

ВИПАДКОВІ ХВИЛІ В ЛІНІЙНИХ СИСТЕМАХ

СТАТИСТИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИПАДКОВИХ ПОЛІВ

Прикладом випадкового поля (тобто функції декількох змінних) може бути температурне поле турбулентної атмосфери, поле швидкостей частинок газу і тому подібне. В діелектричному середовищі випадкові джерела електромагнітного випромінювання збуджують хвилі, що мають випадкові амплітуди, фази, частоти та хвильові вектори. Сукупність таких випадкових хвиль утворює випадкове електромагнітне поле.

Згідно із основними ідеями теорії випадкових процесів для випадкових полів можна визначити функції розподілу, середні, кореляційні функції тощо. При цьому, до певної міри, є другорядним питання про фізичну природу таких полів. Їх поява може бути зумовлена як внутрішніми чинниками, наприклад принципово статистичним характером теплового випромінювання, так і зовнішніми, наприклад проходженням когерентного випромінювання через турбулентну атмосферу.

Надалі ми, розглядаючи електромагнітне поле, будемо цікавитись тільки скалярним полем – однією із компонент електромагнітного поля, для

конкретності E . В більшості практичних випадків момент першого порядку $\langle E \rangle$ випадкового електромагнітного поля дорівнює нулю. Тоді, кореляційна функція такого поля визначається як:

$$B(\vec{r}_1, t_1; \vec{r}_2, t_2) = \langle E(\vec{r}_1, t_1) E^*(\vec{r}_2, t_2) \rangle \quad (1)$$

По аналогії із стаціонарним процесом (статистично однорідним у часі) можна сформулювати поняття статистично однорідного поля. Статистично однорідне поле це поле, кореляційна функція якого залежить від різниці радіус-векторів точок, для яких вона визначається:

$$B(\vec{r}_1, t_1; \vec{r}_2, t_2) = B(\vec{s} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2, t_1, t_2) \quad (2)$$

Однорідне випадкове поле називається ізотропним, якщо кореляційна функція залежить тільки від відстані між точками, тобто $s = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$.

Очевидно, як і в випадку із стаціонарними процесами, для однорідних полів слід очікувати однозначного зв'язку із спектральними характеристиками поля $E(\omega, \vec{k})$, що визначаються, як Фур'є-образ від поля $E(t, \vec{r})$:

$$E(\vec{r}, t) = \iint E(\omega, \vec{k}) \exp(j(\omega t - \vec{k} \vec{r})) d\omega d^3 \vec{k} \quad (3)$$

По аналогії із стаціонарними процесами, із вимоги однорідності та стаціонарності випадкового поля отримаємо:

$$\langle E(\omega, \vec{k}) E(\omega', \vec{k}') \rangle = G(\omega, \vec{k}) \delta(\omega - \omega') \delta(\vec{k} - \vec{k}') \quad (4)$$

Звідки отримаємо узагальнення теореми Вінера-Хінчіна для випадкових полів:

$$B(\vec{s} = \vec{r} - \vec{r}', \tau) = \iint G(\omega, \vec{k}) \exp(j(\omega \tau - \vec{k} \vec{s})) d\omega d^3 \vec{k} \quad (5)$$

$$G(\omega, \vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iint B(\vec{s}, \tau) \exp(-j(\omega \tau - \vec{k} \vec{s})) d\tau d^3 \vec{s}$$

Для радіофізики та оптики першочергове значення має спеціальний вигляд випадкових полів – випадкові хвилі. Для квазіпласкої хвилі, що розповсюджується в напрямку z можна записати:

$$E(\vec{r}, z, t) = A(r) e^{j(\omega t - k_0 z)} \quad (6)$$

Будемо вважати, що амплітуда хвилі $A(\vec{r})$ випадковим чином залежить від радіус-вектору \vec{r} , що лежить в площині перпендикулярній напрямку

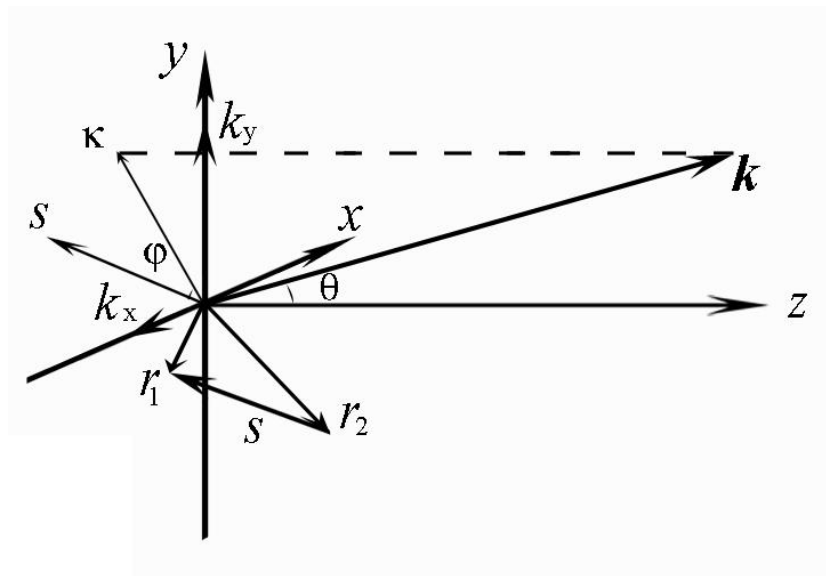


Рис. 1 Ілюстрація до визначення поняття кутового спектру

розповсюдження хвилі. Якщо поле A однорідне та ізотропне, його кореляційна функція може бути подана у вигляді інтегралу Фур'є за поперекowymi компонентами $\kappa \{k_x, k_y\}$:

$$\langle A(\vec{r}_1) A^*(\vec{r}_2) \rangle = B_{\perp}(s = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(\vec{\kappa}) e^{j\vec{\kappa} \cdot \vec{s}} d^2 \vec{\kappa} = \int_{-\infty}^{+\infty} G(\kappa) \kappa d\kappa \int_0^{2\pi} e^{j\kappa \cos \varphi s} d\varphi = 2\pi \int_0^{+\infty} G(\kappa) J_0(\kappa s) \kappa d\kappa \quad (7)$$

