ВІДГУК ЛІНІЙНОЇ КОЛИВАЛЬНОЇ СИСТЕМИ НА ШУМ

ПЕРЕТВОРЕННЯ КОРЕЛЯЦІЙНИХ ФУНКЦІЙ І СПЕКТРІВ ЛІНІЙНОЮ СИСТЕМОЮ

Важливою особливістю всіх лінійних систем є принцип суперпозиції, що дозволяє широко застосовувати спектральні методи. Нагадаємо, що відгук лінійної системи на будь-яку зовнішню дію можна подати у вигляді:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) K(\omega, t) e^{j\omega t} d\omega \tag{1}$$

де $f(\omega)$ – спектр зовнішньої дії[1], а $K(\omega)$ – частотна передаточна функція лінійної системи. Інший спосіб – використання апаратної функції $H(\theta,t)$, або функції Гріна, фізичний зміст якої є відгук на дельтоподібну дію. Тоді, відгук можна подати у вигляді інтеграла Дюамеля:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\theta) H(\theta, t) d\theta = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\theta) 1(t-\theta) H(\theta, t) d\theta \tag{2}$$

Для системи із стаціонарними параметрами, $H(\theta,t)=H(\theta-t)$, $K(\omega,t)=K(\omega)$.

[1] Звичайно вираз має сенс, якщо зовнішня сила $f(\omega)$ припускає розкладання в ряд Фурьє.

Апаратна та передаточна функція зв'язані співвідношенням:

$$H(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}K(\omega)e^{j\omega t}\cdot d\omega \qquad (3)$$

$$K(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}H(t)e^{-j\omega t}\cdot dt$$

Для стаціонарного шуму η(t) на вході лінійної системи:

$$\overline{\eta}=0,\ \overline{\eta\eta_{\tau}}=B_{in}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}G_{in}(\omega)e^{-j\omega t}d\omega\ \ \overline{\eta_{\omega}\eta_{\omega'}}=\overline{\eta_{\omega}\eta^{*}_{-\omega'}}=G_{in}(\omega)\delta(\omega-\omega')\ \ \overline{\eta_{\omega}}=0 \qquad (4)$$

відгук (1) або (2) теж стаціонарний процес. Усереднюючи x та xx_{τ}, з урахуванням (4) отримаємо:

$$\overline{x}=0,\quad \overline{xx_{\tau}}=B_{out}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}G_{in}(\omega)\left|K_{\omega}\right|^{2}e^{-j\omega\tau}d\omega\Rightarrow G_{out}(\omega)=G_{in}(\omega)\left|K_{\omega}\right|^{2} \qquad (5)$$

Вхідному білому шуму із спектральною інтенсивністю ½π відповідає на виході кореляційна функція, яку можна назвати кореляційною функцією апаратної функції:

$$B_{apparat}(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|K_{\omega}\right|^{2}e^{-j\omega\tau}d\omega \qquad (6)$$

Тоді неважко показати, що кореляційні функції шумів на вході пов'язані із кореляційною функцією шумів на виході як:

$$B_{out}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}B_{apparat}(\tau-\theta)B_{in}(\theta)d\theta \qquad (7)$$

ФІЛЬТРАЦІЯ ШУМУ. RC-ФІЛЬТР

Згідно із (5) , лінійна система діє як фільтруюча – послаблює ті частини спектру де K_{ω} мала. Звичайно, фільтруюча дія буде проявляться за умов коли характерна ширина передаточної функції набагато менше ніж спектр шумів або сигналу.

