Електростатика

Закон Кулона та напруженість електростатичного поля....1
Гомонай, Кравцов. Електродинаміка №12....1
Іродов 2.10....2
Гомонай, Кравцов. Електродинаміка №49....3
Гомонай, Кравцов. Електродинаміка №52....4
Гомонай, Кравцов Електродинаміка №61....5

Закон Кулона та напруженість електростатичного поля

$$\vec{F} = k\frac{Qq}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r} \tag{1.1}$$

Напруженість електричного поля

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \tag{1.2}$$

Напруженість електричного поля точкового заряду:

$$\vec{E} = k\frac{Q}{r^3}\vec{r} \tag{1.3}$$

Напруженість електричного поля розподілених зарядів:

$$\begin{aligned} &\vec{E} = \int d\vec{E} = \int k\frac{dq}{r^3}\vec{r} \\ &dq = \lambda dl \\ &dq = \sigma ds \\ &dq = \rho dV \end{aligned} \tag{1.4}$$

Гомонай, Кравцов. Електродинаміка №12

Рівняння динаміки:

$$F = Eq = (E_0 - \varepsilon x)q = m\frac{dv}{dt} \tag{1.5}$$

Зробимо заміну змінної:

$$\begin{aligned} &E_0 - \varepsilon x = -\varepsilon x' \\ &x' = x - \frac{E_0}{\varepsilon} \end{aligned} \tag{1.6}$$

Тоді рівняння набуде вигляду:

$$-\varepsilon x' q = m\frac{d^2x'}{dt^2} \tag{1.7}$$

Маємо рівняння гармонічних коливань:

$$\frac{d^2x'}{dt^2} + \frac{\varepsilon q}{m}x' = 0 \tag{1.8}$$

Але якщо нас цікавить залежність швидкості від координати тоді можна (1.5) домножити на dx обидві частини рівності та про інтегрувати:

$$\begin{aligned} &\int (E_0 - \varepsilon x)q dx = \int m\frac{dv}{dt}dx = \int mv dv \\ &qE_0 x - \frac{\varepsilon x^2}{2}q = \frac{mv^2}{2} \end{aligned} \tag{1.9}$$

Зупинка задається умовою $v = 0$:

$$E_0 x_0 - \frac{\varepsilon x_0^2}{2} = 0$$
$$x_0 = \frac{2E_0}{\varepsilon} \tag{1.10}$$

Релятивістський випадок. Якщо кінцева швидкість досить велика маємо використовувати релятивістські формули:

$$Eq = (E_0 - \varepsilon x)q = \frac{d}{dt}\frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = m\frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}\frac{dv}{dt} \tag{1.11}$$

(Тут ми використали результат задачі КШФ 11.2.5)
В цьому випадку рівняння не буде зводитись до гармонічних коливань але прийом з домноженням на dx все одно працює:

$$\int (E_0 - \varepsilon x)q dx = \int m\frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}\frac{dv}{dt}dx = \int m\frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} v dv \tag{1.12}$$

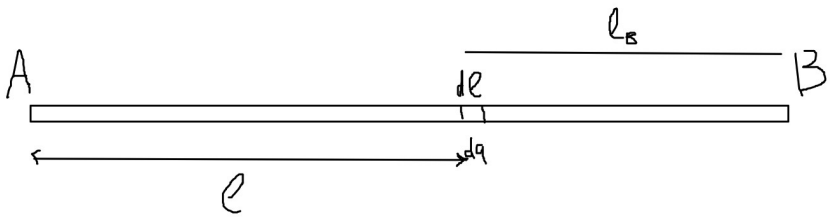
Але тут вже щоб про інтегрувати праву частину треба зробити заміну змінної

$$1 - v^2/c^2 = \alpha$$
$$-2vdv/c^2 = d\alpha \tag{1.13}$$
$$vdv = -c^2 d\alpha/2$$

Тоді (1.12) дає:

$$E_0 x - \frac{\varepsilon x^2}{2} = -\frac{mc^2}{2}\int \alpha^{-3/2} d\alpha = mc^2\frac{1}{\sqrt{\alpha}} = mc^2 \left.\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right|_0^v =$$
$$= mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1\right) \tag{1.14}$$

Іродов 2.10



Розіб'ємо стержень на невеликі шматочки довжиною dl, кожен з яких має заряд dq. Якщо кожен такий кусочок знаходиться на відстані l від кінця стержня то створить напруженість:

$$dE = k\frac{dq}{r^2} = k\frac{\lambda dl}{l^2} \tag{1.15}$$

Лінійна густина заряду:

$$\lambda = \frac{dq}{dl} = C \cdot l^2 \tag{1.16}$$

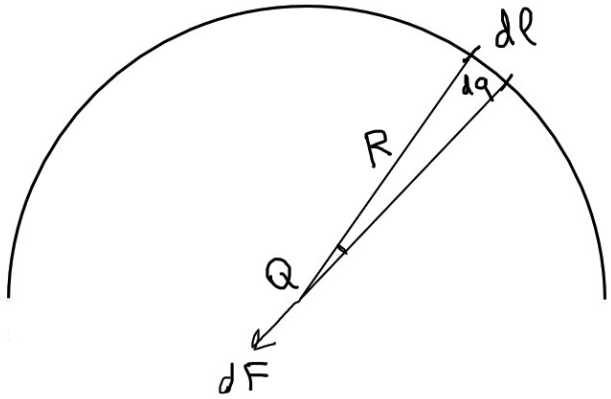
Тоді повний заряд:

$$q = \int \lambda dl = \int C \cdot l^2 dl = C \cdot L^3 / 3$$
$$C = 3q / L^3 \tag{1.17}$$