Зворотнє перетворення дає значення для кутового спектру $G(\kappa)$:

$$G(\kappa) = G(k \sin \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} B(s) J_0(\kappa s \sin \theta) s ds \quad (8)$$

де θ – кут між напрямком вектора \mathbf{k} та його проекцією на напрям розповсюдження жмутку k_z (Рис. 1). В цих позначеннях формулу (7) можна переписати як:

$$B_{\perp}(s) = \pi \kappa^2 \int_0^{\pi/2} G(k \sin \theta) J_0(\kappa s \sin \theta) \sin 2\theta d\theta \quad (9)$$

Тут і надалі $G(k \sin \theta)$ будемо називати кутовим спектром, що визначає інтенсивність випромінювання під кутом θ до напрямку розповсюдження квазіпласкої хвилі. Для найпростішого випадку рівномірного спектрального розподілу $G(\kappa) = G_0$ для $\kappa < \kappa_0$ отримаємо:

$$B_{\perp}(s) = 2\pi G_0 \int_0^{k_0} J_0(\vec{k}\vec{s}) k dk = 2\pi G_0 \vec{k}_0^2 \frac{J_1(k_0 s)}{\vec{k}_0 \vec{s}} = 2\pi G_0 k_0^2 \sin^2 \theta_0 \frac{J_1(k_0 s \sin \theta_0)}{k_0 s \sin \theta_0} \quad (10)$$

Характерний масштаб, при якому кореляційна функція істотно зменшується отримав назву кореляційного радіусу. Для розглянутого прикладу він може бути знайдений із умови $kr_c \sin \theta_0 \approx 1$, що еквівалентно $\Delta kr_c \approx 1$. Тут Δk характерна ширина кутового спектру. Очевидно, що отримані співвідношення є наслідком теореми Вінера-Хінчіна.

КОГЕРЕНТНІСТЬ

Які закони розповсюдження випадкових хвиль, як вони інтерферують, як дифрагують – питання в першу чергу важливі для оптики. Тому в оптиці існують спеціальні позначення для таких важливих статистичних характеристик, як моменти другого порядку, і які називають *функції когерентності*. Із появою і широким розповсюдженням лазерів дослідження когерентності випромінювання набуло надзвичайної ваги. Згідно із визначенням, сформульованим Борном та Вульфом, функцію $\Gamma_{12}(\tau)$, що дається формулою (1), називають функцією взаємної когерентності (взаємної інтенсивності). Нормовану кореляційну функцію:

$$\gamma(\vec{r}_1, t_1; \vec{r}_2, t_2) = \frac{B(\vec{r}_1, t_1; \vec{r}_2, t_2)}{\sqrt{I(\vec{r}_1, t_1)I(\vec{r}_2, t_2)}} \quad (11)$$

називають комплексною степеню когерентності. Згідно із визначенням $B(\vec{r}_1, t_1; \vec{r}_1, t_1) = I(\vec{r}_1, t_1)$. Звідки, очевидно, що за модулем $|\gamma| < 1$. Абсолютне значення γ називають модулем степені когерентності, або просто степеню когерентності.

Якщо випромінювання від двох джерел (неважливо реальних чи віртуальних) зберігає стале фазове співвідношення, то вважають, що вони взаємно когерентні. В такому випадку сумарне поле утворене полями від двох джерел обраховується згідно із принципом суперпозиції. Кажуть, що два світлових променя інтерферують один з одним. Розділяють таке поняття, як

часова когерентність – спроможність світлового променя інтерферувати із затриманим варіантом цього ж променя та *просторова когерентність* – спроможність променя інтерферувати із зміщеним у просторі (проте не затриманим у часі) варіантом цього променя. Отже, згідно із визначенням при $\vec{r}_1 = \vec{r}_2$ значення $|\gamma|$ дає нам уявлення про степінь часової когерентності, а значення $|\gamma|$ при $\tau=0$ – про степінь просторової когерентності, відповідно.

ЧАСОВА КОГЕРЕНТНІСТЬ, МЕТОДИ ВИМІРУ

Для вимірювання часової та просторової когерентності використовують різноманітні схеми інтерферометрів, які всі можна розділити на два типи. Перший варіант розділення жмутка без зміщення у просторі називають *розділення амплітуди*. В цьому методі вихідний промінь поділяють на частково відбитий та той, що частково пройшов через розподільну систему, утворюючи таким чином часову затримку одного відносно іншого. Другий метод – *розділення хвильового фронту*. В цьому методі, промінь, що аналізується ділиться на декілька променів у просторі. Щоб зробити названі поняття більш наочними, розглянемо класичні експерименти, в яких функції когерентності можна безпосередньо виміряти.

