СТОХАСТИЧНІ ДИФЕРЕНЦІЙНІ РІВНЯННЯ

ПОСТАНОВКА ПИТАННЯ

Існує принаймні два принципових способи винаходження розв'язків для динамічних систем під дією випадкових сил чи випадково змінюючихся параметрів. Перший, полягає тому, що існують рівняння, які описують еволюцію функціїї чи функцій розподілу вірогідностей (рівняння Фокера-Планка). Тоді, неважко визначити всі інші характеристики випадкового процессу. Задача в такому випадку полягає в виборі коректної моделі випадкового процесу та та знаходженні зв'язку параметрів динамічної системи із параметрами рівнянь.

Другий підход в своїй основі передбачає розв'язок (принаймні наближений) дифірінційних рівнянь руху, які описують динамічну систему. Щоб прояснити цей підхід розглянемо випадок лінійної динамічної системи, яка описується диференційним рівнянням:

$$\hat{L} \cdot u(t) = f(t), \quad \hat{L} = \sum_{k=0}^{n} a_k(t) \frac{d^k}{dt^k} \tag{1}$$

де $f(t)$ коефіцієнти a_k випадкові функції часу. Можливо також, що і початкові умови також випадкові. Нехай тепер для всіх початкових умов, реалізацій зовнішньої сили та a_k залишаються справедливими умови єдиничності розв'язок. Тоді, рівняння **Error! Reference source not found.** породжує множину реалізацій $u(t)$, статистичні властивості якої цілком визначаються статистикою вихідних випадкових функцій та величин. Задача якраз і полягає в тому, щоб по відомим вихідним статистикам визначити статистику процесса $u(t)$.

АНАЛІЗ ВИПАДКОВИХ КОЛИВАНЬ ШЛЯХОМ УСЕРЕДНЕННЯ ТОЧНОГО РОЗВ'ЯЗКУ

Розглянемо тепер для прикладу диференційне рівняння першого порядку із випадковою зовнішньою силою:

$$\dot{u} + \beta u = f(t) \tag{2}$$

яке описує, наприклад, швидкість матеріальної частки у в`язкому середовищі, напругу на конденсаторі в RC-колі, струм в RL-колі. Також до рівняння **Error! Reference source not found.** зводиться задача про флуктуації в автогенераторі (права частина – скорочене рівняння для амплітуди коливань). Це рівняння припускає точний розв'язок. Проінтегрувавши за початкових умовах $u(0)=u_0$, отримаємо:

$$u(t) = u_0 e^{-\beta t} + e^{-\beta t}\int_0^t e^{-\beta\theta} f(\theta)d\theta \tag{3}$$

Якщо випадковими є тількі початкові умови та зовнішня сила, то усереднення можна провести без особливих проблем:

$$\langle u\rangle(t) = \langle u_0\rangle e^{-\beta t} + e^{-\beta t}\int_0^t e^{\beta\theta}\langle f\rangle(\theta)d\theta \tag{4}$$

Для визначення дисперсії додатково необхідно знати ще і функцію кореляції для випадкової сили. Нехай середнє значення випадкової сили та початкових умов дорівнює нулю. Тоді:

$$D[u(t)] = e^{-2\beta t}\int_0^t\int_0^t e^{\beta(\theta+\theta')}\langle f(\theta)f(\theta')\rangle d\theta d\theta' \tag{5}$$

В найпростішому випадку, якщо *f(t)* стаціонарний δ-корельований процес:

$$\langle f(\theta) f(\theta') \rangle = C\delta(\xi' - \xi'') \tag{6}$$

Зауважимо, що імпульс сили неперервна функція з незалежними прирощеннями оскільки визначається як $\Delta p = \int_0^t f(\vartheta) d\vartheta$ і розподілен за гаусовим законом. Підставляючи **Error! Reference source not found.** в **Error! Reference source not found.** отримаємо:

$$\sigma^2 = D[u(t)] = Ce^{-2\beta t} \int_0^t \int_0^t e^{\beta(\theta+\theta')} \delta(\theta - \theta') d\theta d\theta' = \frac{C}{2\beta}(1 - e^{-2\beta t}) = \sigma_\infty^2 (1 - e^{-2\beta t}) \tag{7}$$