Можемо знайти загальну напруженість:

$$E_A = \int_0^L k \frac{\lambda dl}{l^2} = k \int_0^L \frac{C \cdot l^2 dl}{l^2} = kC \int_0^L dl = kCL = \frac{3kq}{L^2} \tag{1.18}$$

Гомонай, Кравцов. Електродинаміка №49

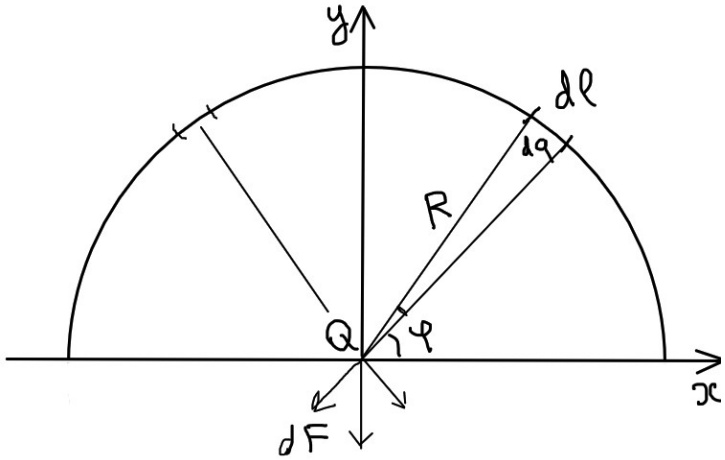


Розіб'ємо кільце на маленькі кусочки достатньо малі, щоб їх можна було вважати точковими зарядами з величиною:

$$dq = \lambda dl$$
$$\lambda = \frac{q}{\pi R} \tag{1.19}$$

Тоді ці заряди будуть створювати напруженість:

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \int k \frac{dq}{r^3} \vec{r} \tag{1.20}$$



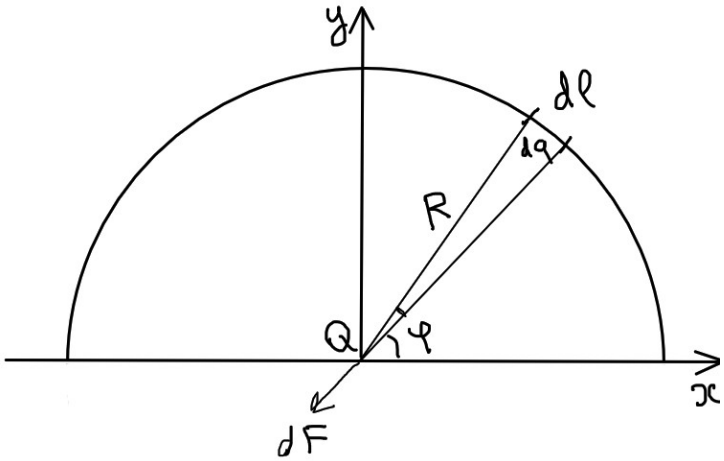
З міркувань симетрії розуміємо що повна сила яка діє заряд з боку кільця буде направлена вниз і відповідно нам треба взяти проекцію на вісь *y*:

$$E = E_y = \int k \frac{dq}{r^3} r_y = \frac{k}{R^3} \int dq \cdot y \tag{1.21}$$

Підставляючи (1.19) у (1.21) маємо:

$$E_y = \frac{k}{R^3}\int \lambda dl \cdot y \qquad (1.22)$$

Перейдемо до полярної системи координат

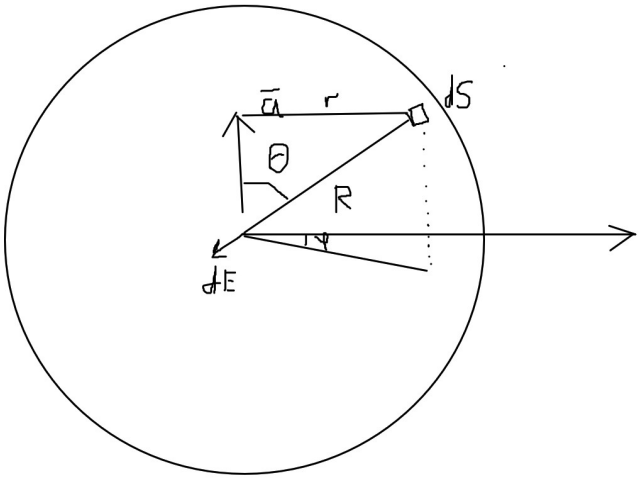


Відрізок $dl = Rd\varphi$, а координата $y = R\sin\varphi$, тоді:

$$E_y = \frac{k\lambda}{R^3}\int_0^{\pi} Rd\varphi \cdot R\sin\varphi = \frac{k\lambda}{R}\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi =$$
$$= -\frac{k\lambda}{R}\cos\varphi\Big|_0^{\pi} = \frac{k\lambda}{R}\left(1-(-1)\right) = \frac{2k\lambda}{R} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R} = \frac{q}{2\pi^2\varepsilon_0 R^2} \qquad (1.23)$$

