2 \cos \omega t \cdot A\omega \sin \omega t}{a \cdot v} =$$
$$= \frac{A^2\omega^3 \left(-\sin \omega t \cdot \cos \omega t + \cos \omega t \cdot \sin \omega t \right)}{a \cdot v} = 0 \tag{1.21}$$

Іродов 1.23

За умовою прискорення дорівнює:

$$a = \alpha\sqrt{v} = \frac{dv}{dt}\frac{ds}{ds} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds}v \tag{1.22}$$

З іншого боку за означенням:

$$a = \frac{dv}{dt} \tag{1.23}$$

Маємо рівняння

$$\alpha\sqrt{v} = \frac{dv}{dt} \tag{1.24}$$

Розв’язуючі це рівняння ми отримаємо залежність швидкості від часу, але нам потрібна залежність шляху від швидкості. Щоб отримати рівняння з подібною залежністю до множимо та поділимо праву частину на диференціал шляху та використаємо означення швидкості

$$a = \alpha\sqrt{v} = \frac{dv}{dt}\frac{ds}{ds} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds}v \tag{1.25}$$

Таким чином новий вигляд рівняння:

$$\alpha\sqrt{v} = \frac{dv}{ds}v \tag{1.26}$$

Розділяємо змінні та інтегруємо

$$\int_0^s \alpha ds = \int_{v_0}^0 \sqrt{v} dv$$
$$\alpha s = -\frac{2}{3}v_0^{3/2} \tag{1.27}$$