

# Лекция 2

## I. Основные свойства ядерных сил

Хотя природа ядерных сил до сих пор до конца неизвестна, однако на основании опытных данных о ядрах и их взаимодействиях с другими ядрами, а также с протонами, нейтронами и нейтронами, можно понять основные особенности этих сил. Как мы увидим, эти особенности настолько отличают эти силы от уже хорошо нам известных электромагнитных взаимодействий, что с уверенностью можно утверждать, что взаимодействия удерживающие нуклоны в ядре представляют собой принципиально новый тип взаимодействий, который не встречается в макромире. Кроме того ясно, что полностью понять природу этих взаимодействий удастся только тогда, когда мы сможем полностью понять природу внутренней структуры самих нуклонов.

Сформулируем основные особенности ядерных сил.

Прежде всего ядерные силы имеют *короткодействующий характер*. На расстояниях порядка 1 ферми они на несколько порядков превышают действие кулоновских сил. (Отсюда другое название этих взаимодействий — *сильные взаимодействия*.) На больших расстояниях между нуклонами сильные взаимодействия начинают экспоненциально убывать с увеличением расстоянием. Поэтому уже на расстояниях порядка размера атома ими можно полностью пренебречь. Короткодействующий характер сильных взаимодействий был, в частности, установлена по изучению рассеяния протонов на протонах и ядрах. В свою очередь из теории электричества и магнетизма мы знаем, что кулоновские силы имеют дальнедействующий характер, т.е. убывают с увеличением расстояния между зарядами обратно пропорционально расстоянию между ними.

Второе свойство ядерных сил состоит в том, что они не зависят от электрического заряда взаимодействующих нуклонов. Это свойство называют *зарядовой независимостью* ядерных сил. Оно было установлено на основании анализа свойств так называемых *зеркальных ядер*. Два ядра называют зеркальными, если они получаются друг из друга заменой протонов на нейтроны и наоборот. Примерами зеркальных ядер могут быть  ${}^3_1\text{H}$  и  ${}^3_2\text{He}$ ,  ${}^7_3\text{Li}$  и  ${}^7_4\text{Be}$ . Если из их энергии связи вычесть вклад кулоновского отталкивания между протонами (это можно сделать на основании теоретического расчета), то оставшаяся энергия будет отличаться только за счет разности масс протона и нейтрона. Как показывает опыт такие соотношения выполняются с точностью порядка 0,1%. Кроме того, свойство зарядовой независимости сильных взаимодействий подтверждается из сравнения сечений рассеяния протонов на протонах и нейтронов на протонах.

Третьей особенностью ядерных сил является их свойство насыщения, что следует из анализа энергий связи ядер. Оказалось, что *средняя энергия связи* в ядре, т.е. энергия связи отнесенная к массовому числу

$$\varepsilon = \frac{\Delta W}{A} \quad (1)$$

почти постоянна и равна приблизительно 8 МэВ. Это может быть возможным только если допустить, что нуклон может взаимодействовать только с группой своих ближайших соседей. В противном случае энергия связи была бы пропорциональна  $A(A-1) \approx A^2$ .

Четвертая особенность ядерных сил состоит в том, что они *нецентральные*. Выше мы уже говорили, что в уже в простейшей ядерной системе, дейтроне, потенциал удерживающий нуклоны содержит центральный и тензорный потенциалы. Наличие тензорного потенциала взаимодействия двух нуклонов также подтверждается анализом зависимости сечения взаимодействия между нуклонами от взаимориентации их спинов.

## II. Капельная модель ядра

Многие факты говорят о том, что ядерная материя практически несжимаема и имеет постоянную концентрацию нуклонов

$$n \approx 10^{38} \text{ н/см}^3 = 10^{-1} \text{ н/фм}^3 \quad (2)$$

и плотность

$$\rho \approx 10^{16} \text{ г/см}^3. \quad (3)$$

Кроме того выше уже говорилось, что радиус ядра пропорционален числу нуклонов в ядре. Это свойство, а также свойство насыщения ядерных сил, позволяют рассматривать ядерное вещество как жидкость. При этом само ядро можно считать жидкой каплей, которая от обычной капли отличается только тем, что в ней содержится значительно меньшее число частиц. В свою очередь, эта аналогия позволяет получать полуэмпирическую формулу зависимости энергии связи в ядре от атомного и массового чисел. Такая формула была впервые получена немецким физиком К.Ф. Вайцзекером в 1935 г.:

$$\Delta W(A, Z) = \varepsilon A - \alpha A^{\frac{2}{3}} - \beta Z^2 A^{-\frac{1}{3}} - \gamma \frac{(\frac{A}{2} - Z)^2}{A} + \delta(A, Z), \quad (4)$$

где коэффициенты  $\varepsilon$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  подбираются из опыта и равны (в МэВ)

$$\varepsilon = 14,03, \quad \alpha = 13,03, \quad \beta = 0,5835, \quad \gamma = 77,25. \quad (5)$$

Последнее слагаемое в (4) зависит от четности атомного номера  $A$  и массового числа  $Z$

$$\delta(A, Z) = \begin{cases} \delta A^{-\frac{3}{4}} & \text{для четных } A \text{ и } Z \\ 0 & \text{если } A \text{ нечетно} \\ -\delta A^{-\frac{3}{4}} & \text{для четного } A \text{ и нечетного } Z \end{cases} \quad (6)$$

где  $\delta = 33,57$  МэВ.

Обсудим смысл каждого из членов формулы Вайцекера.

**Первый член.** Он определяет главный вклад в энергию связи рассматривая все нуклоны ядра, как равноправные частицы, каждая из которых имеет энергию связи  $\epsilon$ .

**Второй член** представляет собой энергию поверхностного натяжения капли и тем самым учитывает, что нуклоны, находящиеся возле поверхности ядра, притягиваются только с внутренней стороны капли. Этот член очевидно должен уменьшать энергию связи и быть пропорциональным поверхности ядра, которая, в свою очередь, пропорциональна  $A^{\frac{2}{3}}$ .

**Третий член** учитывает кулоновское отталкивание между протонами ядра. Отсюда следует, что он должен уменьшать энергию связи. В связи с тем, что кулоновское взаимодействие имеет бесконечный радиус действия, для него не будет насыщения и протон испытывает отталкивание оставшихся  $Z - 1$  протонов. Таким образом этот член должен быть пропорционален  $Z^2$  и обратно пропорционален среднему расстоянию между протонами  $\bar{r} \sim A^{\frac{1}{3}}$ . Коэффициент  $\beta$  при этом члене может быть оценен в предположении равномерного распределения заряда в ядре имеющего сферическую форму и радиус  $R_{\text{яд}}$ .

$$\beta = \frac{3}{5} \cdot \frac{q_0^2}{r_0}, \quad (7)$$

где  $r_0$  определено формулой (10.17).

