МОДЕЛІ ВИПАДКОВИХ ПОЛІВ ТА ПРОЦЕСІВ

Найбільш загальним є поділення випадкових процесів на два класи: з безперервним часом і з дискретним. З цих класів випадкових процесів, загалом стаціонарних можна виділити підкласи процесів, стаціонарних в широкому сенсі, стаціонарних у вузькому сенсі, ергодичних. Іншими ознаками класифікації є енергетичні характеристики випадкових процесів і пов'язаної з ними властивості безперервності. Кожний з вказаних класів і підкласів подається різноманітними випадковими процесами, керованими різними розподілами вірогідності. Наприклад, два стаціонарних в широкому сенсі випадкових процеси, що підкоряються двом абсолютно різним двовимірним функціям розподілу і що відображають різні за фізичною природою явища, можуть мати співпадаючі кореляційні функції або спектральну густину потужності.

Повний імовірнісний опис випадкового процесу, який назвемо моделлю випадкового процесу, визначається послідовністю скінченновимірних функцій розподілу.

Функція розподілу у міру зростання числа n все більш повно характеризує випадковий процес, причому функція F_n містить інформацію про всі функції розподілу порядку $k<n$, але не навпаки. На щастя, існують деякі спеціальні види випадкових процесів, для яких одновимірна і/або двовимірна функції розподілу дозволяють визначити послідовність функцій F_n будь-якого порядку.

Детермінований процес. Якщо безліч реалізацій процесу складається з однієї реалізації, що з'являється з вірогідністю одиниця, то такий процес називають детермінованим. Повний і єдиний опис детермінованого процесу подається заданою функцією $s(t)$ часу t. Цей процес можна розглядати як вироджений випадковий процес, функція розподілу якого – функція Хевісайда, а розподіл дельта-функція.

Квазідетерміновані випадкові процеси. Квазідетермінований процес подається сукупністю функцій часу заданого виду $s(t, \theta)$, залежних від випадкового параметра θ (взагалі то кажучи, векторного). Кожному можливому значенню випадкової величини θ відповідає одна реалізація квазідетермінованого процесу.

Простим прикладом квазідетермінованого процесу є гармонійний сигнал з випадковими амплітудами, частотою і фазою. При рівномірно розподіленій фазі і сталій частоті цей сигнал стаціонарний у вузькому сенсі, а при тих же умовах і при сталій амплітуді — ергодичний. Кінцевовимірний розподіл будь-якого порядку квазідетермінованого процесу повністю визначається його одновимірним розподілом.

Випадкові процеси з незалежними значеннями. Ще одним класом випадкових процесів, для якого вся імовірнісна інформація міститься в одновимірному розподілі, є процеси з незалежними значеннями в не співпадаючі моменти часу.

Процес $u(t)$ називають *випадковими з незалежними прирощеннями,* якщо для будь-якої послідовності моментів часу $t_1<t_2< ... <t_n$ випадкові величини $u(t_1)$, $u(t_2)–u(t_1)$ ..., $u(t_n)–u(t_{n-1})$ незалежні. Будь-який скінченновимірний розподіл процесу з незалежними прирощеннями визначається його одновимірним розподілом і розподілом прирощення, тобто двовимірним розподілом.

Марківський процес є ще однією моделлю випадкового процесу, повний імовірнісний опис якого дається розподілом другого порядку. Ця модель широко використовується в прикладних задачах теорії випадкових процесів.

Марківський процес – процес без післядії, що аналітично виражається наступним співвідношенням між густинами розподілів імовірності n-того та $n–1$-шого порядку випадкового процесу:

$$p_n(t_1,u_1;t_2,u_2...;t_n,u_n) = p_{n-1}(t_1,u_1;t_2,u_2...;t_{n-1},u_{n-1}) \cdot v_2(t_n,u_n|t_{n-1},u_{n-1}) \qquad (1)$$

Тут $v_2(t_n,u_n|t_{n-1},u_{n-1})$ – умовна густина розподілу того, що випадковий процес набуде в момент t_n значення u_n, за умови, що в попередній момент було набуто значення u_{n-1}. Водночас це означає, що майбутній стан марківського процесу u_n і минулі стани починаючи із u_{n-2} при фіксованому нинішньому стані u_{n-1} незалежні. Іншими словами, майбутні стани пов'язані минулим тільки через фіксований в даний момент часу стан, в якому виявляється «закодовано» все минуле марківського процесу.

ЛОКАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕССІВ

Оскільки поняття безперервності і диференціювання випадкового процесу $u(t)$ пов'язані із збіжністю за деяким критерієм, послідовності випадкових величин $u_{\Delta T}(t)=u(t+T)-u(t)$ і $u_{\Delta T}(t)/\Delta T$ при $\Delta T\to 0$, то необхідно заздалегідь знайти деякі імовірнісні характеристики (середнє, кореляційну функцію, спектральну щільність потужності) різниці $u_{\Delta T}(t)$.

Користуючись визначеннями середнього та кореляційної функції знайдемо для $u_{\Delta T}(t)$:

$$\langle u_{\Delta T}(t)\rangle = \langle u(t+\Delta T)\rangle - \langle u(t)\rangle \qquad (2)$$
$$B_{u_{\Delta T}}(t_1,t_2) = B_u(t_1+\Delta T, t_2+\Delta T) - B_u(t_1+\Delta T, t_2) - B_u(t_1, t_2+\Delta T) + B_u(t_1,t_2)$$

Із останнього виразу взявши $t_1=t_2$ отримаємо середній квадрат процесу $u_{\Delta T}(t)$:

$$\langle u^2_{\Delta T}(t)\rangle = B_u(t+\Delta T, t+\Delta T) - 2B_u(t, t+\Delta T) + B_u(t,t) \qquad (3)$$

Взаємні кореляційні функції процесів $u\ (t)$ та $u_{\Delta T}(t)$ визначаються, як:

$$B_{uu_{\Delta T}}(t_1,t_2) = B_u(t_1, t_2+\Delta T) - B_u(t_1,t_2) \qquad (4)$$
$$B_{u_{\Delta T}u}(t_1,t_2) = B_u(t_1+\Delta T, t_2) - B_u(t_1,t_2)$$

Для стаціонарного процесу $u(t)$, очевидно, середнє $\langle u_{\Delta T}(t)\rangle$ дорівнює нулю, а кореляційні функції і середній квадрат процесу знайдемо із (1)-(3):

$$B_{u_{\Delta T}}(\tau) = 2B_u(\tau) - B_u(\tau+\Delta T) - B_u(\tau-\Delta T) \qquad (5)$$
$$\mu_2(u_{\Delta T}(t)) = \sigma^{\acute{e}}(u_{\Delta T}(t)) = B_{u_{\Delta T}}(0) = 2\left(B_u(0) - B_u(\Delta T)\right)$$
$$B_{uu_{\Delta T}}(\tau) = B_u(\tau+\Delta T) - B_u(\tau)$$
$$B_{u_{\Delta T}u}(\tau) = B_u(\tau-\Delta T) - B_u(\tau)$$

З останніх виразів знайдемо спектральну густину потужності скориставшись теоремою Вінера-Хінчіна:

$$G_{u_{\Delta T}}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} B_u(\tau)\left[2\exp(-j\omega\tau) - \exp(-j\omega(\tau+\Delta T)) - \exp(-j\omega(\tau-\Delta T))\right]d\tau = \qquad (6)$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2B_u(\tau)\left[1+\cos(\omega\Delta T)\right]\exp(-j\omega\tau)\,d\tau = 4\sin^2(\omega\Delta T/2)\,G_u(\omega)$$

Аналогічним чином знайдемо і взаємну спектральну густину потужності процесів $u(t)$ та $u_{\Delta T}(t)$:

$$G_{uu_{\Delta T}}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[B_u(\tau+\Delta T)-B_u(\tau)]\exp(-j\omega\tau)d\tau = \\ =(\exp(j\omega\Delta T)-1)G_u(\omega) \tag{7}$$