Інтерферометр Майкельсона. Паралельний жмуток світла (наприклад сформований з допомогою лінзи) падає на світлоділильну платівку. Частина світла, що відбивається від платівки, в подальшому відбивається від рухомого дзеркала і пройшовши через ту ж таки платівку попадає в фотоприймач. Одночасно друга частина світла, що пройшла через платівку, відбивається від нерухомого дзеркала і відбившись від світлоділильної платівки теж попадає в фотоприймач (**Рис. 2**). Середню інтенсивність на фотоприймачі можна описати як:

$$\begin{aligned} \langle I \rangle = & \left\langle \left| K_1 E(t) + K_2 E\left(t + 2\frac{h}{c}\right) \right|^2 \right\rangle = K_1^2 |E(t)|^2 + K_2^2 \left| E\left(t + 2\frac{h}{c}\right) \right|^2 + K_1 K_2 \left\langle E(t) \cdot E^*\left(t + 2\frac{h}{c}\right) \right\rangle + \\ & + K_1 K_2 \left\langle E^*(t) \cdot E\left(t + 2\frac{h}{c}\right) \right\rangle = \langle I_0 \rangle \left\{ K_1^2 + K_2^2 + 2K_1 K_2 \operatorname{Re} B\left(2\frac{h}{c}\right) \right\} \end{aligned} \quad (12)$$

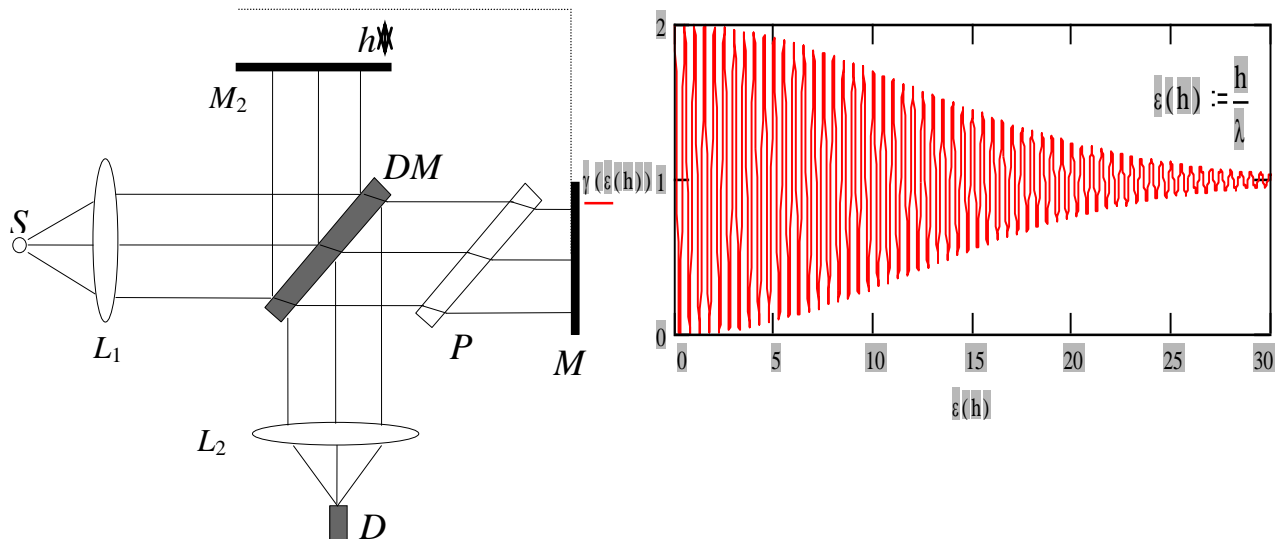


Рис. 2 Інтерферометр Майкельсона – принципний спосіб вимірювання кореляційної функції. Праворуч – типовий вигляд інтерферограми, що детектується детектором D

де K_1 та K_2 втрати в відповідних плечах інтерферометру, $B(2h/c)=B(\tau)$ кореляційна функція джерела світла. Для квазіпласкої та квазімонохроматичної хвилі типу:

$$E(t) = A(\vec{r}, t) \exp(j(\omega_0 t - k_0 z)) \quad (13)$$

кореляційна функція становить:

$$B(\tau) = \left\langle A(t) A^* \left(t + 2\frac{h}{c}\right) \right\rangle \exp(j(-\omega_0 \tau)) = \left| \Gamma\left(2\frac{h}{c}\right) \right| \exp\left(j\left(\alpha\left(2\frac{h}{c}\right) - \omega_0 2\frac{h}{c}\right)\right) \quad \alpha(\tau) \stackrel{def}{=} \arg B(\tau) \quad (14)$$

Тоді, зваживши на те, що $I(0)=I_0$ вираз (3) можна переписати:

$$I(\tau) = I_0 (K_1^2 + K_2^2) \left\{ 1 + \frac{2K_1 K_2}{K_1^2 + K_2^2} |\gamma(\tau)| \cos(\alpha(\tau) - \omega_0 \tau) \right\} \quad (15)$$

Тобто, інтенсивність в області фотоприймача безпосередньо залежить від коефіцієнту кореляції світлового поля. Для характеристики глибини інтерференційних смуг, що спостерігаються поблизу довільної різниці ходу h існує кількісна характеристика – *видність інтерференційної картини*, яка визначається як:

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \quad (16)$$

За малих значень різниці ходу h $\alpha(2h/c) \approx 0$ та за умов коли втрати в обох плечах інтерферометру однакові, інтерферограма має видність:

$$V = \gamma \left(\frac{2\hbar}{c} \right) \quad (17)$$

При збільшенні величини різниці ходу видність смуг зменшується до нуля. Кажуть тоді, що оптична довжина ходу перебільшила довжину когерентності, або відносний час затримки перебільшив час когерентності.