**Четвертый член** связан с эффективным учетом принципа Паули в ядре. Этот член, также как и пятый, не имеет отношения к представлению о ядре как капле, тем не менее для успешного описания энергий связи эти члены должны быть внесены в формулу Вейцекера. В силу принципа Паули нуклоны, являясь частицами со спином  $\frac{1}{2}$ , испытывают дополнительное притяжение, если они не тождественны. С другой стороны, если они тождественны, они должны испытывать дополнительное отталкивание. Следовательно наиболее энергетически выгодной системой является система, состоящая из равного числа протонов и нейтронов:

$$Z = N = \frac{A}{2}. \quad (8)$$

Эта тенденция хорошо прослеживается на последовательности легчайших ядер:

- He —  $Z = 2, N = 2$

- Li —  $Z = 3, N = 4$

- Be —  $Z = 4, N = 5$

- B —  $Z = 5, N = 6$

- C —  $Z = 6, N = 6$

- N —  $Z = 7, N = 7$

- O —  $Z = 8, N = 8$  и т.д.

Как видим для всех этих ядер наблюдается тенденция к соотношению (8).

**Пятый член** отражает закономерность зависимости свойств ядер от четности протонов и нейтронов. Действительно, если число протонов (или нейтронов) четно, то все их спины взаимнокомпенсированы и в такой системе должна быть наибольшая энергия связи. Поэтому чётно-чётные ядра являются максимально стабильными, а чётно-нечётные менее стабильным. Что касается нечётно-нечётных ядер, то они наименее стабильны. Например, известно только четыре стабильных нечётно-нечётных ядра:  ${}^2_1\text{H}$ ,  ${}^6_3\text{Li}$ ,  ${}^{10}_5\text{Be}$  и  ${}^{14}_7\text{N}$ !

### III. Модель ядерных оболочек

#### А. Магические ядра

Капельная модель дает приблизительно правильное представление об изменении массы ядра в зависимости от числа содержащихся в нем нуклонов. Модель также правильно описывает и ряд других свойств ядер.

Однако модель содержит и ряд принципиальных трудностей. Так уже говорилось, что четвертый и пятый члены формулы Вайцекера, которые описывают резкие изменения энергии связи ядра в зависимости от соотношения протонов и нейтронов, невозможно объяснить в рамках представления о ядре, как жидкой капле. Еще более наглядно недостатки модели обнаруживаются при детальном анализе таких свойств ядер, как спины, магнитные и квадрупольные моменты и т.д. Обнаружено, что если число протонов и (или) нейтронов равно 2, 8, 20, 28, 50, 82 или  $126^1$ , то их свойства резко меняются. Эти числа называют *магическими числами*, а соответствующие ядра *магическими ядрами*. Особую роль играют *дважды магические ядра*, т.е. ядра у которых и число протонов, и число нейтронов являются магическими. К ним относятся  ${}^4_2\text{He}$ ,  ${}^{16}_8\text{O}$ ,  ${}^{40}_{20}\text{Ca}$ ,  ${}^{208}_{82}\text{Pb}$ . С одной стороны, эти ядра являются наиболее устойчивыми. С другой стороны у них как спины, так и магнитные моменты равны нулю.

<sup>1</sup> Последнее число относится только к нейтронам.

## В. Обоснование оболочечной модели

Итак налицо имеет место периодичность в свойствах ядер, которая во многом напоминает периодический закон изменения свойств атомов. Последний, как мы знаем, хорошо объясняется на основании представления об оболочечной структуре атомов. Поэтому естественно попытаться применить подобные представления и к структуре ядра.

Впервые идея об оболочечной структуре ядра появилась еще в 30-е годы, однако только в 1949 г. М. Гешперт-Майер и независимо от нее О. Хаксел, Дж. Йенес и Х. Сьюисс сумели в рамках таких представлений описать появившиеся к тому времени многочисленные экспериментальные факты по спинам и магнитным моментам ядер.

Однако прежде чем перейти к детальному изложению *оболочечной модели ядра* обсудим ее обоснование. С этой целью сначала напомним основные положения, на которых основывается оболочечная модель атома, и посмотрим как они выглядят при применении их к ядрам. Таких три:

- наличие силового центра, т. е. положительно заряженного ядра, задающего сферическую-симметрию самосогласованного поля, в котором движутся электроны;
- пренебрежение столкновением между отдельными электронами;
- принцип Паули.

Очевидно, что из этих трех положений для ядра выполняется только третье. Поэтому на первый взгляд кажется бессмысленным говорить об оболочечной структуре ядра. Тем не менее более внимательное рассмотрение показывает, что это не так. Обсудим это на примере сферически-симметричных ядер.

Уже говорилось, что в ядре плотность нуклонов почти постоянна по всему объему ядра и составляет величину  $\rho \approx 10^{-1}$  фм<sup>-3</sup>. Таким образом получается, что расстояние между нуклонами составляет  $d \sim \rho^{-\frac{1}{3}} \approx 2,2$  фм. Это расстояние как раз и составляет приблизительно радиус действия ядерных сил между отдельными нуклонами. Таким образом потенциалы, действующие между отдельными нуклонами, взаимно перекрываются и таким образом получается, что отдельный нуклон движется в суммарном (эффективном) внешнем потенциале. Очевидно, что этот потенциал должен сохранять симметрию ядра и, таким образом, для сферических ядер он должен быть сферически-симметричным  $V(r)$ , где  $r$  — расстояние ядра от центра масс ядра. Этот потенциал должен быть приблизительно постоянным внутри ядра и спасть до нуля в поверхностном слое. Такое поведение хорошо согласуется с поведением распределения электрического заряда, полученного из анализа данных по



Рис. 1: М. Гешперт-Майер.



Рис. 2: Дж. Йенсен.

рассеянию высокоэнергетических электронов на ядрах (см. Лекцию 10). Следовательно для нуклона движущегося в таком потенциале орбитальный момент является сохраняющейся величиной.