Тепер можна знайти умови неперервності в середньоквадратичному випадкового процесу в точці t. За визначенням неперервності в середньоквадратичному, необхідно, щоб вираз (2) прямував до нуля в границі $\Delta T\to 0$. Ця умова виконується, якщо кореляційна функція за $t_2=t_1=t$ обмежена:

$$l.i.m.\langle u_{\Delta T}^2(t)\rangle=0\Rightarrow \lim_{t_1,t_2\to t} B_u(t_1,t_2)=B_u(t,t)=\langle u^2(t)\rangle<\infty \tag{8}$$

Для стаціонарного процесу умовою неперервності в точці t в середньоквадратичному буде неперервність кореляційної функції при $\tau=0$, або обмеженість середньої потужності процесу:

$$B_u(0)=\int_{-\infty}^{\infty}G_u(\omega)d\omega<\infty \tag{9}$$

Отже спектральна густина потужності неперервного випадкового стаціонарного процесу спадати має спадати швидше ніж $\omega^{-(1+\varepsilon)}$, $\varepsilon>0$.

Конкретизуємо тепер поняття похідної випадкового процесу. Існування останньої в середньоквадратичному забезпечується існуванням кореляційної функції похідної, що визначається як:

$$B_{u'}(t_1,t_2)=\lim_{\Delta T\to 0}\langle u_{\Delta T}(t_1)u_{\Delta T}(t_2)/\Delta T^2\rangle=\lim_{\Delta T\to 0}\frac{1}{\Delta T^2}B_{u_{\Delta T}}(t_1,t_2) \tag{10}$$

Розвиваючи в ряд Тейлора за ΔT вираз для кореляційної функції різниці випадкових процесів в (2) і підставляючи отримані вирази в (10) отримаємо:

$$B_{u'}(t_1,t_2)=\frac{\partial B_u^2(t_1,t_2)}{\partial t_1\partial t_2} \tag{11}$$

Тобто, неперервність другої змішаної похідної кореляційної функції при $t_2=t_1=t$ є необхідною і достатньою умовою для диференційованості в середньоквадратичному.

Середнє значення похідної випадкового процесу:

$$\langle u'(t)\rangle=\lim_{\Delta T\to 0}\langle u_{\Delta T}(t)/\Delta T\rangle=\lim_{\Delta T\to 0}\frac{\langle u(t+\Delta T)\rangle-\langle u(t)\rangle}{\Delta T}=\langle u(t)\rangle' \tag{12}$$

Розвиваючи в ряд Тейлора (4) за t_2, знайдемо взаємну кореляційну функцію випадкового процесу і його похідної:

$$B_{uu'}(t_1,t_2)=\lim_{\Delta T\to 0}\langle u_{\Delta T}(t_1)u_{\Delta T}(t_2)/\Delta T\rangle=\lim_{\Delta T\to 0}\frac{1}{\Delta T}B_{uu_{\Delta T}}(t_1,t_2)= \\ =\lim_{\Delta T\to 0}\frac{1}{\Delta T}\left[\frac{\partial B_u(t_1,t_2)}{\partial t_2}\Delta T+o(\Delta T)\right]=\frac{\partial B_u(t_1,t_2)}{\partial t_2} \tag{13}$$

Якщо випадковий процес стаціонарний, то, очевидно, середнє від похідної дорівнює нулю. Розвинувши праву частину (5) у ряд Тейлора, одержуємо для кореляційної функції похідної наступний вираз:

$$B_{u'}(\tau) = \lim_{\Delta T \to 0} B_{u_{\Delta T}}(\tau) \big/ \Delta T^2 = \lim_{\Delta T \to 0} \left(-B''_u(\tau) + o(\Delta T)\right) = -B''_u(\tau) \tag{14}$$