Гомонай, Кравцов. Електродинаміка №52

$$dS = dl_\theta \cdot dl_\varphi =$$
$$= Rd\theta \cdot r \cdot d\varphi = Rd\theta \cdot R\sin\theta d\varphi$$



Розіб'ємо поверхню сфери на малі елементи площі dS і будемо обраховувати суму напруженостей від всіх зарядів:

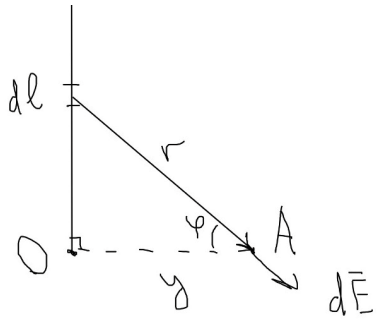
$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \int k\frac{dq}{r^3}\vec{r} = \int k\frac{\sigma ds}{r^3}\vec{r} = \int k\frac{(\vec{a}\vec{r})ds}{r^3}\vec{r} \tag{1.24}$$
$$(\vec{a}\vec{r}) = ar\cos\alpha = ar\cos\theta$$

Будемо шукати проекцію напруженості на вісь z:

$$E_z = \int k\frac{(\vec{a}\vec{r})ds}{r^3}r_z = \int k\frac{(aR\cos\theta)ds}{r^3}z =$$
$$= \frac{ka}{R^2}\iint \cos^2\theta R\cdot R^2\sin\theta d\theta d\varphi = kaR2\pi\int\cos^2\theta\sin\theta d\theta = \tag{1.25}$$
$$= -2\pi kaR\int\cos^2\theta\cdot d(\cos\theta) = -2\pi kaR\cdot\frac{\cos^3\theta}{3}\bigg|_0^\pi = \frac{4\pi kaR}{3} = \frac{aR}{3\varepsilon_0}$$

$$E_x = \int k\frac{(\vec{a}\vec{r})ds}{r^3}r_x = \int k\frac{(aR\cos\theta)ds}{r^3}x =$$
$$= \frac{ka}{R^2}\iint\cos\theta R\cdot R^2\sin^2\theta d\theta d\varphi\cos\varphi = \tag{1.26}$$
$$= kaR2\pi\int\cos\theta\sin^2\theta d\theta\cdot\sin\varphi\big|_0^{2\pi} = 0$$

Гомонай, Кравцов Електродинаміка №61



Напруженість:

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \int k\frac{dq}{r^3}\vec{r} \tag{1.27}$$

Беремо проекції:

$$E_x = \int k\frac{dq}{r^3}x = \int k\frac{\lambda dx}{r^3}x = \int k\frac{\lambda dx}{(x^2+y^2)^{3/2}}x =$$
$$= k\lambda\int_0^\infty\frac{xdx}{(x^2+y^2)^{3/2}} = k\lambda\int_0^\infty\frac{dx^2/2}{(t)^{3/2}} = k\lambda\int_{y^2}^\infty\frac{dt/2}{(t)^{3/2}} = \tag{1.28}$$
$$= -k\lambda\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\bigg|_0^\infty = -\frac{k\lambda}{y}$$

$$E_y = -\int k\frac{dq}{r^3}y = -\int k\frac{\lambda dx}{r^3}y = -\int k\frac{\lambda dx}{(x^2+y^2)^{3/2}}y \tag{1.29}$$

Розпишемо E_y через полярну систему координат:

$$r = \frac{y}{\cos\varphi} \tag{1.30}$$

$$\frac{x}{y} = \tan\varphi$$

$$x = y\tan\varphi \tag{1.31}$$

$$dx = d(y\tan\varphi) = y\frac{1}{\cos^2\varphi}d\varphi$$

Підставляємо (1.30), (1.31) у (1.29):

$$E_y = k\lambda y\int_0^{\pi/2}\frac{yd\varphi}{\cos^2\varphi}\frac{1}{y^3}\cos^3\varphi = k\lambda\frac{y^2}{y^3}\int_0^{\pi/2}\cos\varphi\cdot d\varphi =$$

$$= k\lambda\frac{y^2}{y^3}\sin\varphi\Big|_0^{\pi/2} = \frac{k\lambda}{y} \tag{1.32}$$

Для повністю нескінченної нитки:

$$E_y = \frac{2k\lambda}{y} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 y} \tag{1.33}$$