В граничному випадку *t*→∞ дисперсія незалежить від початкових умов і цілком визначається інтенсивністю флуктуацій *C* та нормованим "коефіцієнтом тертя" β. З фізичних міркувань зрозуміло, що при *t*→∞ система приходить в термодинамічну рівновагу. Якщо ідеться про частку в в`язкому середовищі, то розподіл швидкості має бути максвелівським:

$$p_u(u) = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} e^{-\frac{mu^2}{2kT}} \tag{8}$$

Співставляючи останній вираз із **Error! Reference source not found.** отримаємо, що $\sigma^2_\infty = kT/m = C/2\beta$. Звідци $C = 2kT\alpha/m^2$. Тут α – коефіцієнт тертя. Для "справжньої" сили $F(t) = m \cdot f(t)$ інтенсивність флуктуацій *B* становить $B = 2kT\alpha$. Аналогічним чином для *RL*-кола зовнішня дія – це випадкові теплові е.р.с. *e(t)* на резисторі, а „коефіцієнт тертя" – омічний опір *R*. Тоді кореляційна функція для *e(t)* буде:

$$\langle e(t) e(t') \rangle = 2kTR\delta(t - t') \tag{9}$$

Скориставшись теоремою Вінера-Хічіна можна отримати формулу Найквіста для спектральній потужності теплових шумів:

$$G(\omega) = \frac{1}{\pi} kTR(\omega) \tag{10}$$

Інтегруючи вираз $u = ds/dt$ за випадкової початкової умови $s(0) = s_0$, отримаємо:

$$s(t) - s_0 = \frac{u_0}{\beta}\left(1 - e^{-\beta t}\right) + \frac{1}{\beta}\int_0^t \left(1 - e^{-\beta(t-\theta)}\right) f(\theta) d\theta \tag{11}$$

Звідци безпосередньо виходить, що:

$$\langle s\rangle = \langle s_0\rangle + \frac{u_0}{\beta}\left(1-e^{-\beta t}\right) \qquad (12)$$

Оскільки прирощення імпульсу сили $\Delta p = f\Delta t$ розподілено нормально, то і величина:

$$s(t)-\bar{s} = \frac{1}{\beta}\int_0^t\left(1-e^{-\beta(t-\theta)}\right)f(\theta)d\theta \qquad (13)$$

розподілена нормально. Знайдемо дисперсію цієї величини:

$$D[s] = \overline{(s-\bar{s})^2} = \frac{1}{\beta^2}\int_0^t\int_0^t\left(1-e^{-\beta(t-\theta)}\right)\left(1-e^{-\beta(t-\theta')}\right)\underbrace{\overline{f(\theta)f(\theta')}}_{\delta(\theta-\theta')}d\theta d\theta' = \qquad (14)$$

$$= \frac{kT}{\beta^2 m}\left(2\beta t - 3 + 4e^{-\beta t} - e^{-2\beta t}\right)$$

За умови $\beta t << 1$:

$$D[s] = \frac{2kT\beta}{3m}t^3 = \frac{2kT\alpha}{3m}t^3 = \frac{2kTR}{3L}t^3 = \frac{2kT}{3\tau}t^3 \qquad (15)$$

Якщо бути цілком послідовним, то для броуновської частки проміжки часу менше часу релаксації розглядати некоректно, оскільки в такому випадку рівняння руху **Error! Reference source not found.** є дуже грубим наближенням. Однак, для *RL* кола формула **Error! Reference source not found.** цілком коректна.

За умов $\beta t << 1$:

$$D[s] = \frac{2kT}{\beta m}t = \frac{2kT}{3\alpha}t = \frac{2kT}{3R}t \qquad (16)$$

формула, що вперше отримана Енштейном.

Нарешті слід зауважити, що у випадку δ-корельованої сили оперування диференційним рівнянням носить доволі умовний характер. Це рівняння написано не для середнього значення випадкової змінної, а для миттєвого. В такому випадку *s(t)*, функція, що не диферінціюється, а отже поняття швидкості втрачає сенс. Однак формальне інтегрування приводить вже до коректного запису, оскільки дельта-корельована сила вже стоїть під інтегралом. Не слід забувати при цьому, що фізично дельта-корельований процес нереалізуємий. Отже, наближення, що використовується дає деяку помилку, тим менше, чим менший час кореляції і більший час між спостереженнями.