ФУР'Є-СПЕКТРОСКОПІЯ

Для стаціонарних полів функція кореляції та спектральна густина пов'язана Фур'є перетворенням. Користуючись інтерферограмою можна знайти спектр випромінювання. Застосувавши перетворення Фур'є до (15) отримаємо:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} I(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = (I_1 + I_2) \delta(\omega) + G(\omega) \quad G(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{K_1 K_2}{K_1^2 + K_2^2} \int_0^{\infty} R(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau \quad (18)$$

Таким чином скориставшись інтерферометром із регульованою часовою затримкою τ можна визначити спектр випромінювання. Наведений метод називається *фур'є-спектроскопією*. Точність метода тим краще чим більше можливий час затримки. Припустимо, що можливий час затримки змінюється від $-T$ до T . Тоді вираз (18) можна переписати як:

$$G_{real}(\omega) \approx \int_{-T}^T R(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(\tau) R(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau \quad \Pi(\tau) = \delta(|\tau| \leq T) \quad (19)$$

Отже реальний спектр є згортка «ідеального» спектру та спектру «функції пропускання» Π :

$$G_{real}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} M(\omega - \Omega) G(\Omega) d\Omega \quad M(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(\tau) e^{j\omega\tau} d\tau = \frac{T}{2\pi} \frac{\sin \omega T}{\omega T} \quad (20)$$

В кінцевому випадку гранична роздільна здатність визначається шириною спектра функції пропускання тобто $\sim 1/T$. Для реально можливих термінів затримки 10^{-8} сек (що відповідає декільком метрам різниці довжин оптичного ходу) роздільна здатність може становити 10^8 Гц. Роздільна спроможність, відповідно, становить $\lambda/\Delta\lambda \sim 10^6$ в інфрачервоному діапазоні, для якого використання методів фур'є-спектроскопії знайшло широке застосування.

ПРОСТОРОВА КОГЕРЕНТНІСТЬ, МЕТОДИ ВИМІРУ

Класичним приладом для визначення просторової когерентності світла є інтерферометр Юнга в якому не точкове, протяжне джерело світла освітлює екран в якому зроблено два маленьких отвори. На деякій відстані від першого екрану розташовано другий екран на якому можна спостерігати інтерференційну картину (**Рис. 3**). Математичний опис такого експерименту подібний до експерименту Майкельсона. Інтенсивність в деякій точці P на екрані визначається інтерференцією між двома променями, що ідуть від отворів. На практиці завжди вимірюється усереднене значення інтенсивності. Отже:

$$\begin{aligned} \langle I \rangle = & \left\langle \left| K_1 E(Q_1, t - \frac{\vec{r}_1}{c}) + K_2 E(Q_2, t - \frac{\vec{r}_2}{c}) \right|^2 \right\rangle = K_1^2 I_1 + K_2^2 I_2 + \\ & + K_1 K_2 \left\langle E(Q_1, t - \frac{\vec{r}_1}{c}) \cdot E^*(Q_2, t - \frac{\vec{r}_2}{c}) \right\rangle + K_1 K_2 \left\langle E^*(Q_1, t - \frac{\vec{r}_1}{c}) \cdot E(Q_2, t - \frac{\vec{r}_2}{c}) \right\rangle \end{aligned} \quad (21)$$

де E задовольняє розв'язку хвильового рівняння у вільному просторі, \vec{r}_1/c та \vec{r}_2/c часові затримки, K_1 та K_2 – комплексні величини, що визначаються формою, розмірами, функцією пропускання отворів. Якщо один із отворів закрити, то інтенсивність в точці P становить:

$$I_i(P) = K_i^2 I_i(Q_i) \quad i=1,2 \quad (22)$$

Тоді інтенсивність в точці спостереження P при відкритих обох щілинах

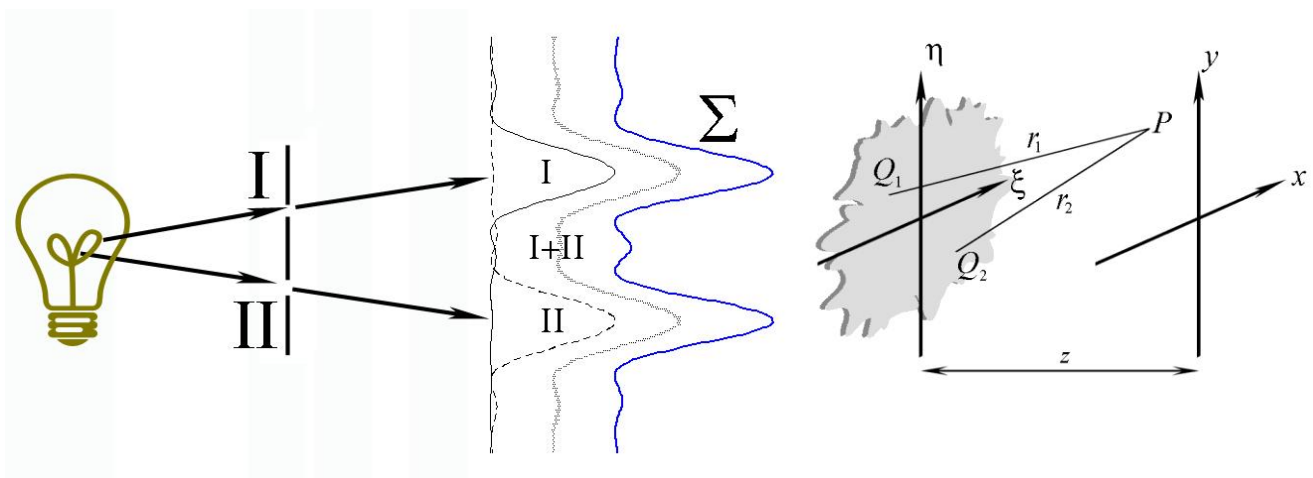


Рис. 3 Схема Юнга виміру просторової кореляційної функції. I та II – розподі інтенсивності на екрані від кожної окремої щілини. I+II – розподіл інтенсивності, який є сумою розподілів від кожної із щілин. Σ – розподіл інтенсивності із урахуванням інтерференції.