А із (6) знаходимо спектральну густину похідної стаціонарного випадкового процесу:

$$G_{u'}(\omega) = \lim_{\Delta T \to 0} \frac{4}{\Delta T^2} \sin^2(\omega \Delta T/2) G_u(\omega) = \omega^2 G_u(\omega) \tag{15}$$

Дисперсія або середня потужність похідної випадкового процесу завжди значніша ніж потужність самого процесу:

$$B_{u'}(0) = -B_{u''}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 G_u(\omega) d\omega \tag{16}$$

Необхідною і достатньою умовою диференціювання в середньоквадратичному стаціонарного випадкового процесу є кінцева середня потужність (16) похідної процесу. Це умова, як видно із (16), означає також, що інтеграл є обмежений, тобто спектральна густина потужності процесу, на високих частотах повинна спадати швидше, ніж ω^3.

Корисно ввести також відношення середніх потужностей похідної $u'(t)$ і процесу $u(t)$, що за розмірністю є квадратом частоти:

$$\omega_1^2 = \frac{B_{u'}(0)}{B_u(0)} = -R_{u''}(0) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 G_u(\omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} G_u(\omega) d\omega} \tag{17}$$

Легко узагальнити отримані результати для похідних більш високого порядку. Згідно із ідеями розвинутими вище, для існування n-ої похідної $u^{(n)}(t)$ випадкового процесу необхідно і достатньо, щоб існувала безперервна при $t_1 = t_2 = t$ змішана похідна $2n$-того порядку від кореляційної функції процесу $u(t)$:

$$B_{u^{(n)}}(t_1, t_2) = \frac{\partial^{2n} B_u(t_1, t_2)}{\partial t_1^n \partial t_2^n} \tag{18}$$

Кореляційна функція n-ої похідної стаціонарного процесу

$$B_{u^{(n)}}(\tau) = (-1)^n B_u^{(2n)}(\tau), \tag{19}$$

а її спектральна густина потужності:

$$G_{u^{(n)}}(\omega)=\omega^{2n}G_u(\omega) \qquad (20)$$

Неважко довести, що взаємна кореляційна функція *k*-тої та *l*-тої похідних процесу визначаються як:

$$B_{u^{(k)}u^{(l)}}(t_1,t_2)=\frac{\partial^{k+l}B_u(t_1,t_2)}{\partial t_1^k\partial t_2^l} \qquad (21)$$

А для стаціонарних процесів:

$$B_{u^{(k)}u^{(l)}}(\tau)=(-1)^k B_u^{(k+l)}(\tau), \qquad (22)$$

Взаємна кореляційна функція стаціонарного в широкому сенсі процесу та його похідної визначається згідно із (13) при $\tau=t_2-t_1$

$$B_{uu'}(\tau)=-B_{u'u}(\tau)=\frac{\partial B_u(\tau)}{\partial\tau} \qquad (23)$$

Скориставшись теоремою Вінера-Хінчіна, отримаємо взаємний спектр потужності стаціонарного процесу і його похідної:

$$G_{uu'}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial B_u(\tau)}{d\tau}\exp(-i\omega\tau)d\tau=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}B_u(\tau)\frac{\partial\exp(-i\omega\tau)}{d\tau}d\tau=i\omega B_u(\tau) \qquad (24)$$

Оскільки взаємний спектр чисто уявна величина, взаємна кореляційна функція величина непарна, а отже $B_u(0)=0$ – випадкова функція і її похідна в співпадаючі моменти часу некорельовані.