Таким чином, якщо випадковими є початкові умови або зовнішня сила від яких випадковий процес залежить лінійно, то усереднення не викликає особливих труднощів. Однак, якщо коефіцієнт *β(t)* в **Error! Reference source not found.** також випадкова зміна, то статистичної інформації про початкові умови або зовнішню силу недостатньо. Точний розв'язок **Error! Reference source not found.** в такому випадку набуває вигляду:

$$u(t) = u_0 e^{-\gamma(t)} + \int_0^t e^{-\gamma(t)+\gamma(\theta)} f(\theta) d\theta, \quad \gamma(t) = \int_0^t \beta(\theta) d\theta \qquad (17)$$

Отже, необхідно обраховувати середні типу:

$$\overline{\exp\left[\gamma(t) - \gamma(\theta)\right]} = \overline{\exp \int_\theta^t \beta(\xi) d\xi} \qquad (18)$$

Останнє можливо без особливих проблем тільки у випадку, коли процесс *β(t)* можна розглядати як гаусів. Тоді скориставшись визначенням характеристичної функції можна показати, що:

$$\overline{\exp[\gamma]} = \overline{\exp\left[\overline{\gamma} + \tfrac{1}{2}\left(\overline{\gamma^2} - \overline{\gamma}^2\right)\right]} \qquad (19)$$

ЛІНІЙНА СИСТЕМА ПІД ДІЄЮ ВИПАДКОВИХ СИЛ. ФУНКЦІЯ ГРІНА. ІНТЕГРАЛ ДЮАМЕЛЯ.

Розв'язок лінійного рівняння **Error! Reference source not found.**, яке в загальному випадку може бути і інтегродиферінціальним завжди можна подати у вигляді інтегралу Дюамеля:

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(t,\theta) f(\theta) d\theta \qquad (20)$$

де *H(t)* імпульсний відгук динамічної системи. Звідки очевидно, можна отримати зв`язок між моментами величини *u(t)* та *f(t)*. Дійсно:

$$\langle u(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} H(t,\theta) \langle f(\theta) \rangle d\theta \qquad (21)$$

$$\langle u(t_1) u(t_2) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H(t_1,\theta_1) H(t_2,\theta_2) \langle f(\theta_1) f(\theta_2) \rangle d\theta_1 d\theta_2$$

У випадку, якщо коефіцієнти в рівнянні **Error! Reference source not found.** сталі, вираз **Error! Reference source not found.** набуває вигляду згортки:

$$\langle u(t)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} H(t-\theta)\langle f(\theta)\rangle d\theta \qquad (22)$$

$$\langle u(t)u(t+\tau)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} H(\theta)d\theta \int_{-\infty}^{\infty} H(\xi)\langle f(t-\theta)f(t+\tau-\xi)\rangle d\xi$$

В тому випадку, якщо процес *f(t)* гаусів, внаслідок лінійності зв`язку між *u(t)* та *f(t),* процес *u(t)* теж буде розподілен нормально, як границя суми нормально розподілених складових. При цьому будь-який багатовимірний розподіл вірогідностей для *u(t),* може бути виражений через моменти першого та другого порядку. Докладніше на аналізі лінійних систем під дією шуму розглянемо пізніше.

ВИКОРИСТАННЯ НАБЛИЖЕНИХ МЕТОДІВ ПРИ НЕВІДОМОМУ ТОЧНОМУ РОЗВ'ЯЗКУ

В багатьох задачах, в особливості нелінійних або пов`язаних із системами із змінними параметрами, вигляд точного розв'язку невідомо. Однак існує ряд методів, отримавших назву *стохастичні методи*, які дозволяють отримати статистичні характеристики процессу обминаючи пошуки точного розв'язку. Так, використовуючи стохастичні методи, можна виходячи із диферінційного рівняння для *u*, отримувати рівняння для статистичних характеристик, наприклад, моментів.

Розглянемо рівняння першого порядку:

$$\dot{u} + [\beta + \xi(t)]u = f(t), \quad \langle \xi \rangle = 0, \quad \langle \xi\xi_\tau \rangle = 2D\delta(\tau) \qquad (23)$$

із випадковим дельта-корельованим коефіцієнтом *ξ(t)*. Усереднивши **Error! Reference source not found.** за ансамблем, отримаємо:

$$\langle \dot{u} \rangle + \beta\langle u \rangle + \langle \xi(t)u \rangle = f(t) \qquad (24)$$

Якщо третій член в правій частині можна виразити через середнє *u*, то буде отримано дифірінційне рівняння для середніх. З другого боку рівняння **Error! Reference source not found.** еквівалентно інтегральному рівнянню:

$$u(t) = \int_0^t \left([-\beta - \xi(\vartheta)]u(\vartheta) + f(\vartheta)\right)d\vartheta \qquad (25)$$