Из полученной выше оценки для расстояния между нуклонами в ядре легко получить среднюю длину свободного пробега нуклона в ядре

$$l \approx d - 2r_N, \quad (9)$$

где  $r_N$  — размер нуклона. В качестве последнего можно взять среднеквадратичный радиус протона

$$r_N \approx \sqrt{\langle r_p^2 \rangle} \approx 0,8 \text{ фм}. \quad (10)$$

Откуда получаем, что длина свободного пробега в ядре меньше размера нуклона

$$l \approx \frac{1}{2}r_N. \quad (11)$$

С классической точки зрения кажется, что этот результат полностью исключает какое-либо упорядоченное движение нуклонов в ядре. Однако учет принципа Паули коренным образом меняет картины.

С точки зрения представления эффективном ядерном потенциале нуклон в ядре совершает квантовомеханическое движение находясь в различных квантовых состояниях. При этом основному состоянию соответствует такое состояние, где заполнены все нижайшие уровни. Это, в свою очередь, исключает столкновение отдельных нуклонов. Действительно, в результате столкновения энергия двух нуклонов перераспределяется и один из них ее теряет, а другой приобретает. Следовательно один из нуклонов должен перейти в более низкое энергетическое состояние. А это запрещено принципом Паули. Таким образом средняя длина пробега нуклона в ядре должна быть намного больше наивной классической оценка (11).

## С. Одночастичные уровни в ядре

Рассмотрим уровни для трехмерного сферически-симметричного потенциала гармонического осцилля-

тора

$$V_c(r) = -V_0 + \frac{m_N \omega^2}{2} r^2. \quad (12)$$

Конечно реальный потенциал должен иметь несколько иную форму, например плоской ямы со сглаженными краями (Рис. III С). Потенциал (12) можно рассматривать как удобную аппроксимацию реального потенциала, для которой можно провести все расчеты аналитически.

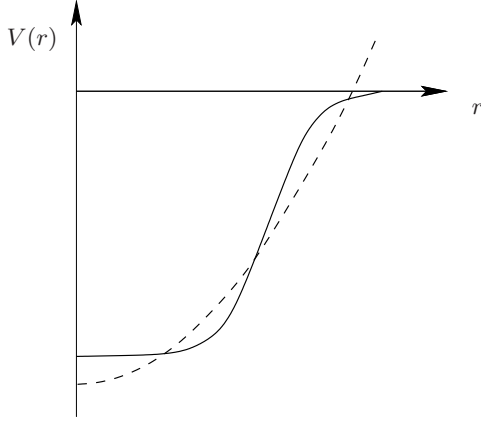


Рис. 3: Эффективный потенциал для нуклона в ядре. Непрерывная кривая — потенциальная яма со сглаженными краями и пунктир — приближение гармонического осциллятора.

Энергетический спектр для трехмерного гармонического осциллятора имеет вид (см. Приложение)

$$E = \hbar \omega \left( 2n + l - \frac{1}{2} \right), \quad (13)$$

где  $l$  — орбитальное квантовое число, а  $n$  — число узлов у радиальной волновой функции. В связи с тем, что радиальная волновая функция должна удовлетворять граничному условию  $R_{nl}(r=0) = 0$ , квантовое число  $n = 1, 2, \dots$ . Таким образом спектр получается эквидистантным и вырожденным, с одним значением энергии для одинаковых значений  $2n + l$  (Таблица I).

Видно, что полное число протонов или нейтронов  $\sum N$  для оболочек I, II и III отвечают правильному значению магических чисел. Далее правильная последовательность их заполнения нарушается. Выбор другого потенциала (например потенциала конечной потенциальной ямы, ямы со сглаженными краями и т.д.) снимает вырождение. Тем не менее путем подбора эффективного потенциала не удастся правильно описать магические числа.

Как показали М. Гепперт–Майер и О. Хаксел, Дж. Йенсен и Х. Сьюисс для того, чтобы описать последовательность магических чисел наблюдающихся на эксперименте необходимо учесть спин–орбитальное взаимодействие нуклонов в ядре

$$V_{ls} = -\hat{l} \hat{s} V_{ls}(r). \quad (14)$$

Этот потенциал не может быть сведен к тензорному потенциалу, который мы обсудим выше. Действительно, тензорный потенциал не коммутирует с оператором квадрата орбитального момента  $\hat{l}^2$  и поэтому он перемешивает состояния с разными  $l$ . В свою очередь легко угадать, что оператор  $\hat{l} \hat{s}$  коммутирует с  $\hat{l}^2$  и  $\hat{s}^2$ . Таким образом получается, что квантовые состояния нуклона находящегося в самосогласованном поле  $V = V_c + V_{ls}$  будут собственными состояниями операторов  $\hat{l}^2$  и  $\hat{s}^2$  и поэтому их можно характеризовать определенными значениями  $l$  и  $s$ . Однако проекции соответствующих моментов  $l_z$  и  $s_z$  уже не будут интегралами движения и мы должны рассматривать новые квантовые числа — полный момент  $j$  и его проекцию  $j_z$ . Очевидно, что если на ядро не действует внешнее магнитное поле, то энергия будет вырождена по  $j_z$  и можно энергетические уровни характеризовать квантовыми числами  $n$ ,  $l$ ,  $s$  и  $j$ . Мы сохраним те же спектроскопические обозначения, которые использовались в атомной физике  $^{2s+1}nl_j$ , однако ввиду того, что  $s = \frac{1}{2}$  фиксировано, будем опускать мультиплетность  $2s + 1$ .

Каждому значению  $l \neq 0$  соответствуют два значения  $j$ :

$$j = l \pm \frac{1}{2}. \quad (15)$$

Для  $s$  состояний  $j = \frac{1}{2}$ .

Перепишем спин–орбитальный потенциал в виде

$$V_{ls} = -\frac{1}{2} \left( \hat{j}^2 - \hat{l}^2 - \frac{3}{4} \right) V_{ls}(r) \quad (16)$$

и вместо операторов квадратов соответствующих моментов подставим их собственные значения. При  $l > 0$

Таблица I: Уровни энергии для гармонического осциллятора. В квадратных скобках указано число состояний в данной конфигурации с учетом спина ( $2l(2l+1)$ ),  $N$  — число состояний с данной энергией.