ГАУСІВ ПРОЦЕС

Незважаючи на широкий спектр задач та різноманітність систем, в яких спостерігаються ті чи інші випадкові процеси, більшість із них можна звести до порівняно невеликого числа математичних моделей. Найбільш розповсюджена модель – це модель гаусового випадкового процесу. Модель гауссового випадкового процесу широко використовується в природознавстві і техніці. У радіотехніці і зв'язку гауссовий випадковий процес є адекватною математичною моделлю активних і пасивних перешкод, атмосферних і космічних шумів. Флуктуаційні шуми приймальних пристроїв, обумовлені дробовим ефектом і тепловим рухом електронів, також підкоряються нормальному закону розподілу. Адекватність моделі гауссового випадкового процесу багатьом реальним перешкодам і сигналам і її універсальність пояснюються у багатьох випадках дією центральної граничної теореми теорії вірогідності. Використання її в дозволяє оминути деталізацію механізмів або мікроскопічну картину явища і одразу вказати властивості багатовимірних розподілів, похідних, інтегралів тощо.

Крім того, поява гаусівського розподілу в багатьох фізичних задачах пов'язаних із статистикою має більш фундамнтальні причини. Імовірність реалізації мікростану $\{p,q\}$ (тут p, q – узагальнені імпульс і координата) дається канонічним розподілом Гібса:

$$p(\vec{p},\vec{q})d^3\vec{p}d^3\vec{q} = \exp\left(\frac{G - H(p,q)}{kT}\right)d^3\vec{p}d^3\vec{q} \qquad (25)$$

де G – вільна енергія, а H – гамільтоніан системи, який в більшості випадків є невід'ємна біквадратична форма. Наприклад, для газу частинок, що не взаємодіють, розподіл (23) переходить в максвелів (гаусів):

$$p(\vec{v})d^3\vec{v} = A\exp\left(-\frac{m\vec{v}^2}{2kT}\right)d^3\vec{v} \qquad (26)$$

Якщо, система знаходиться поблизу сталого стану рівноваги, виконуючи невеликі рухи поблизу нього, то і потенціальну частину гамільтоніану можна подати у вигляді невід'ємної біквадратичної форми і розподіл (23) є також гаусів.

Часто розподіли випадкових величин мають типовий вигляд з характерним максимумом. Поблизу максимуму x_0 функцію розподілу ймовірностей можна подати у вигляді ряду Тейлора. Якщо обмежитись членами тільки другого порядку малості, то ряд набуває вигляду:

$$p(x) = A\left(1 - K\frac{(x - x_0)^2}{2} + \ldots\right) \qquad (27)$$

що можна розглядати, як перші члени ряду для експоненти. Тобто реальний розподіл такого характеру завжди з деякою точністю можна апроксимувати гаусовим із середнім x_0 і дисперсією $\sigma^2=K^{-1}$. Таким чином, гаусів розподіл можна завжди вибрати, як нульове наближення.

Нарешті, в багатьох моделях випадкових процесів, які загалом то відмінні від гаусового, розподіл деяких випадкових параметрів береться у вигляді гаусового. Робиться це або із фізичних міркувань або міркувань аналітичної «зручності» функції Гауса.

Одновимірний нормальний розподіл густини вірогідності подається у вигляді:

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{\left(x-\langle x\rangle\right)^2}{2\sigma^2}\right),\qquad \langle x\rangle=m_1,\quad \sigma^2=\mu_2 \tag{28}$$

Неважко знайти, що розподіл має відмінні від нуля лише парні моменти:

$$\left\langle x-\langle x\rangle\right\rangle=\begin{cases}(n-1)!!\sigma^n, n=2k\\ 0, \qquad n=2k+1\end{cases} \tag{29}$$

Характеристична функція має вигляд:

$$\Theta(\omega)=\exp\left(i\omega m_1-\tfrac{1}{2}\omega^2\sigma^2\right) \tag{30}$$

Можна узагальнити поняття гаусового розподілу, ввівши поняття *гаусового процесу.* Випадковий процес $x(t)$ називається гауссовим, якщо сумісна густина вірогідності будь-якої кінцевої сукупності величин $x_k=x(t_k)$, $k=1\ldots n$ нормальна, тобто визначається за формулою:

$$p(x_1,x_2,\ldots x_n)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n D}}\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_p\sum_q^n A_{pq}(x_p-\langle x_p\rangle)(x_q-\langle x_q\rangle)\right), \tag{31}$$

$$\hat{A}=\hat{B}^{-1},\qquad B_{pq}=\langle x_p x_q\rangle-\langle x_p\rangle\langle x_q\rangle,\qquad D=\left\|\hat{B}\right\|$$