Найпростішим і водночас найпоширенішим є *RC*-фільтр – послідовно або паралельно з'єднані емність та індуктивність. Рівняння руху для нього:

$$\dot{q}+1/RC\,q=i(t)\qquad 1/RC=\alpha \qquad (8)$$

Апаратна функція, або фундаментальне рішення є згасаюча експонента із характерним часом згасання RC. Тоді, передаточна функція може бути знайдена, наприклад, із (3):

$$K(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}1(t)e^{-\alpha\theta}e^{-j\omega\theta}\cdot d\theta=\int_{t}^{+\infty}e^{-\alpha\theta}e^{-j\omega\theta}\cdot d\theta=\frac{1}{\alpha+j\omega}\quad \left|K(\omega)\right|^2=\frac{1}{\alpha^2+\omega^2} \tag{9}$$

Отже, RC-фільтр працює як фільтр нижніх частот – виділяє нижні частоти і не пропускає верхні.

КОЛИВАЛЬНИЙ КОНТУР. ВСТАНОВЛЕННЯ ШУМОВИХ КОЛИВАНЬ ЛІНІЙНОГО ОСЦИЛЯТОРА

Аналогічним чином можна розглянути дію RLC-фільтра - коливального послідовного контуру. Для напруги на обкладинках конденсатора можна записати:

$$\ddot{u}+2\alpha\dot{u}+\omega_0^2u=\omega_0^2E(t)=f(t)\qquad R/C=2\alpha\quad \omega_0^2=1/LC \tag{10}$$

Фундаментальне розв’язок цього рівняння:

$$H(\theta)=\frac{1}{\omega}e^{-\alpha\theta}\sin\omega t\qquad \omega=\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2} \tag{11}$$

З використанням (3) можна знайти і частотну характеристику. Однак, можна зробити це за визначенням передаточної функції. Вважаючи в (10) $f(t)=exp\{j\omega t\}$ та $x(t)=K(\omega)exp\{j\omega t\}$, отримаємо:

$$K(\omega)=\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2+2j\alpha\omega}\quad \left|K(\omega)\right|^2=\frac{1}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\alpha^2\omega^2} \tag{12}$$

Тобто, контур працює як селективний фільтр з частотою селекції ω_0 та характерною шириною смуги 2α.

Для опису нестаціонарних ефектів, наприклад випадкових перехідних процесів зручно скористатися часовим підходом. Для системи із сталими параметрами рівняння (2) переходить в:

$$x(t)=\int_{0}^{+\infty}f(t-\theta)h(\theta)d\theta \tag{13}$$

Вважаючи в (13) $f(t)=1(t)\xi(t)$, отримаємо:

$$x(t)=\int_0^t \xi(t-\theta)h(\theta)d\theta \tag{14}$$

Дисперсія шумових коливань на виході системи буде:

$$\sigma_{out}^2=\overline{x^2}=\int_0^t\int_0^t B_{in}(\theta-\theta')h(\theta)h(\theta')d\theta d\theta' \tag{15}$$

Якщо, шум білий, тобто дельтакорельований, то $B_{\text{in}}=2\pi G_{in}\delta(\tau)$, а апаратна функція описується відповідно виразом (11) , то для дисперсії отримаємо:

$$\sigma_{out}^2=\frac{\pi G_{in}}{2\alpha\omega_0^2}-\frac{\pi G_{in}}{2\omega_0^2}e^{-2\alpha t}\left[\frac{1}{\alpha}+\frac{\omega\sin 2\omega t-\alpha\cos 2\omega t}{\omega_0^2}\right] \tag{16}$$

для високодобротного контуру можна знехтувати швидко осцилюючими членами порядку $\alpha/\omega \ll 1$. Тоді:

$$\sigma_{out}^2(t)=\sigma_{out}^2(\infty)(1-e^{-2\alpha t})\quad \sigma_{out}^2(\infty)=\frac{\pi G_{in}}{2\alpha\omega_0^2} \tag{17}$$

Тобто час встановлення стаціонарного вихідного шуму такого ж порядку, що і час згасання вільних коливань.

ЛІНІЙНА СИСТЕМА, ЯК УСЕРЕДНЮЮЧА СИСТЕМА.