оболочка состояний		$N$	$\sum N$	$E$
I	1s[2]	2	2	$\frac{3}{2}\hbar$
II	1p[6]	6	8	$\frac{5}{2}\hbar$
III	2s[2], 1d[10]	12	20	$\frac{7}{2}\hbar$
IV	2p[6], 1f[14]	20	40	$\frac{9}{2}\hbar$
V	3s[2], 2d[10], 1g[18]	30	70	$\frac{11}{2}\hbar$
VI	3p[6], 2f[14], 1h[22]	42	112	$\frac{13}{2}\hbar$

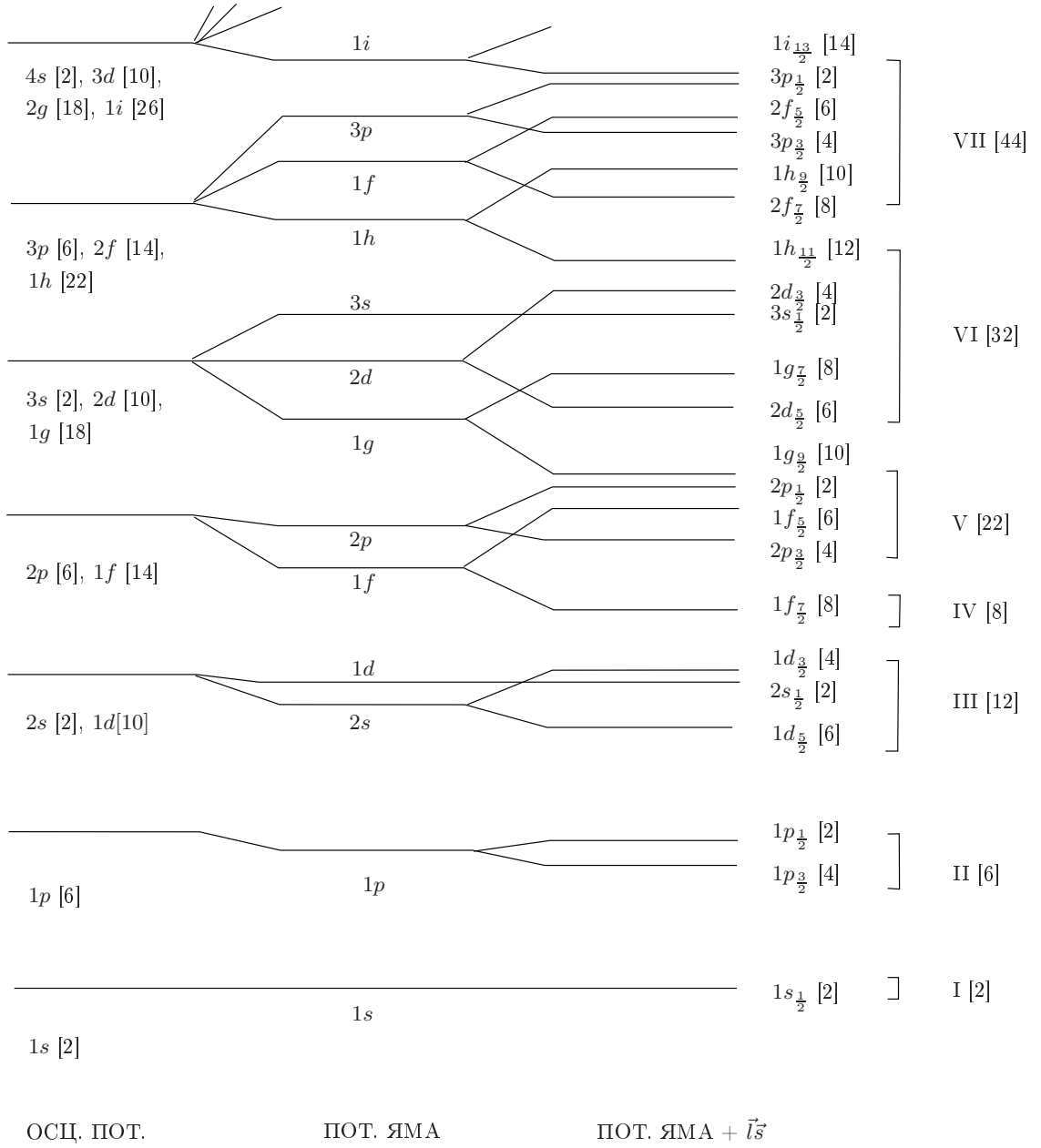


Рис. 4: Схематическое расположение энергетических уровней нейтронов в ядре. Левая и центральная колонки соответствуют осциляторному потенциалу и потенциалу прямоугольной ямы с конечной глубиной. Правая колонка показывает расположение уровней с учетом спин-орбитального взаимодействия.

получим

$$\begin{aligned}
 V_{ls} &\rightarrow -\frac{\hbar^2}{2} [j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)] V_{ls}(r) = \\
 &= \begin{cases} -\frac{\hbar^2 l}{2} V_{ls}, & j = l + \frac{1}{2} \\ +\frac{\hbar^2 (l+1)}{2} V_{ls}, & j = l - \frac{1}{2} \end{cases} \quad (17)
 \end{aligned}$$

Для  $s$ -состояний спин-орбитальное взаимодействие исключается.

Как следует из (17) спин-орбитальное взаимодействие приводит к дополнительному притяжению для

состояний с  $j = l + \frac{1}{2}$  и к отталкиванию при  $j = l - \frac{1}{2}$  (если потенциал  $V_{ls}(r)$  положителен) и, следовательно, уровни с одинаковыми  $n$  и  $l \neq 0$  расщепляются. Величина расщепления увеличивается с ростом орбитального момента пропорционально  $2l + 1$ . Поэтому для малых  $l$  спин-орбитальное взаимодействие оказывается малосущественным и принципиальным образом не меняет картины для оболочек I-III.

Однако для больших орбитальных моментов  $l \geq 3$  спин-орбитальное взаимодействие становится порядка и более энергетического интервала между оболоч-

ками и поэтому приводит к перепутыванию соответствующих уровней. Так уровень  $1f_{7/2}$  сильно смещается вниз и образует оболочку V (см. Рис. 4). Это приводит к магическому числу 28. Следующее магическое число, 50, получается вследствие опускания  $1g_{9/2}$  уровня, которое совместно с уровнями  $2p_{3/2}$ ,  $1f_{5/2}$  и  $2p_{1/2}$  образуют оболочку V. Заполнение следующих оболочек, VI и VII, очевидно из Рис. 4.