Тобто статистичні характеристики гаусового процесу виражаються через елементи кореляційної матриці. Виконуючи багатовимірне перетворення Фурьє (29) запишемо характеристичну функцію гаусового процесу:

$$\Theta(v_1,v_2,\ldots v_n)=\exp\left(j\sum_q^n\langle x_q\rangle v_q-\frac{1}{2}\sum_p\sum_q^n B_{pq}v_p v_q\right) \tag{32}$$

Якщо гаусів випадковий процес стаціонарний в широкому сенсі, то середні значення $a_k=a$ сталі, а кореляційна функція $B_x(t_1,t_2)$ залежить не від двох змінних t_1 і t_2, а тільки від їх різниці $\tau=t_2-t_1$. При цьому розподіл вірогідності (29) гауссового процесу не міняється для будь-якого зсуву групи точок $t_1\ldots,t_n$ уздовж осі часу на стале значення. Інакше кажучи, при виконанні вказаних умов гауссовский випадковий процес є строго стаціонарним. Таким чином, із стаціонарності в широкому сенсі гауссового випадкового процесу слідує його стаціонарність у вузькому сенсі.

Густина вірогідності стаціонарного гауссового процесу довільного n-го порядку подається у скалярній формі:

$$p(x_1,x_2,\ldots x_n,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_{n-1})=\frac{1}{\sqrt{\left(2\pi\sigma^2\right)^n D}}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2 D}\sum_p\sum_q^n R_{pq}(x_p-a)(x_q-a)\right), \tag{33}$$

де σ^2 – дисперсія процесу, D – детермінант матриці R_x, елементи якої $R_{pq}=R_{qp}=R(t_k-t_1)=B_x(\tau_k-\tau_i)/B_x(0)$ є значення нормованої кореляційної функції, а D_{pq} – алгебраїчне доповнення елементу R_{pq} в матриці R_x.

Багатовимірна характеристична функція стаціонарного гаусового випадкового процесу подається в такому випадку як:

$$\Theta(v_1, v_2, \ldots v_n, \tau_1, \tau_2, \ldots \tau_n) = \exp\left(ja\sum_q^n v_q - \frac{\sigma^2}{2}\sum_p \sum_q^n R_{pq} v_p v_q \right) \qquad (34)$$

У важливому для практики випадку для двомірного розподілу стаціонарного гаусового процесу маємо:

$$p(x_1, x_2) = \qquad (35)$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma\sqrt{1-R^2(\tau)}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2\left(1-R^2(\tau)\right)} \left[(x_1-a)^2 + (x_2-a)^2 - 2R(\tau)(x_1-a)(x_2-a) \right] \right)$$

Гаусів процес має деякі універсальні властивості. Якщо будь-які два значення гауссового випадкового процесу в не співпадаючі моменти часу некорельовані, то $R_{ik}=R_{ki}=0$ при $i \neq k$ і тоді матриця R_x – діагональна з елементами R_x=l по діагоналі. В цьому випадку густина вірогідності *n*-го порядку гауссового процесу є добутком *n* одновимірних нормальних густин розподілу, що відповідає незалежності значень процесу в будь-які два моменти часу. Таким чином, стаціонарний гауссовий випадковий процес з некорельованими значеннями є також процесом з незалежними значеннями.

Сума двох статистично залежних гаусових величин є гаусова величина. Дійсно, із використанням (35), отримаємо:

$$p(y = x_1 + x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(y - x_2, x_2)\,dx_2 = \frac{1}{2\pi\sqrt{\left(1+R^2(\tau)\right)\sigma^2}} \exp\left(-\frac{y}{4\left(1-R^2(\tau)\right)\sigma^2} \right) \qquad (36)$$

Загалом згідно із ЦГТ, будь-яка лінійна комбінація гаусових величин є також гаусова величина. Зокрема гаусовими будуть спектральні амплітуди, похідні, інтеграли і будь-які лінійні комбінації гаусових величин.