Лінійну систему, за умов, коли частотна передаточна функція має вигляд подібний до вигляду частотної функції RC-кола, можна розглядати як усереднюючий пристрій. Дійсно, операція часового усереднення:

$$\tilde{f}(t)=\frac{1}{T}\int_t^{t+T} f(\theta)d\theta=\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}\int_t^{t+T} f_\omega e^{j\omega t}d\omega d\theta=\int_{-\infty}^{\infty} f_\omega\frac{\sin\omega T/2}{\omega T/2}e^{j\omega T/2}e^{j\omega t}d\omega \tag{18}$$

може бути представлена як дія ідеального інтегратора із частотною передаточною функцією:

$$\left|K_0(\omega)\right|^2=\left(\frac{\sin\omega T/2}{\omega T/2}\right)^2 \tag{19}$$

Із зростанням часу усереднення, дисперсія після такого інтегратора зменшується і в границі при $T \gg \tau_C$ становить:

$$\sigma_{Tideal}^2=\int_{-\infty}^{\infty}G(\omega)\left(\frac{\sin\omega T/2}{\omega T/2}\right)^2 d\omega\approx G(0)\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin\omega T/2}{\omega T/2}\right)^2 d\omega=\frac{2\pi G(0)}{T} \tag{20}$$

Якщо, як інтегратор використовується яка-небудь лінійна система то ефективний час усереднення для нього може бути визначено як:

$$T_{eff} > \frac{2\pi G(0)}{\sigma_T^2} = \frac{2\pi G(0)}{\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)\left|K_\omega\right|^2 d\omega} \qquad (21)$$

Так, якщо використовувати як фільтр *RC*-коло, а шум вважати білим із $G(\omega)=G(0)=1/2\pi$, то необхідний час усереднення становить:

$$T_{eff} > \frac{2\pi}{\int_{-\infty}^{\infty} \left|K_\omega\right|^2 d\omega} = \frac{2\pi}{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2+\omega^2} d\omega} = \frac{2}{\alpha} = 2RC \qquad (22)$$

тобто подвоєна стала *RC* кола.

ДІЯ ШУМУ НА ЛІНІЙНУ СИСТЕМУ. НОРМАЛІЗАЦІЯ ФЛУКТУАЦІЙ В ВУЗЬКОПОЛОСНИХ СИСТЕМАХ

Якщо шум на вході в лінійну систему є гаусовим, то внаслідок лінійності на виході він буде також гаусовим. Тому використовуючи інтеграл Дюамеля завжди можна знайти два параметри: середнє та кореляційну функцію. Таким чином, принципово можливо побудувати багатовимірний розподіл будь-якого порядку на виході лінійної системи, а, отже, описати статистичні властивості відгуку із будь-якою точністю.

Розглянемо випадок, коли шум на вході системи не є гаусовим. Якщо спектр шуму набагато ширше ніж частотна передаточна функція системи, шум можна інтерпретувати білим, тобто вважати його дельтакорельованим процесом із $\langle\xi\xi_\tau\rangle=2D\delta(\tau)$. Тоді, якщо система описується диференційним рівнянням першого порядку типу $x'(t)=-\alpha x(t)$, можна скориставшись апаратом рівняння Фокера-Планка одразу визначити розподіл для вихідного сигналу:

$$\omega(x) \propto \exp\left(-\frac{\alpha x^2}{2D}\right) \qquad (23)$$

Результат може бути узагальнено і на систему диференційних рівнянь із дельтакорельованими правими частинами.