можна описати виразом подібним до (15).

$$I(\tau) = I_1 + I_1 + 2\sqrt{I_1 I_1} |\gamma(\vec{s}, \tau)| \quad (23)$$

де s – відстань між отворами.

Тепер інтенсивність в точці спостереження визначається просторовою кореляційною функцією, яка залежить як від відстані між щілинами s , так і від часу запізнення τ . Так як і для інтерферометра Майкельсона можна ввести поняття видності, що для квазіпласких хвиль однакової інтенсивності практично співпадає із поперековою кореляційною функцією:

$$B(\vec{s}, \tau) = \langle A(\vec{r}_1, t_1) A^*(\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \vec{s}, t_2 = t_1 + \tau) \rangle \exp(j(-\omega_0 \tau)) = B_{\perp}(\vec{s}, \tau) \exp(j(-\omega_0 \tau)) \quad (24)$$

Як неважко бачити, вигляд інтерференційної картини залежить як від ефектів просторової, так і часової когерентності. Ситуація значно спрощується, якщо довжина когерентності набагато більше будь-якої оптичної різниці ходу, що виникає. В такому випадку кажуть, що виконується умова квазімонохроматичності.

ПОПЕРЕЧНА КОРЕЛЯЦІЙНА ФУНКЦІЯ ТА КУТОВИЙ СПЕКТР СТАТИСТИЧНО НЕОДНОРІДНОГО ТА ІЗОТРОПНОГО СВІТОВОГО ЖМУТКА

Досі неявно припускалося, що справа йдеться про так звані статистично однорідні жмутки. Куткові спектри реальних світлових променів можуть істотно не вписуватися в модель однорідного поля. Для кутового спектру статистично неоднорідного поля можна записати:

$$G(\vec{\kappa}, z) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle A(\vec{r}_1, z) A^*(\vec{r}_2, z) \rangle e^{j\vec{\kappa}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)} d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} B_{\perp}(\vec{s}, \vec{R}, z) e^{j\vec{\kappa}\vec{s}} d^2 s d^2 R \quad (25)$$

$$s = r_1 - r_2 \quad R = \frac{r_1 + r_2}{2}$$

Спектр можна інтерпретувати, як спектр однорідного поля із кореляційною функцією та спектром:

$$B_{\perp}^{\text{homogen}}(\vec{s}, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} B_{\perp}(\vec{s}, \vec{R}, z) d^2 R \quad G^{\text{homogen}}(\vec{\kappa}, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} B_{\perp}^{\text{homogen}}(\vec{s}, z) e^{j\vec{\kappa}\vec{s}} d^2 s \quad (26)$$

Якщо поле ізотропне, то значення кореляційної функції можна знайти із (26).

Розглянемо для прикладу кутовий спектр променя діаметром a із радіусом кореляції r_c . Візьмемо жмуток із кореляційною функцією типу:

$$\begin{aligned} B_{\perp}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, z) &= I_0 \exp\left\{-\frac{r_2^2 + r_1^2}{a^2} - \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_c^2}\right\} = \\ &= B_{\perp}(\vec{s}, \vec{R}, z) = I_0 \exp\left\{-\frac{2\vec{R}^2}{a^2} - \frac{s^2}{r_{eff}^2}\right\} \quad r_{eff}^{-2} = r_c^{-2} + 1/2a^2 \end{aligned} \quad (27)$$

Підставивши (27) в (26) отримаємо:

$$B_{\perp}^{homogen}(\vec{s}, z) = \frac{2\pi}{a^2} I_0 \exp\left\{-\frac{r^2}{r_{eff}^2}\right\} \quad G(\vec{\kappa}, z) = \frac{\pi r_{eff}^2}{a^2} I_0 \exp\left\{-\frac{1}{4}(kr_{eff}\theta)^2\right\} \quad (28)$$

Згідно із (28) півширина кутового спектру по рівню e^{-1} становить:

$$\Delta\theta = \frac{2}{kr_{eff}} = \sqrt{\frac{2}{k^2 a^2} \left[1 + \frac{2a^2}{r_c^2}\right]} \quad (29)$$

Із (28) видно, що за умов коли радіус кореляції жмутка набагато менше діаметру жмутка, ширина кутового спектру визначається радіусом кореляції $\Delta\theta \sim 2/kr_c$. Натомість, в зворотному випадку ширина кутового спектру визначається діаметром жмутка $\Delta\theta \sim 2/ka$. Наведена особливість настановлює на думку про дифракційну природу трансформації кутового спектру, оскільки його ширина визначається найменшим характерними розміром системи.

РОЗПОВСЮДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ КОГЕРЕНТНОСТІ. ТЕОРЕМА ВАН ЦИТТЕРА-ЦЕРНІКЕ

Детальна структура оптичної хвилі змінюється при розповсюдженні хвилі в просторі завдяки дифракції. Відповідно змінюється і функція когерентності. Найпростіше вивести закони розповсюдження функції когерентності виходячи із принципу Гюйгенса-Френеля. Сформулюємо задачу таким чином: світлова хвиля, що має функцію когерентності $B(P_1, P_2, \tau)$ на вихідній поверхні Σ_1 , утворює світлове поле на

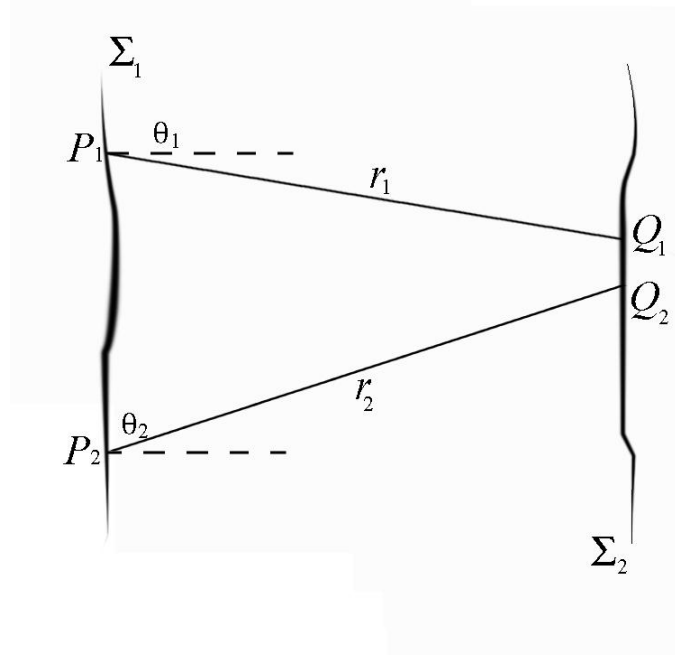


Рис. 4 До ілюстрації принципу Гюйгенса-Френеля

поверхні Σ_2 , де має відповідно функцію когерентності $B(Q_1, Q_2, \tau)$ (Рис. 4). Згідно із принципом Гюйгенса-Френеля світлове поле на поверхні Σ_2 може бути виражено через поле на поверхні Σ_1 .

$$E(Q_1, t) = \iint_{\Sigma_1} \frac{1}{j\lambda r_1} E(Q_1, t - \frac{r_1}{c}) \chi(\theta_1) dS_1 \quad (30)$$

де $\chi(\theta)$ – функція напрямку. Тоді для функції когерентності можна записати:

$$\begin{aligned} B(Q_1, Q_2, \tau) &= \langle E(Q_1, t + \tau) E^*(Q_2, t) \rangle = \iint_{\Sigma_1} \iint_{\Sigma_1} \frac{\left\langle E(Q_1, t - \frac{r_1}{c}) E(Q_2, t - \frac{r_2}{c}) \right\rangle}{\lambda^2 r_1 r_2} \chi(\theta_1) \chi(\theta_2) dS_1 dS_2 \\ &= \iint_{\Sigma_1} \iint_{\Sigma_1} \frac{B(P_1, P_2, \tau)}{\lambda^2 r_1 r_2} \chi(\theta_1) \chi(\theta_2) dS_1 dS_2 \end{aligned} \quad (31)$$

Враховуючи, що для хвиль, які розповсюджуються в напрямку z має місце відношення:

$$B_{\perp}(Q_1, Q_2) = B(Q_1, Q_2, 0) \quad (32)$$

для функції кореляції в площині Σ_2 маємо відношення:

$$B(P_1, P_2, \frac{r_2 - r_1}{c}) = B_{\perp}(P_1, P_2) \exp\left\{-j \frac{2\pi}{\lambda} (r_2 - r_1)\right\} \quad (33)$$

Таким чином, для поперечної функції кореляції отримаємо вираз:

$$B_{\perp}(Q_1, Q_2) = \iint_{\Sigma_1} \iint_{\Sigma_2} \frac{B_{\perp}(P_1, P_2)}{\lambda^2 r_1 r_2} \exp\left\{-j \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1)\right\} \chi(\theta_1) \chi(\theta_2) dS_1 dS_2 \quad (34)$$

Розглянемо декілька важливих випадків. Якщо джерело випромінювання абсолютно некогерентне, то функція кореляції його дельтоподібна:

$$B_{\perp}(P_1, P_2) = I(P_1) \delta(|P_1 - P_2|) \quad (35)$$

Підставивши цей вираз в (34) отримаємо:

$$B_{\perp}(Q_1, Q_2) = \frac{1}{\lambda^2} \iint_{\Sigma_1} \frac{I(P_1)}{r_1 r_2} \exp\left\{-j \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1)\right\} \chi(\theta_1) \chi(\theta_2) dS \quad (36)$$

Тепер зробимо декілька цілком природних припущень:

1. Вважаємо розміри джерела та області спостереження набагато менше відстані, що їх розділяє: $1/r_1 r_2 \approx 1/z^2$ (Рис. 5).
2. Розглядаємо тільки малі кути і тому вважаємо, що $\chi(\theta_1) \approx \chi(\theta_2) \approx 1$.
3. Розглядаємо тільки планарні зображення, тобто джерело та область спостереження лежать в паралельних площинах.

Вираз для функції поперечної інтенсивності набуває тепер вигляду:

$$B_{\perp}(Q_1, Q_2) = \frac{1}{(\lambda z)^2} \iint_{\Sigma_1} I(P_1) \exp\left\{-j \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1)\right\} dS \quad (37)$$