Домноживши на $\xi(t)$ праву та ліву частину та усереднивши за ансамблем, отримаємо рівняння:

$$\langle\xi(t)u(t)\rangle = -\beta\left\langle \xi(t)\int_0^t u(\vartheta)d\vartheta \right\rangle - \left\langle \xi(t)\int_0^t \xi(\vartheta)u(\vartheta)d\vartheta \right\rangle \tag{26}$$

Відшукаємо, чому дорівнюють два члена в правій частині рівняння **Error! Reference source not found.**. Інтегруючи **Error! Reference source not found.** методом збурень отримаємо розв'язок у вигляді ряду:

$$u = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots \tag{27}$$

Підставляючи (27) в (26), отримаємо:

$$u_0(t) = e^{-\beta(t)} + \int_0^\infty e^{-\beta\theta} f(t-\theta)d\theta \tag{28}$$

$$u_1(t) = -\int_0^\infty e^{-\beta\theta}\xi(t-\theta)u_0(t-\theta)d\theta$$

$$u_2(t) = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\beta(\theta_1+\theta_2)}\xi(t-\theta_2)\xi(t-\theta_1-\theta_2)u_0(t-\theta_1-\theta_2)d\theta_1 d\theta_2$$

Зауважимо, що непарні компоненти чисто флуктуаційні, тоді як парні мають регулярну і флуктуаційну компоненти:

$$u_{2n+1} = \tilde{u}_{2n+1} \quad u_{2n} = \bar{u}_{2n} + \tilde{u}_{2n} \tag{29}$$

Використовуючи тепер кореляційну функцію для ξ, знаходимо, що:

$$\left\langle \xi(t)\int_0^t \tilde{u}_1(\theta)d\theta \right\rangle = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{t+\varepsilon} d\theta_1 \int_0^\infty e^{-\beta\theta_2}\langle\xi(t)\xi(\theta_1-\theta_2)\rangle u_0(\theta_1-\theta_2)d\theta_2 = \tag{30}$$

$$= -2D\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{t+\varepsilon} d\theta_1 \int_0^\infty e^{-\beta\theta_2}\delta(t-\theta_1+\theta_2)u_0(\theta_1-\theta_2)d\theta_2$$

В **Error! Reference source not found.** $\theta_2 >= 0$, тобто аргумент дельта функція може набути значення нуль тільки на інтервалі $t <= \theta_1 <= t + \varepsilon$. Інтегруючи спочатку по θ_2, а потім по θ_1, в границі, отримаємо:

$$\left\langle \xi(t)\int_0^t \tilde{u}_1(\theta)d\theta \right\rangle = -2Du_0(t)\lim_{\varepsilon\to 0}\int_t^{t+\varepsilon} d\theta_1 e^{\beta(t-\theta_1)} = -2Du_0(t)\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{e^{-\beta\varepsilon}-1}{\beta} = 0 \tag{31}$$

Аналогічним чином доводиться, що:

$$\left\langle \xi(t)\int_0^t \tilde{u}_n(\theta)d\theta \right\rangle = 0\ \forall n \tag{32}$$

Звідци безпосередньо витікає, що взагалі:

Але , оскільки $x(t) = \bar{x} + \tilde{x}$, то:

$$\langle\xi(t)x(t)\rangle = \langle\xi(t)\tilde{x}\rangle + \langle\xi(t)\rangle\bar{x} = 0 \tag{33}$$

Аналогічним чином доводиться, що:

$$\left\langle \xi(t)\int_0^t \xi(\theta)\tilde{u}(\theta)d\theta \right\rangle = 0 \qquad (34)$$

А звідци, міркуючи у той самий спосіб, отримаємо:

$$\left\langle \xi(t)\int_0^t \xi(\theta)u(\theta)d\theta \right\rangle = \int_0^t \bar{u}(\theta)\langle \xi(t)\xi(\theta)\rangle d\theta = 2D\int_0^t \delta(\theta - t)\bar{u}(\theta)d\theta = 2D\bar{u}(t) \qquad (35)$$

Підставляючи **Error! Reference source not found.** та **Error! Reference source not found.** в **Error! Reference source not found.**, отримаємо, що:

$$\langle \xi u(t) \rangle = -2D\bar{u}(t) \qquad (36)$$

Отже **Error! Reference source not found.**набуває вигляду:

$$\dot{\bar{u}} + (\beta - 2D)\bar{u} = f(t) \qquad (37)$$

Розв'язок останнього рівняння добре відомо:

$$\bar{u}(t) = \int_0^\infty e^{(\beta - 2D)\theta} f(t-\theta)d\theta \qquad (38)$$