Умова $\Delta\omega_{вх}$>>$\Delta\omega_{рез}$ відноситься до стаціонарного режиму роботи лінійної системи. Однак, заміна реального шуму на дельтакорельований при перехідних процесах можлива за умов коли виконується:

$$\Delta\omega_{in} >> \frac{1}{T} \tag{24}$$

де T час дії зовнішнього шуму на систему. Наприклад, дія шуму:

$$G_{in}(\omega) = \frac{G_0\beta^2}{\beta^2+\omega^2} \quad \Rightarrow \quad B_{in} = \pi\beta G_0 e^{-\beta\tau} \tag{25}$$

на *RC*-фільтр із сталою α=1/RC призводить, згідно із (7) до вихідної дисперсії:

$$\sigma_{out}^2 = \pi\beta G_0 \left[\frac{1}{\beta(\beta+\alpha)} - \frac{e^{-2\alpha t}}{\beta(\beta-\alpha)} + \frac{2e^{-2(\beta+\alpha)t}}{(\beta+\alpha)(\beta-\alpha)} \right] \tag{26}$$

З іншого боку при дії білого шуму на RC фільтр, вихідна дисперсія змінюється із часом за формулою (17) , якщо зробити перехід $L\to 0$:

$$\sigma_{out}^2(t) = \frac{\pi G_0}{\alpha}(1-e^{-2\alpha t}) \tag{27}$$

Останні два вирази співпадуть за умов $\beta>>\alpha$, що відповідає $\Delta\omega_{вх}$>>$\Delta\omega_{рез}$, та $\beta t>>1$, що відповідає умові (27).

Ефект нормалізації шуму в лінійних системах є наслідок центральної граничної теореми. Дійсно, відгук лінійної системи на шум завжди можна подати у вигляді інтегралу Дюамеля:

$$x(t) = \int_0^{+\infty} h(\theta)\eta(t-\theta)d\theta \approx \int_0^{\tau_r} h(\theta)\eta(t-\theta)d\theta \tag{28}$$

Умова $\Delta\omega_{вх}$>>$\Delta\omega_{рез}$ може бути представлена у вигляді:

$$\tau_c << \tau_r \tag{29}$$

Будемо вважати, що умова (29) виконується з великим запасом. Тоді можна вибрати інтервал

$$\tau_c << \tau << \tau_r \tag{30}$$

і подати (28) у вигляді суми:

$$x(t) \approx \sum_{n=1}^{N} \int_{n\tau}^{(n+1)\tau} h(\theta)\eta(t-\theta)d\theta \approx \sum_{n=1}^{N} h(n\tau) \int_{n\tau}^{(n+1)\tau} \eta(t-\theta)d\theta = \sum_{n=1}^{N} A_n \xi_n(t) \tag{31}$$

де ξ_n реалізації дифузійного процесу. За умов (30) всі ξ_n можна вважати статистично незалежними. В такому випадку розподіл суми (31) при $N \to \infty$ є гаусів.

СПІЛЬНА ДІЯ ШУМА І СИГНАЛА. ОПТИМАЛЬНИЙ ЛІНІЙНИЙ ФІЛЬТР. ВИЯВЛЕННЯ СИГНАЛІВ НА ФОНІ ШУМУ

Розглянемо важливу для практики задачу - прийом сигналу в присутності шуму. В теорії виділяється дві задачі. Перша пов‘язана з задачею про *виявлення сигналу на фоні шуму*, коли не ставиться питання про точне відтворення форми сигналу. Натомість необхідно з максимальною надійністю прийняти рішення про наявність, або відсутність сигналу. Друга задача є *виділення сигналу із шуму*, коли необхідно з максимально можливою точністю відтворити форму сигналу.

Якщо форми спектрів сигналу та шуму відрізняються, то природним використати лінійний фільтр, щоб підкреслити спектральні компоненти сигналу та згасити спектральні компоненти шуму.

Розглянемо задачу про виявлення сигналу. Статистичним критерієм, який дозволить виносити рішення є відношення сигнал/шум (s/n). Тоді, оптимальний фільтр має максимизувати це відношення. Тоді для гармонічного сигналу з інтенсивністю $a^2/2$, інтенсивність на виході буде $|K(\omega)|^2 a^2/2$. Відповідно, для шуму інтенсивності (дисперсії) будуть:

$$\sigma_{in}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)d\omega \qquad \sigma_{out}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)\left|K(\omega)\right|^2 d\omega \tag{32}$$