Строго говоря схема заполнения уровней зависит от явного вида потенциала  $V_{ls}(r)$ . К сожалению задача его получение из первопринципов далека до полного решения. Поэтому как правило этот потенциал подбирают феноменологическим образом, чтобы правильно описать структуру уровней наблюдающуюся на эксперименте. Приведенная на Рис. 4. схема заполнения соответствует схеме заполнения нейтронов. Для протонов с  $Z > 50$  наблюдается несколько иное заполнение уровней внутри одной оболочки. Так нижайший уровень в оболочке VI будет  $1g_{7/2}$ . Затем идут  $2d_{5/2}$ ,  $2d_{3/2}$ ,  $3s_{1/2}$  и  $1h_{11/2}$ . При этом, конечно, полное число состояний в оболочке не меняется и, следовательно, магические числа для протонов оказываются теми же, что и для нейтронов.

#### IV. Спин и магнитные моменты ядер в модели оболочек

Крупнейшим успехом модели оболочек несомненно явилось объяснение магических чисел. Однако эта модель позволила получить и другие важные результаты. Так она дала правильное описание квантовых чисел  $I^P$  основного состояния нечётных ядер. А именно в этой модели спин ядра определяется полным моментом последнего нескомпенсированого (“валентного”) нуклона

$$I = j, \quad (18)$$

а четность определяется его орбитальным моментом

$$P = (-1)^l. \quad (19)$$

Все значения этих квантовых чисел даваемых моделью оболочек находятся в блестящем согласии с экспериментом.

Что касается магнитных моментов нечётных ядер, то здесь успехи модели более скромные. Тем не менее и в этом случае она позволяет получить качественно правильную оценку.

##### А. Магнитные моменты. Линии Шмидта

Опыт показывает, что для чётно-чётных ядер в основном состоянии спин и магнитный момент равны нулю. Поэтому можно предположить, что для ядер с нечётным  $A$  спин и магнитный момент определяются

валентным нуклоном. Такая модель была предложена в 1934 г. Т. Шмидтом. Согласно этой модели операторы спина и магнитного момента нечётного ядра имеют вид

$$\hat{I} = \hat{L} + \hat{s}, \quad \hat{\mu} = \hat{\mu}_L + \hat{\mu}_s = g_L \hat{L} + g_s \hat{s}, \quad (20)$$

где  $\hat{L}$  и  $\hat{s}$  — операторы орбитального момента и спина валентного нуклона, а  $g_L$  и  $g_s$  — гиромагнитные отношения

$$g_L = \begin{cases} \frac{q_0}{2M_{pc}} & \text{для протона} \\ 0 & \text{для нейтрона} \end{cases} \quad (21)$$

$$g_s = \begin{cases} 2 \frac{\mu_p}{\mu_{яд.м.}} \times \frac{q_0}{2M_{pc}} & \text{для протона} \\ 2 \frac{\mu_n}{\mu_{яд.м.}} \times \frac{q_0}{2M_{pc}} & \text{для нейтрона} \end{cases} \quad (22)$$

где  $\mu_p = 2,7928\mu_{яд.м.}$  и  $-1,9131\mu_{яд.м.}$ .

Дальнейшие рассуждения весьма схожи с рассуждениями по поводу магнитного момента атома. А именно, магнитный момент ядра, помещенного во внешнее магнитное поле, будет прецессировать вокруг направления задаваемого спином ядра  $\hat{I}$ . Тогда среднее значение магнитного момента усредненного вдоль направления спина ядра можно записать

$$\hat{\mu}_{\text{сред.}} = g \hat{I} = g_L \hat{L} + g_s \hat{s}, \quad (23)$$

где  $g$  — гиромагнитное отношение для ядра. Скалярно умножая правую и левую части этого равенства на  $\hat{I}$  и учитывая, что

$$\hat{I}\hat{L} = \frac{1}{2} (\hat{I}^2 + \hat{L}^2 - \hat{s}^2), \quad \hat{I}\hat{s} = \frac{1}{2} (\hat{I}^2 - \hat{L}^2 + \hat{s}^2) \quad (24)$$

получим для гиромагнитного отношения  $g$  (заменяя соответствующие операторы их собственными значениями)

$$g = \frac{1}{2I(I+1)} \{g_L [I(I+1) + l(l+1) - s(s+1)] + g_s [I(I+1) - l(l+1) + s(s+1)]\} \quad (25)$$

По определению магнитным моментом называют отношение

$$\mu = \frac{\delta E_{\text{макс.}}}{B}, \quad (26)$$

где  $\delta E = I_3 g B$  — энергия взаимодействия магнитного момента ядра с магнитным полем,  $I_3$  — проекция спина ядра на направление поля  $B$ . Ввиду того, что максимальное значение  $I_3$  равно  $I$

$$\mu = \frac{1}{2(I+1)} \{g_L [I(I+1) + l(l+1) - s(s+1)] + g_s [I(I+1) - l(l+1) + s(s+1)]\} \quad (27)$$

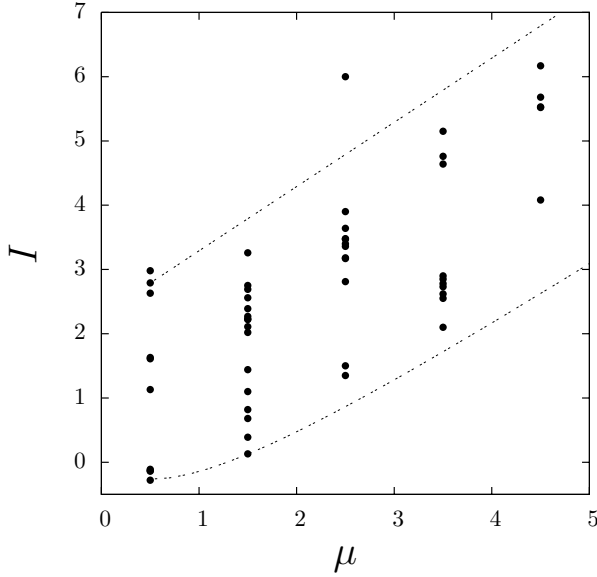


Рис. 5: Магнитные моменты для нечётно-четных ядер. Непрерывными кривыми показаны линии Шмидта.