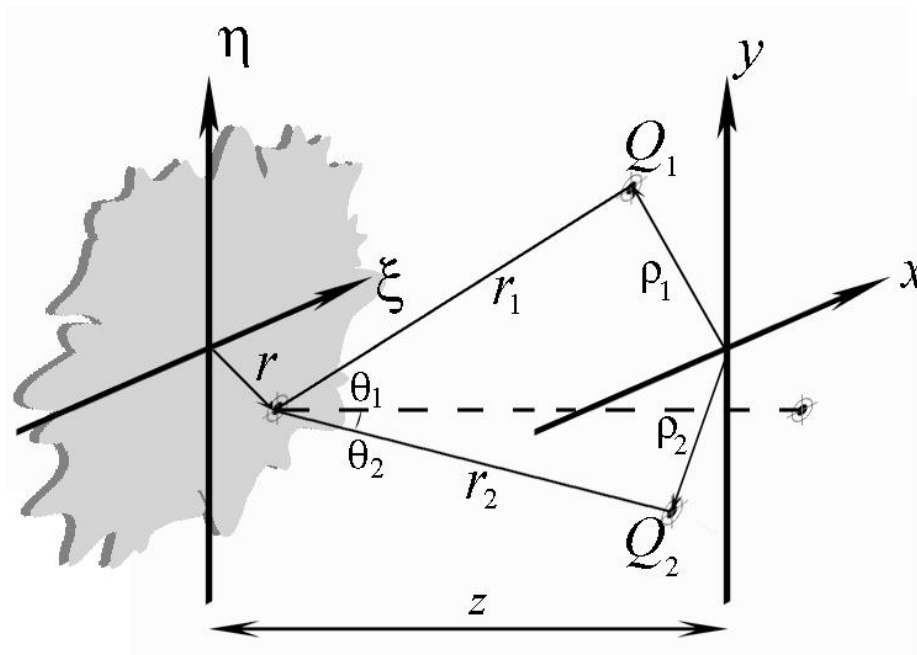


Рис. 5 До виводу теореми Ван-Цитера-Церніке

В параксіальному наближенні, яке слідує із перших двох припущень можна, згідно із малюнком записати:

$$r \approx z + \frac{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}{2z} \quad (38)$$

Ввівши позначення $\Delta x = x_1 - x_2$ $\Delta y = y_1 - y_2$ кінець-кінцем отримаємо вираз:

$$B_{\perp}(x_1, y_1; x_2, y_2) = B_{\perp}(\Delta x, \Delta y) = \frac{e^{-j\psi}}{(\lambda z)^2} \iint_{\Sigma_1} I(\xi, \eta) \exp\left\{-j \frac{2\pi}{\lambda z} (\Delta x \xi - \Delta y \eta)\right\} dS \quad (39)$$

де фазовий множник ψ дається виразом:

$$\psi = \frac{\pi}{\lambda z} ((x_1^2 + y_1^2) - (x_2^2 + y_2^2)) = \frac{\pi}{\lambda z} (\rho_1^2 - \rho_2^2) \quad (40)$$

де ρ_i відповідно відстань до точки i .

Вираз (39) називають теоремою Ван Цитера-Церніке. Її можна сформулювати так: с точністю до масштабного множника та фазового зсуву поперекову функцію когерентності світлового поля можна знайти виконавши двомірне перетворення інтенсивності джерела по поверхні некогерентного джерела. Таке співвідношення виникає і в співвідношенні між розподілом поля в межах когерентно освітленого отвору і в картині дифракції Фраунгофера. Однак аналогія тут більше математична ніж фізична. Фактично теорема Цитера-Церніке є математична інтерпретація досліду Юнга. Кожна точка на джерелі дає інтерференційну картину високої видимості. Якщо розміри джерела значні, то такі інтерференційні картини складаються, а оскільки вони мають випадкові фази, то контраст знижується. Крім того параксіальне наближення, яке було використано при виводі теореми, припускає і випадок дифракції Френеля.

Корисним є поняття площини когерентності, що може бути визначено як:

$$A_c = \iint_{R^2} |R_{\perp}(\Delta x, \Delta y)|^2 d\Delta x d\Delta y \quad (41)$$

Нарешті зауважимо випадки, коли фазовий множник дорівнює одиниці:

1. Коли відстань доволі значна $Z \gg (\rho_1^2 - \rho_2^2)/\lambda$
2. Якщо точки виміру знаходяться на однаковій відстані від оптичної осі.
3. Якщо отвори лежать на сфері радіусу z із центром на джерелі.

ДИФРАКЦІЯ НЕКОГЕРЕНТНИХ ХВИЛЬ НА ОТВОРІ

Розглянемо дифракцію дельтакорельованої хвилі на круглому отворі радіусу a із центром в точці 0.

$$I(\vec{r}) = \begin{cases} I_0, & r \leq a \\ 0, & r > a \end{cases} \quad r^2 = \xi^2 + \eta^2 \quad (42)$$

Для розрахунку функції кореляції прийнемо, що Q_1 лежить на оптичній осі, а радіус-вектор до точки Q_2 позначимо, як s . Перейшовши до полярних координат та позначивши кут між напрямками векторів r та s через φ , отримаємо:

$$\begin{aligned} B_{\perp}(\vec{s}, z) &= \frac{1}{(\lambda z)^2} I_0 \exp\left(-j \frac{\pi}{\lambda z} s^2\right) \int_0^a dr \int_0^{2\pi} d\varphi r \exp\left\{-j \frac{2\pi}{\lambda z} rs \cos \varphi\right\} = \\ &= \frac{2\pi}{(\lambda z)^2} I_0 \exp\left(-j \frac{\pi}{\lambda z} s^2\right) \int_0^a dr r J_0\left(\frac{2\pi}{\lambda z} rs\right) = \frac{a}{\lambda z s} I_0 \exp\left(-j \frac{\pi}{\lambda z} s^2\right) J_1\left(\frac{2\pi}{\lambda z} as\right) \end{aligned} \quad (43)$$

Для коефіцієнту просторової кореляції відповідно маємо:

$$R_{\perp}(\vec{s}, z) = |B_{\perp}(\vec{s}, z) / B_{\perp}(\vec{s}, 0)| = 2 \left| J_1\left(\frac{2\pi}{\lambda z} as\right) / \frac{2\pi}{\lambda z} s \right| \quad (44)$$