Наприклад, для *f(t)=A=const*:

$$\bar{u}(t) = \frac{A}{\beta - 2D} \qquad (39)$$

Зазначимо, що замкнуте рівняння для *u* отримано в наближенні дельта-корельованих флуктуацій параметрів. Вище вже наголошувалося, що дельта-корельовані процеси в природі не існують. Проте цією моделлю можна користуватися, якщо ширина спектру флуктуацій істотно перебільшує характерну полосу пропускання системи.

МЕТОДИ ЛІНЕАРІЗАЦІЇ

Зупинимося тепер на методах лініарізації стохастичних рівнянь. Розглянемо рівняння:

$$\dot{u} + f(u) = \xi(t) \qquad (40)$$

Традиційний спосіб лінеарізації полягає в розкладанні функції *f(u)* в степенний ряд поблизу деякого значення u_0:

$$\dot{u} + f(u_0) + f'(u_0)(u - u_0) = \xi(t) \qquad (41)$$

В більшості випадків можна припустити, що флуктуації незначні. Тоді нелінійне рівняння лінеарізується по флуктуаціям і отримаємо два рівняння:

$$\dot{\bar{u}} + f(\bar{u}) = 0 \qquad (42)$$
$$\dot{\tilde{u}} + f(\bar{u})\tilde{u} = \xi(t)$$

В якому перше для регулярної компоненти істотно нелінійне, а друге, для флуктуаційної компоненти лінійне.

Доволі непогані результати можна отримати використовуючи *метод статистичної лінеарізації*. В цьому методі всі непарні функції *u* замінюються лінійною *Au*, а всі парні деякою сталою *B*. Параметри лінеарізації підбираються таким чином, щоб при заміні зберігалась статистична еквівалентність. При цьому *u* вважається гаусовим процессом із нульовим середнім та дисперсією σ^2. Наприклад при апроксімації деякої непарної функції можна скористатися такими методами:

а). Забеспечити рівність дисперсій *F(u)* та *Au*:

$$\left\langle F^2(u)\right\rangle = A^2\sigma^2 \;\Rightarrow\; A_1 = \sqrt{\left\langle F^2(u)\right\rangle}\Big/\sigma \tag{43}$$

б). Забезпечити мінімум відхилення *F(u)* від *Au* в середньоквадратичному:

$$\left\langle (Au - F(u))^2\right\rangle = \min \;\Rightarrow\; \frac{d}{du}\left\langle (Au - F(u))^2\right\rangle = 0 \;\Rightarrow\; A_2 = \left\langle F(u)u\right\rangle\Big/\sigma^2 \tag{44}$$

в). Визначити коефіцієнт *A* забезпечивши:

$$A_3 = \left\langle F(u)/u\right\rangle \tag{45}$$

Звичайно можна запропонувати і інші методи. Так, при апроксімації кубічної нелінійності в рівнянні:

$$\dot{u} + u^3 = \xi(t), \quad \left\langle \xi\right\rangle = 0, \quad \left\langle \xi\xi_\tau\right\rangle = 2D\delta(\tau) \tag{46}$$

необхідно зробити заміну $A=\beta\sigma^2$, де β – деякий чисельний коефіцієнт. Тоді **Error! Reference source not found.** набуває вигляду:

$$\dot{u} + \beta\sigma^2 u = \xi(t), \quad \left\langle \xi\right\rangle = 0, \quad \left\langle \xi\xi_\tau\right\rangle = 2D\delta(\tau) \tag{47}$$

З якого витікає, що:

$$\left\langle u\right\rangle = 0, \quad \left\langle uu_\tau\right\rangle = \sigma^2\exp\left(-\beta 2\sigma^2\tau\right), \quad \left\langle u^2\right\rangle = D\big/\beta\sigma^2, \quad \tau_k = 1\big/\beta\sigma^2 = 1\big/\sqrt{\beta D} \tag{48}$$

В свою чергу коефіцієнт β набуває значення:

$$\frac{1}{\sqrt{\beta}} = \begin{cases} 0.508 & A = A_1 \\ 0.575 & A = A_2 \\ 1.000 & A = A_3 \end{cases} \tag{49}$$