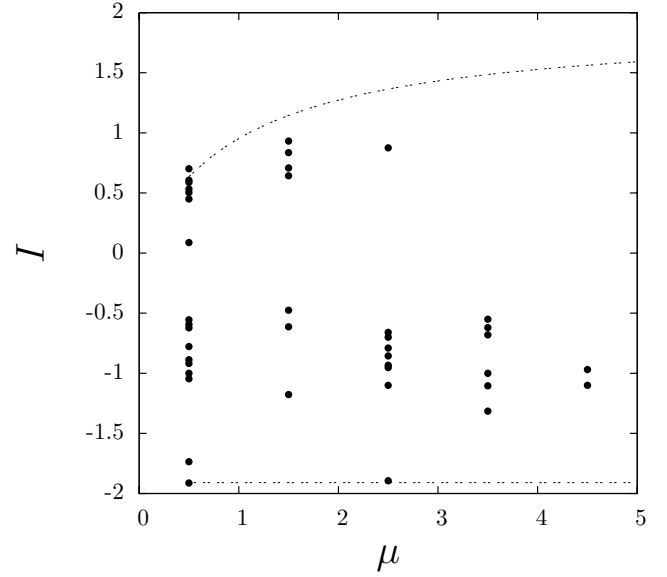


Рис. 6: Магнитные моменты для четно-нечётно ядер. Непрерывными кривыми показаны линии Шмидта.

или учитывая (21), (22) и то, что  $s = \frac{1}{2}$ , получим окончательно:

для протона

$$\mu = \begin{cases} (I - \frac{1}{2}) \mu_{\text{яд.}} + \mu_p, & I = l + \frac{1}{2} \\ \frac{I}{I+1} (I + \frac{3}{2}) \mu_{\text{яд.}} - \frac{I}{I+1} \mu_p, & I = l - \frac{1}{2} \end{cases} \quad (28)$$

для нейтрона

$$\mu = \begin{cases} \mu_n, & I = l + \frac{1}{2} \\ -\frac{I}{I+1} \mu_n, & I = l - \frac{1}{2} \end{cases} \quad (29)$$

Таким образом в оболочечной модели получается, что магнитные моменты нечётно-четных ядер (валентным нуклоном является протон) и четно-нечётных ядер (валентным нуклоном является нейтрон) должны лежать на кривых (28) и (29). Эти зависимости называют *линиями Шмидта*.

На Рис. 5 и Рис. 6 показаны линии Шмидта вместе с экспериментальными данными. Видно, что практически для всех ядер в основном состоянии значение магнитных моментов лежат не на линиях Шмидта, а между ними. Тем не менее очевидно, что все нечётные ядра распадаются на два класса (с нечётным  $Z$  или  $N$ ), у которых зависимость магнитного момента от спина различна, причем основная тенденция у каждого из них правильно передается такой моделью.

## V. Радиоактивный распад ядер

### A. Общие сведения о радиоактивных ядрах

Ряд ядер обладает свойством спонтанно превращаться в другие ядра с испусканием частиц. Это свойство называют *радиоактивностью*, а ядра обладающие этим свойством *радиоактивными ядрами*. Наиболее важными примерами радиоактивных переходов ядер являются переходы с испусканием  $\alpha$ -частиц ( $\alpha$ -распад), различные виды  $\beta$ -распада (переходы с участием электрона или позитрона),  $\gamma$ -распад (переходы с испусканием  $\gamma$ -лучей), *спонтанное деление тяжелых ядер*, испускание запаздывающих нейтронов и протонов.

Уже в первых опытах по изучению радиоактивности ядер проведенных Резерфордом было выяснено, что в процессе радиоактивного распада активность ядер уменьшается. Это связано с убыванием числа радиоактивных ядер  $N$  в веществе со временем  $t$ . Такое убывание имеет экспоненциальный характер

$$N(t) = N_0 2^{-t/T}, \quad (30)$$

где  $N_0$  — число ядер в начальный момент времени. Из (30) следует, что за время  $t = T$  число радиоактивных ядер в веществе уменьшится в два раза. Величину  $T$  называют *периодом полураспада ядра*.

Период полураспада меняется для различных ядер меняется в очень широком пределе: от  $\sim 10^{-7}$  сек. до  $10^{15}$  лет.

## В. Законы радиоактивного распада

Теперь рассмотрим изменение вероятности радиоактивного распада вещества со временем. Очевидно стоит считать, что вероятность распада данного ядра не зависит от времени. В этом случае число распадов радиоактивного вещества  $dN$  за бесконечно малый интервал времени  $dt$  пропорционально количеству вещества  $N$  и интервалу времени  $dt$

$$dN = -\lambda N dt, \quad (31)$$

где коэффициент  $\lambda$  представляет вероятность распада одного ядра за время  $dt$ . Этот коэффициент называют *постоянной распада*. Знак минус в правой части формулы (31) указывает на то, что число радиоактивных распадов уменьшается со временем. Величина обратная постоянной распада имеет смысл времени жизни радиоактивного ядра

$$\tau = \lambda^{-1}. \quad (32)$$

Решение уравнения (31) имеет вид

$$N = N_0 \exp(-\lambda t), \quad (33)$$

где постоянная интегрирования  $N_0$  имеет простой физический смысл — это число распадов в начальный момент времени. Сравним эту формулу с выражением (30):

$$N = N_0 2^{-\lambda \ln \frac{1}{2} t}. \quad (34)$$

Вводя период полураспада согласно  $T = \frac{1}{\ln 2}$  получим из (34) формулу (30).

Теперь посмотрим как следует описывать процесс распада, если в результате распада ядер типа  $A_1$  образуются другие радиоактивные ядра типа  $A_2$ . В этом случае следует написать систему двух уравнений

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = -\lambda N_1 \\ \frac{dN_2}{dt} = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2 \end{cases} \quad (35)$$

Смысл первого из этих уравнений такой же как и уравнения (31): оно описывает уменьшение числа распадов за счет уменьшения числа  $N_1$  ядер типа  $A_1$ . С другой стороны число  $N_2$  ядер типа  $A_2$  определяется двумя факторами. С одной стороны их число увеличивается за счет распада ядер  $N_1$ , а с другой — уменьшается за счет их собственного распада. При этом каждый распад ядра  $A_1$  сопровождается рождением ядра  $A_2$ . Следовательно число рожденных ядер  $dN_2$  за время  $dt$  равняется  $\lambda N_1$ . Это и есть первое слагаемое в правой части второго уравнения системы (35). Второе слагаемое, очевидно, представляет число распавшихся ядер типа  $A_2$  за время  $dt$ .