Відношення сигнал/шум – це відношення відповідних інтенсивностей. Тоді:

$$(s/n)_{in} = \frac{a^2}{4\int_0^{\infty} G(\omega)d\omega} \qquad (s/n)_{out} = \frac{a^2\left|K(\omega)\right|^2}{4\int_0^{\infty} G(\omega)\left|K(\omega)\right|^2 d\omega} \qquad \frac{(s/n)_{out}}{(s/n)_{in}} = \frac{\left|K(\omega)\right|^2 \int_0^{\infty} G(\omega)d\omega}{\int_0^{\infty} G(\omega)\left|K(\omega)\right|^2 d\omega} \tag{33}$$

З формул видно, що максимальне вихідне відношення сигнал/шум спостерігається при рівності частоти сигналу із резонансною ω_0. Резонансна крива фільтру має бути набагато вужче ширини спектру:

$$\Delta\omega << \Delta\omega_{in} \qquad (34)$$

Ця умова означає, що спектральна густина шуму приблизно стала. Отже:

$$(s/n)_{out} = \frac{a^2|K(\omega)|^2_{\max}}{4G(\omega_0)\int\limits_0^\infty |K(\omega)|^2 d\omega} = \frac{a^2}{4G(\omega_0)\Delta\omega_f} = \frac{a^2}{2\sigma_n^2} \quad \sigma_n^2 = 2G(\omega_0)\Delta\omega_f \quad \Delta\omega_f = \frac{\int\limits_0^\infty |K(\omega)|^2 d\omega}{|K(\omega)|^2_{\max}} \qquad (35)$$

де величина $\Delta\omega_f$ - шумова смуга пропускання фільтру, а σ^2_n - інтенсивність вхідного шуму, що приходиться на шумову смугу. Аналогічним чином вводиться ефективна ширина шумового спектру:

$$\Delta\omega_n = \frac{\int\limits_0^\infty |G(\omega)|^2 d\omega}{|G(\omega_0)|^2_{\max}} \qquad (36)$$

Тоді, по відомій смузі вхідного шуму, заданому вхідному значенню сигнал/шум, та необхідному вихідному значенню сигнал/шум можна вибрати необхідну смугу фільтру:

$$\Delta\omega_f = \frac{(s/n)_{in}}{(s/n)_{out}}\Delta\omega_n \qquad (37)$$

Для сигналу довільної форми:

$$S_0(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} s_0(\omega)e^{j\omega t}d\omega \quad I_0(t) = S_0^2(t) \qquad (38)$$

відношення сигнал/шум на виході:

$$(s/n)_{out} = \frac{I(t)}{\int\limits_{-\infty}^{-\infty} G(\omega)|K(\omega)|^2 d\omega} \qquad I(t) = \left(\int\limits_{-\infty}^{-\infty} s_0(\omega)K(\omega)d\omega\right)^2 \qquad (39)$$

Припустимо, що шум білий із спектральною густиною G_0. Тоді, використовуючи нерівність Коші-Буняковського можна записати:

$$(s/n)_{out} <= \frac{\left(\int\limits_{-\infty}^{-\infty}|s_0(\omega)|^2 d\omega\right)\left(\int\limits_{-\infty}^{-\infty}|K(\omega)|^2 d\omega\right)}{G_0\int\limits_{-\infty}^{-\infty}|K(\omega)|^2 d\omega} = \frac{\left(\int\limits_{-\infty}^{-\infty}|s_0(\omega)|^2 d\omega\right)}{G_0} = \frac{Q_0}{2\pi G_0} \qquad Q_0 = 2\pi\int\limits_{-\infty}^{-\infty}|s_0(\omega)|^2 d\omega \qquad (40)$$

де Q_0 - енергія сигналу. Рівність в (40) виникає за умов:

$$K_{opt}(\omega) = \alpha s_0^*(\omega)e^{-j\omega t_0} \qquad (41)$$

де α та t_0 довільні сталі (характеристики фільтру). Такий фільтр дає максимальне відношення сигнал/шум в момент t_0:

$$(s/n)_{out} = \frac{2\pi\left(\int\limits_{-\infty}^{-\infty} |s_0(\omega)|^2 e^{j\omega(t-t_0)} d\omega\right)^2}{G_0 Q_0} \qquad (42)$$

і називається *узгоджений фільтр* - частотна характеристика близька до форми сигналу, оскільки входить комплексно спряжене значення. Природно, що форма сигналу при цьому спотворюється, оскільки фільтр принципово не враховує фазу сигналу.