ВИКОРИСТАННЯ РІВНЯННЯ ФОКЕРА-ПЛАНКА

В попередніх розділах, розв’язуючи рівняння, ми використовували δ-корельованість випадкових коефіцієнтів в диферінціальних рівняннях. Але, це той самий випадок, коли може бути успішно застосований раніше розвинутий підхід, що дозволяє оминаючи пошук точного розв'язку диферінціального рівняння встановити ефолюцію функції розподілу. Розглянемо випадок, коли *u* задовольняє диферінціальному рівнянню першого порядку із одним випадковим коефіцієнтом:

$$\dot{u} = a(u) + b(u)\xi(t), \quad \langle \xi \rangle = 0, \quad \langle \xi \xi_\tau \rangle = 2D\delta(\tau) \tag{50}$$

Приріст Δu може бути знайдено інтегруванням рівняння **(50)**:

$$\Delta u(\tau) = u(t+\tau) - u(t) = \int_0^\tau [a(u(t+\theta)) + b(u(t+\theta))]\xi(t+\vartheta)d\vartheta \tag{51}$$

Будемо шукати Δu методом послідовних наближень, тобто:

$$u(t+\theta) = u(t) + \Delta u(\theta) \quad (0 \le \theta \le \tau) \quad \Delta u = \lim_{n\to\infty} \Delta u_n \tag{52}$$

де:

$$\Delta u_1(\tau) = \int_0^\tau [a(u(t)) + b(u(t))]\xi(t+\vartheta)d\vartheta; \tag{53}$$

$$\Delta u_2(\tau) = \int_0^\tau [a + a'_u\,\Delta u_1 + b + b'_u\,\Delta u_1)]\xi(t+\vartheta)d\vartheta;$$

$$\Delta u_3(\tau) = \int_0^\tau [a + a'_u\,\Delta u_2 + \tfrac{1}{2}a_{uu}''\Delta u_2 + b + b'_u\,\Delta u_2 + \tfrac{1}{2}b_{uu}''\Delta u_2)]\xi(t+\vartheta)d\vartheta \quad \ldots$$

Враховуючи δ-корельованість ξ(*t*) знайдемо умовні моменти Δu, які знаходяться із допомогою умовної густини розподілу $p^{\text{умов}}(u(t+\tau)|u(t))$ – імовірності того, що випадковий процес набуде в момент $t+\tau$ значення $u(t+\tau)$, за умови, що в момент *t* було набуто значення $u(t)$. Отже:

$$\langle \Delta u_1 \rangle^{умов} = a\tau + \ldots \quad \langle \Delta u_1^2 \rangle^{умов} = b^2 D\tau + \ldots \quad \langle \Delta u_1^3 \rangle^{умов} = \ldots \tag{54}$$

Аналогічно для другого наближення:

$$\langle \Delta u_2 \rangle^{умов} = (a + bb_u{}'D)\tau + \ldots \quad \langle \Delta u_2^2 \rangle^{умов} = 2b^2 D\tau + \ldots \quad \langle \Delta u_2^3 \rangle^{умов} = \ldots \tag{55}$$

Для обох наближень відкинуто члени більш ніж першого порядку по τ. Всі наближення більш високого порядку не дають змін в члени порядку τ. Тобто, з цією степеню точності можна вважати, що:

$$\langle \Delta u \rangle^{умов} = (a + bb_u{}'D)\tau + \ldots \quad \langle \Delta u^2 \rangle^{умов} = 2b^2 D\tau + \ldots \quad \langle \Delta u^3 \rangle^{умов} = \ldots \tag{56}$$

Але, як було визначено при виводі рівняння Фокера-Планка коефіцієнт дрейфу $A(u)$ є:

$$A(u(t)) = \lim_{\tau \to 0} \frac{\left\langle \Delta u \right\rangle^{умов}}{\tau} = (a(u) + b(u) b'_u(u) D) \tag{57}$$

коефіцієнт диффузії $B(u)$:

$$B(u(t)) = \lim_{\tau \to 0} \frac{\left\langle \Delta u^2 \right\rangle^{умов}}{\tau} = 2b(u)^2 D\tau \tag{58}$$

І нарешті:

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{\left\langle \Delta u^n \right\rangle^{умов}}{\tau} = 0 \qquad n \geq 3 \tag{59}$$

Таким чином, можна звести вихідне диферінційне рівняння до рівняння Фокера-Планка і, розв’язавши його, знайти еволюцію функції розподілу.