Система (35) должна быть дополнена начальными условиями  $N_1(t=0) = N_{10}$  и  $N_2(t=0) = N_{20}$ , где

$N_{10}$  и  $N_{20}$  — число ядер первого и второго типов в начальный момент времени. Первое уравнение имеет решение

$$N_1(t) = N_{10} \exp(-\lambda_1 t), \quad (36)$$

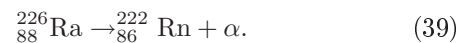
а решение второго можно искать в виде суммы двух экспоненциально убывающих слагаемых  $\alpha_1 \exp(-\lambda_1 t) + \alpha_2 \exp(-\lambda_2 t)$ . В результате имеем

$$N_2(t) = N_{20} \exp(-\lambda_2 t) + \frac{\lambda_1 N_{10}}{\lambda_2 - \lambda_1} [e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}]. \quad (37)$$

Пусть в начальный момент времени вещество состоит только из первичных ядер  $A_1$ , т.е.  $N_{20} = 0$ . Тогда число дочерних ядер в момент времени  $t$  будет

$$N_2(t) = \frac{\lambda_1 N_{10}}{\lambda_2 - \lambda_1} [e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}]. \quad (38)$$

Эту зависимость можно, в частности, использовать, чтобы определить период полураспада долгоживущих ядер, если в процессе их распада рождаются ядра с небольшим периодом полураспада. Примером такого ядра может служить радий  $\text{Ra}$ . Для него период полураспада составляет  $T_{\text{Ra}} \approx 1600$  лет. Распад происходит по каналу



В свою очередь период полураспада радона составляет  $T_{\text{Rn}} \approx 3,8$  дня. Таким образом имеем  $T_1 \gg T_2$  и уравнения (36) и (38) упрощаются

$$\begin{aligned} N_1(t) &\approx N_{10}, \\ N_2(t) &\approx \frac{\lambda_1}{\lambda_2} N_{10} [1 - e^{-\lambda_2 t}]. \end{aligned} \quad (40)$$

Отсюда следует, что при  $t \gg T_2$  имеет место *секулярное равновесие*, т.е. такое соотношение концентраций первичных и дочерних ядер, при котором число распадов первичных ядер  $A_1$  равно числу распадов вторичных ядер  $A_2$ :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_1 N_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_2 N_2(t). \quad (41)$$

Отсюда если известны  $N_1$ ,  $N_2$  и  $T_2$  можно легко найти  $T_1$ .

## С. Радиоактивные ряды

Очень часто продукты распада сами бывают радиоактивными. В результате образуется цепочка распадов различных радиоактивных ядер. Цепочки таких ядер называют *радиоактивными рядами* или *радиоактивными семействами*. Ряд начинается с родоначальника, которым является ядро с наибольшим периодом полураспада, и заканчивается стабильным ядром. Обычно ряды называют по имени своего родоначальника.



В настоящее время известны четыре радиоактивных ряда: ряд тория, ряд урана, ряд актиноурана и ряд нептуния. Первые три ряда имеют своими родоначальниками элементы встречающиеся в природе. Последний начинается изотопом, который получается искусственно.

- Ряд тория: начинается — ядром  ${}_{90}^{232}\text{Th}$ , заканчивается — изотопом свинца  ${}_{82}^{208}\text{Pb}$ .
- Ряд урана: начинается — ядром  ${}_{92}^{238}\text{U}$ , заканчивается — изотопом свинца  ${}_{82}^{206}\text{Pb}$ .
- Ряд актиноурана: начинается — ядром  ${}_{92}^{235}\text{U}$ , заканчивается — изотопом свинца  ${}_{82}^{207}\text{Pb}$ .
- Ряд нептуния: начинается — ядром  ${}_{93}^{237}\text{Np}$ , заканчивается — изотопом свинца  ${}_{82}^{209}\text{Pb}$ .

При перемещении вдоль каждой из цепочек массовые числа и заряды нуклеидов меняются в соответствии с определенными закономерностями открытыми в 1913 г. Фаянсом и Содди. Эти закономерности, называемые *правилами смещения*, состоят в том, что массовые числа при перемещениях внутри каждого из радиоактивных семейств либо меняются на 4, либо не меняются; при этом в первом случае заряд нуклеида уменьшается на два, а во втором — заряд меняется на  $\pm 1$ .

Правила смещения находят простое объяснение, если учесть, что радиоактивные превращения происходят за счет  $\alpha$ - и  $\beta$ -распадов. В случае  $\alpha$ -распада излучается  $\alpha$ -частица, которая состоит из двух протонов и двух нейтронов. Таким образом ядро теряет массовое число 4 и заряд 2. В случае  $\beta$ -распада излучается электрон или позитрон и, следовательно, массовое число не меняется, а уносится заряд  $\pm 1$ .

На основании правил смещения легко сделать вывод, что в каждом из радиоактивных семейств массовые числа подчиняются следующей закономерности

$$A = 4n + C, \quad (42)$$

где целое число  $C$  постоянно для каждого из рядов, а целое число  $n$  может меняться. Поэтому часто ряды называют в соответствии с этой закономерностью: ряд тория — ряд  $4n$ , ряд нептуния — ряд  $4n + 1$ , ряд урана — ряд  $4n + 2$  и ряд актиноурана — ряд  $4n + 3$ .

## VI. $\beta$ -распад

### А. Три типа $\beta$ -распада

В процессе  $\beta$ -распада происходит самопроизвольное превращение ядер с изменением заряда на  $\Delta Z = \pm 1$ . При этом следует различать три типа  $\beta$ -распада:

- $\beta^-$ -распад, т.е. распад с испусканием электрона и изменением заряда ядра на  $\Delta Z = 1$ . В результате этого типа распада один из нейтронов ядра

превращается в протон с испусканием электрона. Такой тип распада возможен, когда выполняется условие

$$M(A, Z) > M(A, Z + 1) + m_e, \quad (43)$$

где  $M(A, Z)$  и  $M(A, Z + 1)$  — массы ядер, а  $m_e$  — масса электрона.

- $\beta^+$ -распад, т.е. распад с испусканием позитрона и изменением заряда ядра на  $\Delta Z = -1$ . При этом один из протонов ядра превращается в нейтрон с испусканием позитрона. Энергетическое условие для  $\beta^+$ -распада есть

$$M(A, Z) > M(A, Z - 1) + m_e. \quad (44)$$

- $K$ -захват (употребляется также термин *электронный захват* или сокращенно  $e$ -захват), процесс, в котором ядро захватывает электрон с атомной оболочки. Обычно этот процесс сопровождается испусканием рентгеновских лучей, которые образуются при перестройке атомных оболочек вследствие  $e$ -захвата. Именно обнаружение такого сопровождающего излучения и послужило открытию этого типа  $\beta$ -распада.