Таким чином оптимальний фільтр підкреслює спектральні компоненти сигналу. Узагальнення на випадок довільної форми спектру шуму може бути легко проведено, якщо згадати, що мета такого фільтру максимально подавити спектральні компоненти шуму. Отже у загальному випадку:

$$K_{opt}(\omega) = \alpha\, s_0^*(\omega) / G_0(\omega)\, e^{-j\omega t_0} \qquad (43)$$

тобто фільтр ураховує як спектр шуму, так і сигналу.

ВИДІЛЕННЯ СИГНАЛУ З ШУМУ. РІВНЯННЯ ВІНЕРА-ХОПФА

Для коректної постановки задачі необхідно вибрати критерій якості відтворення сигналу. Природно вибрати критерій мінімуму середньоквадратичної похибки відтворення. Тоді, вважаючи обидва сигнали статистично незалежними випадковими процесами:

$$\xi_1(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \xi_1(\omega) e^{-j\omega t} d\omega \quad \xi_2(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \xi_2(\omega) e^{-j\omega t} d\omega \quad \overline{\xi_1} = 0 \quad \overline{\xi_2} = 0 \qquad (44)$$

поставимо задачу знайти частотну характеристику K_ω фільтра, сумарний процес на виході якого:

$$\xi(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K_\omega \left(\xi_1(\omega) + \xi_2(\omega)\right) e^{-j\omega t} d\omega \qquad (45)$$

з деякою затримкою t_0 відтворював би вхідний сигнал ξ_1.

Запишемо ξ через інтеграл Дюамеля:

$$\xi(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} H(\theta)\left(\xi_1(t-\theta) + \xi_2(t-\theta)\right) d\omega \qquad (46)$$

Згідно із критерієм, середньоквадратичне значення похибки відтворення сигналу:

$$\overline{\mu^2(t)} = \overline{\left(\xi(t-t_0) - \xi_1(t)\right)^2} \qquad (47)$$

має бути мінімальним. З використанням (46) знаходимо $\langle\mu^2\rangle$:

$$\overline{\mu^2} = \overline{\xi^2(t-t_0)} + 2\overline{\xi(t-t_0)\xi_1(t)} + \overline{\xi_1^2(t)} = \qquad (48)$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} H(\theta)H(\theta')\left(B_1(\theta-\theta') + B_2(\theta-\theta')\right)d\theta d\theta' + 2\int\limits_{-\infty}^{+\infty} H(\theta)B_1(\theta-t_0)d\theta + B_1(0)$$

Варіюючи його апаратну функцію отримаємо:

$$\overline{\mu^2} == 2\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta H(\theta)\left\{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} H(\theta')\left(B_1(\theta-\theta') + B_2(\theta-\theta')\right)d\theta' - B_1(\theta-t_0)\right\}d\theta \qquad (49)$$

Звідси видно, що для обернення в нуль варіації, необхідно, що на нуль обертався підінтегральний вираз:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} H(\theta)\left(B_1(\tau-\theta) + B_2(\tau-\theta)\right)d\theta = B_1(\tau-t_0) \qquad (50)$$

Останній вираз носить назву *рівняння Вінера-Хопфа*. Звідси можна знайти передаточну характеристику фільтра. Дійсно:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K_\omega e^{j\omega\theta}\left(B_1(\tau-\theta) + B_2(\tau-\theta)\right)d\theta d\omega = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K_\omega\left(G_{1\omega} + G_{2\omega}\right)e^{j\omega\theta}d\omega = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_{1\omega}e^{j\omega(\theta-t_0)}d\omega \qquad (51)$$