Для гаусових випадкових величин спільні моменти порядку вище ніж другий можуть бути виражені через моменти першого та другого порядку. Дійсно із:

$$\overline{x_1^p x_1^q \ldots x_1^k} = \frac{1}{i^{p+q+\ldots+k}} \frac{d^{p+q+\ldots+k}}{d\omega^p d\omega^q \ldots d\omega^k} \Theta(\omega)\Big|_{\omega=0} \qquad (37)$$

витікає, що оскільки єдиними параметрами, що входять у характеристичну функцію є коефіцієнти матриці кореляції, то і відповідні моменти залежать тільки від моментів першого та другого порядку.

Оскільки одновимірний розподіл для гаусового процесу визначається тільки середнім та дисперсією, одновимірна густина вірогідності для похідної гаусового процесу дається:

$$p_{u'}(y,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{u'}^2(t)}}\exp\left(-\frac{\left(y-\langle u'\rangle\right)^2}{2\sigma_{u'}^2(t)}\right) \qquad (38)$$

де, згідно із (12),

$$\langle u'(t)\rangle=\langle u(t)\rangle', \quad B_{u'}(t_1,t_2)=\left.\frac{\partial B_u^2(t_1,t_2)}{\partial t_1\partial t_2}\right|_{t_1=t_2=t}=\left(\langle u(t)\rangle'\right)^2 \qquad (39)$$

Для стаціонарного процесу вираз (40) спрощується, адже *<u'(t)>*=0 та $\sigma_{u'}^2=-B_u''(0)$. Якщо до того ж і $\langle u\rangle=0 \Rightarrow \sigma_u^2=B_u(0)$, то:

$$p_{u'}(y,t)=\frac{1}{\sigma_{u'}(t)\omega_1\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(y)^2}{2\sigma_{u'}^2(t)\omega_1^2}\right) \qquad (40)$$

де ω_1 – визначається із (17).

Якщо маємо стаціонарний процес, то x^2 та $(x')^2$ величини сталі, а отже:

$$\frac{d}{dt}\overline{x^2}=\overline{2x\dot{x}}=0, \quad \frac{d}{dt}\overline{\dot{x}^2}=\overline{2\dot{x}\ddot{x}}=0 \qquad (41)$$

Тобто швидкість не корелює ні з координатою ні з прискоренням. Дисперсії похідних дорівнюють:

$$\sigma^2=\int G(\omega)d\omega \Rightarrow \qquad (42)$$

$$\sigma_1^2=\int\omega^2 G(\omega)d\omega=-\sigma^2\frac{d^2}{d\tau^2}R(0) \quad \sigma_2^2=\int\omega^4 G(\omega)d\omega=-\sigma^2\frac{d^4}{d\tau^4}R(0)$$

Звідси видно, що дисперсія похідної від випадкової величини більше ніж дисперсія самої величини.

Оскільки для значення стаціонарного процесу і його похідної в співпадаючі моменти часу не корелюють, сумісна густина імовірності гаусового центрованого стаціонарного випадкового процесу і його похідної в співпадаючі моменти часу становить:

$$p_{uu'}(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_u^2\omega_1^2}\exp\left(-\frac{\left(x^2+y^2/\omega_1^2\right)}{2\sigma_u^2}\right) \qquad (43)$$

Натомість в не співпадаючі моменти часу:

$$p(x,y,\tau)=\frac{1}{2\pi\sigma_u^2\sqrt{\omega_1^2-R_u'(\tau)^2}}\exp\left(-\frac{\omega_1^2x^2-2R_u'(\tau)xy+y^2}{2\sigma_u^2\left(\omega_1^2-R_u'(\tau)^2\right)}\right) \qquad (44)$$