Примером  $\beta^-$ -распада могут служить реакции распада нейтрона (с образованием протона и электрона) и трития  ${}^3_1\text{H}$  (с образованием  ${}^3_2\text{He}$  и электрона). Распад ядер углерода  ${}^{11}_6\text{C}$  с образованием бора  ${}^{11}_5\text{B}$  и позитрона является характерным представителем  $\beta^+$ -распада. Процесс  $K$ -захвата иллюстрирует процесс захвата электрона на  $K$ -оболочке ядром бериллия  ${}^7_4\text{Be}$  с образованием лития  ${}^7_3\text{Li}$ .

### В. Анализ законов сохранения энергии и момента количества движения при $\beta$ -распаде

Как показывает опыт характерной особенностью  $\beta$ -распада является энергетический спектр образовавшихся электронов или позитронов. Он является непрерывным, т.е. энергия электрона (позитрона) меняется непрерывным образом от нуля до максимального значения  $T_{\text{макс}}$ . (Рис. VIВ). В свою очередь из законов сохранения энергии и импульса для ядер и электрона (позитрона) следует, что он должен быть непрерывным. Действительно допустим, что начальное ядро  $A_1$  покоится. Тогда на основании закона сохранения импульса заключаем, что

$$\vec{p}_e = \vec{p}_{A_2} \equiv \vec{p}. \quad (45)$$

Далее, закон сохранения энергии дает

$$m_{A_1}c^2 = \sqrt{m_e^2c^4 + c^4p^2} + \sqrt{m_{A_2}^2c^4 + c^2p^2}, \quad (46)$$

что дает одно значение для  $|\vec{p}|$  и, следовательно, дискретное значение кинетической энергии вылетевшего

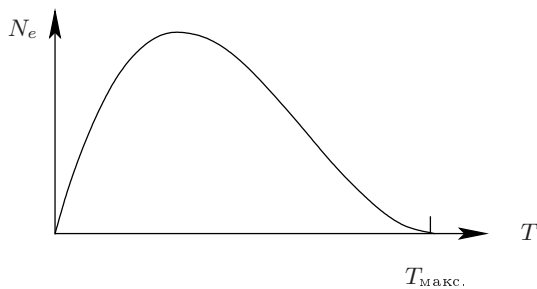
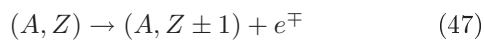


Рис. 7: Энергетический спектр электронов в  $\beta$ -распаде. По вертикальной оси отложена вероятность вылета электрона.

электрона. Таким образом существование такого спектра находится в противоречии с законами сохранения энергии—импульса.

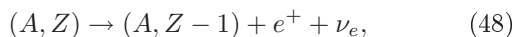
Кроме того, само существование распада



находится в противоречии с законом сохранения момента количества движения. Рассмотрим разность спинов начального и конечного ядер. Как известно спин ядра представляет собой сумму спинов отдельных нуклонов и их орбитальных моментов. В связи с тем, что суммарное число нуклонов ядра в начальном и конечном состоянии одинаково, то разность спинов ядер может быть только целая (в единицах  $\hbar$ ). В свою очередь спин электрона (позитрона) полуцелый. Таким образом получаем, что разность полных моментов количества движения в правой и левой частях реакции (47) будет полуцелой, т.е. момента количества движения не сохраняется.

### С. Нейтрино. Закон сохранения лептонного заряда

Как показал в 1931 г. В. Паули вышеназванные проблемы могут быть легко разрешены, если допустить, что в процессе  $\beta$ -распада помимо электрона (позитрона) принимает участие еще одна частица. По предложению Э. Ферми эта частица была названа *нейтрино*, что означает в переводе с итальянского “маленький нейтральный”. Таким образом реакция  $\beta^+$ -распада будет

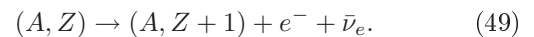


где  $\nu_e$  обозначает нейтрино. Позже в курсе элементарных частиц станет ясно, почему мы употребляем индекс  $e$  у нейтрино в этой и других формулах.

Очевидно, что для того, чтобы выполнялся закон сохранения момента количества движения, следует

допустить, чтобы спин нейтрино равнялся  $\frac{1}{2}\hbar$ . Электрический заряд нейтрино, как следует из закона сохранения электрического заряда для реакции (48), должен равняться нулю. Магнитный момент нейтрино тоже должен быть очень мал. Кроме того, на основании анализа эксперимента можно сделать вывод, что масса нейтрино должна быть равна или очень близка к нулю. В свою очередь, если масса нейтрино равна нулю, то нейтрино, наподобии фотона, не может находиться в покое и всегда движется со скоростью света.

Теперь обратимся к  $\beta^-$ -распаду. Известно, что каждая частица имеет свою античастицу, которая имеет абсолютно ту же массу и спин, но имеет противоположный заряд. Так античастицей электрона является позитрон. Оказывается и электрически нейтральные частицы имеют свои античастицы. Так нейтрон имеет своей античастицей антинейтрон  $\bar{n}$ . Соответственно можно считать, что и нейтрино имеет свою античастицу — антинейтрино. Последнее будем обозначать  $\bar{\nu}_e$ . Если это так, то следует допустить, что  $\beta^-$ -распад будет сопровождать антинейтрино

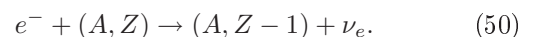


Обе эти реакции можно объединить, если ввести дополнительную характеристику (новый “заряд”, который принято называть *лептонным зарядом* или *лептонным числом*) и постулировать его сохранение. Далее лептонный заряд будем обозначать буквой  $L_e$ . А именно, договоримся, что лептонный заряд электрона равен  $L_e = 1$ . Лептонный заряд нуклонов будем считать равным нулю. Тогда для выполнения закона сохранения лептонного заряда в реакции (49) необходимо положить, что лептонный заряд антинейтрино равен  $L_e = -1$ .

Как и электрический заряд, лептонный заряд античастицы должен иметь противоположный знак, по отношению к заряду частицы. Отсюда заключаем, что лептонный заряд у позитрона равен  $L_e = -1$ , а у нейтрино  $L_e = 1$ .

Частицы обладающие лептонным зарядом  $L_e = 1$  называют *лептонами*. Это греческое слово означает “легкий”. Соответственно частицы обладающие лептонным зарядом  $L_e = -1$  называют *антилептонами*. В курсе элементарных частиц мы узнаем, что помимо  $e^-$  и  $\bar{\nu}_e$  существуют другие лептоны.

На основании закона сохранения лептонного заряда теперь легко написать реакцию  $K$ -захвата



Можно считать, что закон сохранения лептонного числа (как и закон сохранения электрического заряда) является одним из фундаментальных законов природы.