Перше нульове значення вона набуває при $s_0 = 0.61 \lambda / \theta_0$ де $\theta_0 = a/z$ – кутовий розмір джерела. Радіусом кореляції вважають значення, що задовольняє умові $|\gamma(s)| = 0.88$. Тоді, для радіусу кореляції маємо вираз:

$$r_c = 0.16 \frac{\lambda z}{a} \quad (45)$$

Отже, із збільшенням відстані від джерела радіус кореляції зростає. Наявність в виразі довжини хвилі вказує на істотно дифракційну природу цього ефекту. Пояснення цього фізичного результату полягає в тому, що в міру розповсюдження фазові фронти елементарних хвиль, що ідуть від різних точок джерела випромінювання, співпадають на все більшій площині. Натомість, при збільшенні радіусу отвору радіус кореляції зростає. При відсутності отвору ($a \rightarrow \infty$) випромінювання залишається некорельованим.

ДИФРАКЦІЯ ЧАСТКОВО КОГЕРЕНТНОГО СВІТЛА НА ОТВОРІ

Для того, щоб знайти інтенсивність світла в площині спостереження при дифракції на отворі від частково когерентного джерела скористаємося формулою (34) перейшовши до границі $Q_1 \rightarrow Q_2$. При цьому будемо вважати, що виконано умови параксіальності, отвір та площа спостереження набагато менше відстані між ними. Тоді:

$$I(Q) = \frac{1}{\lambda^2 z^2} \iint_{\Sigma_1} \iint_{\Sigma_2} B_{\perp}(P_1, P_2) \exp\left\{-j \frac{2\pi}{\lambda}(r'_2 - r'_1)\right\} dS_1 dS_2 \quad (46)$$

де індекс t для функції когерентності означає transparent. Введемо функцію «зіниці» Π , яка описує форму отвору та його коефіцієнт пропускання і в загальному випадку може бути комплексною. Окрім того, будемо вважати, що світлове поле статистично однорідне. Як завжди в параксіальному наближенні:

$$r'_2 - r'_1 \approx \frac{(\xi_2^2 + \eta_2^2) + (\xi_1^2 + \eta_1^2) - 2(x\Delta\xi + y\Delta\eta)}{2z} = \frac{1}{z} [\bar{\xi}\Delta\xi + \bar{\eta}\Delta\eta - x\Delta\xi - y\Delta\eta] \quad (47)$$

Скориставшись наведеними наближеннями та (47) отримаємо:

$$\begin{aligned} I(Q) &= \frac{1}{\lambda^2 z^2} \iint_{R^2} \iint_{R^2} \Pi(P_1) \Pi^*(P_2) B_{\perp}(P_1, P_2) \exp\left\{-j \frac{2\pi}{\lambda}(r'_2 - r'_1)\right\} dS_1 dS_2 \approx \\ &\approx \frac{I_0}{\lambda^2 z^2} \iint_{R^2} T(\Delta\xi, \Delta\eta) R_{\perp}(\Delta\xi, \Delta\eta) \exp\left\{j \frac{2\pi}{\lambda}(x\Delta\xi + y\Delta\eta)\right\} d\Delta\xi, d\Delta\eta \end{aligned} \quad (48)$$

де індекс i для функції когерентності означає incident, а функція T є автокореляційна функція зіниці (отвору):

$$T(\Delta\xi, \Delta\eta) = \iint_{R^2} \Pi\left(\bar{\xi} - \frac{\Delta\xi}{2}, \bar{\eta} - \frac{\Delta\eta}{2}\right) \Pi^*\left(\bar{\xi} + \frac{\Delta\xi}{2}, \bar{\eta} + \frac{\Delta\eta}{2}\right) d\bar{\xi} d\bar{\eta} \quad (49)$$

Отриманий результат називається *формула Шелла*, згідно з якою розподіл інтенсивності в дифракційній картині можна знайти виконавши перетворення Фур'є над добутком автокореляційної функції отвору та функції когерентності.

Розглянемо два граничних випадки. Спочатку припустимо, що отвір освітлюється повністю когерентною хвилюю. Тоді,

$$I(Q) \approx \frac{I_0}{\lambda^2 z^2} \iint_{R^2} T(\Delta\xi, \Delta\eta) \exp\left\{j \frac{2\pi}{\lambda}(x\Delta\xi + y\Delta\eta)\right\} d\Delta\xi, d\Delta\eta \quad (50)$$

що еквівалентно знайомій формулі Фраунгофера:

$$I(Q) = \frac{I_0}{\lambda^2 z^2} \left| \iint_{R^2} \Pi(\xi, \eta) \exp \left\{ j \frac{2\pi}{\lambda} (x\xi + y\eta) \right\} d\xi, d\eta \right|^2 \quad (51)$$

В іншому випадку, коли освітлення має площину когерентності набагато менше ніж розміри отвору, функція пропускання має своє максимальне значення площини апертури A в межах всієї області де $R_{\perp} \neq 0$. Відповідно:

$$I(Q) \approx \frac{I_0 A}{\lambda^2 z^2} \iint_{R^2} R_{\perp}(\Delta\xi, \Delta\eta) \exp \left\{ j \frac{2\pi}{\lambda} (x\Delta\xi + y\Delta\eta) \right\} d\Delta\xi, d\Delta\eta \quad (52)$$

Таким чином, розподіл інтенсивності визначається головним чином комплексним коефіцієнтом когерентності і практично не залежить від форми отвору.

В проміжних випадках форма інтенсивності буде визначатися згорткою Фур'є образів від T та R_{\perp} .