Отже:

$$K_\omega = \frac{G_{1\omega}e^{-j\omega t_0}}{\left(G_{1\omega} + G_{2\omega}\right)} \qquad (52)$$

Для відношень сигнал/шум знаходимо:

$$\sigma_s^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_{1\omega}\left|K_\omega\right|^2 d\omega \quad \sigma_n^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_{2\omega}\left|K_\omega\right|^2 d\omega \qquad (53)$$

$$(s/n)_{in} = \frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_{1\omega}d\omega}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_{2\omega}d\omega} \quad (s/n)_{out} = \frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_{1\omega}\left|K_\omega\right|^2 d\omega}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} G_{2\omega}\left|K_\omega\right|^2 d\omega}$$

Проаналізуємо деякі крайні випадки:

Відношення сигнал/шум велике і спектри сильно перекриваються. При цьому $G_1 >> G_2$ і $K_\omega \approx 1$. Тоді $(s/n)_{in} \approx (s/n)_{out} >> 1$. Оптимальний фільтр ніякої користі не приносить.

Відношення сигнал/шум мале і спектри майже не перекриваються. При цьому $K_\omega \approx 1$ за умов $G_1 \neq 0$ і $K_\omega \approx 0$ за умов $G_2 \neq 0$. Тоді $\sigma^2_S \approx \sigma^2_1$ та $\sigma^2_n \approx 0$. Отже $(s/n)_{out} >> 1$. Оптимальний фільтр максимально ефективний.

Відношення сигнал/шум мале і спектри сильно перекриваються. Вважаючи $G_1 << G_2$ отримаємо $(s/n)_{out} << 1$. Оптимальний фільтр максимально неефективний так як і в випадку з великим відношенням сигнал/шум.

ОПТИМАЛЬНІ ФІЛЬТРИ ТА КОРЕЛЯТОРИ.

Розглянуті методи фільтрації найбільш ефективні, коли спектри сигналу та шуму істотно відрізняються. Однак, якщо відрізняються спектри, то відрізняються і кореляційні функції. Тому, для виявлення сигналу можна використовувати методи спряжені по Фур'є - методи основані на вимірюванні автокореляційної функції. Прилади які вимірюють автокореляційні функції називають корелятори.

Легше всього це пояснити на прикладі суперпозиції гармонічного сигналу і стаціонарного шуму із кінцевим часом кореляції τ_C:

$$\eta(t) = S(t) + \xi(t) = a\cos\omega_0 t + \xi(t) \qquad (54)$$

Тоді на виході корелятора маємо:

$$B_\eta = \overline{\eta\eta_\tau} = \overline{SS_\tau} + \overline{S\xi_\tau} + \overline{\xi\eta_\tau} + \overline{\xi\xi_\tau} = \frac{a^2}{2}\cos\omega_0\tau + B_\xi \qquad (55)$$

Для стаціонарного шуму при $t >> \tau_C$ кореляційна функція обертається на нуль. Тобто, починаючи з деякого моменту на виході приладу буде реєструватися кореляційна функція сигналу. Це значить, що при великих затримках з'являється можливість реєструвати будь-які слабі гармонічні сигнали.

Таким чином, з принципіальної точки зору методи виявлення сигналу з допомогою фільтрів та кореляторів абсолютно еквівалентні. Виграш у відношенні сигнал/шум досягається за рахунок збільшення часу виміру, оскільки стала часу фільтра $\tau_f \sim 1/\Delta\omega_f$. Практично ж кореляційний приймач може бути набагато простішим приладом, ніж вузькосмуговий фільтр. Нарешті, кореляційним приймачем можна замінити і оптимальний фільтр пристосований для виявлення сигналу довільної форми.