# МАРКОВСЬКІ ПРОЦЕСИ

## ВІРОГІДНОСТІ ПЕРЕХОДУ. МАРКОВСЬКІ ЛАНЦЮГИ

Як уже наголошувалося раніше, випадковий процес можна вважати заданим, якщо відомо для будь-якої кількості моментів часу $t_1$, $t_2,\ldots t_n$ відомо багатовимірний розподіл густини вірогідності $p(t_1,u_1;\ t_2,u_2\ldots..;\ t_n,u_n)$. При цьому має бути виконано декілька умов. Очевидно, що вигляд $p(t_1,u_1;\ t_2,u_2\ldots..;\ t_n,u_n)$ має бути симетричним відносно перестановки всіх пар аргументів, оскільки виконання умов $u_j<U_j<=u_j+du_j$ не залежить від того в якому порядку їх подавати.

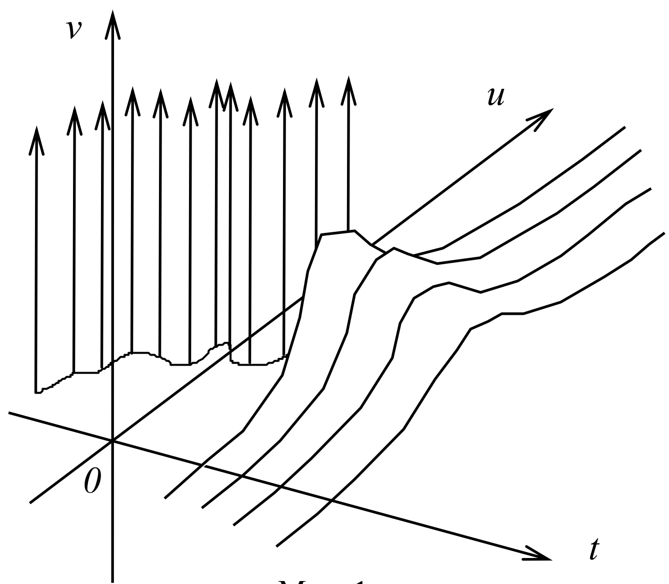
Більш нетривіальна умова полягає в тому, що всі кінцевовимірні густини вірогідностей мають бути між собою <u>узгоджені</u> - кожний $k$-вимірний розподіл має отримуватися із $n$ ($n>k$) вимірного шляхом інтегрування по «зайвим» змінним:

$$p_k(t_1,u_1;t_2,u_2\ldots;t_k,u_k)=\int_{-\infty}^{\infty}p_n(t_1,u_1;t_2,u_2\ldots;t_n,u_n)du_1du_2\ldots du_n \qquad (1)$$

За визначенням, для $n$ послідовних моментів часу завжди можна написати:

$$p_n(t_1,u_1;t_2,u_2\ldots;t_n,u_n)du_1du_2\ldots du_n= \qquad (2)$$
$$p_{n-1}(t_1,u_1;t_2,u_2\ldots;t_{n-1},u_{n-1})du_1du_2\ldots du_{n-1}\cdot v_n(t_n,u_n|t_1,u_1;t_2,u_2\ldots;t_{n-1},u_{n-1})du_n$$

де $v_n dx_n$ є умовна вірогідність того, що випадкова функція $U$ набуде в момент $t_n$ значення $u_n$ за умови, що в попередні $n$-1 моментів вона набула значення $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$.



Мал. 1

Таким чином умовна вірогідність залежить від попереднього шляху, який пройшла випадкова функція. Це проілюстровано на Мал. 1. На Мал. 1 $v$ побудована, як функція від $u$ та $t$. Над кривою $u_P(t)$ фактично набутих у моменти часу $t<t_0$ значень $u$ зведено паркан із дельта-функцій[1]. Хід густини розподілу умовної вірогідності $v$(u) в моменти часу $t>t_0$ залежить від форми цього паркану, тобто форма поверхні $v(u,t)$ є функціоналом від $u_P(t)$. Кажуть, що $u(t)$ відчуває *вірогіднісну післядію* з боку раніше набутих значень. Зокрема процес може мати згасаючу післядію – значення $u_P(t)$ тим менше справляють вплив, чим давніші вони є. Фізично важливий випадок, коли умовна вірогідність цілком визначається тільки попереднім значенням, тобто має вигляд $v(t,u\,|t_0,u_0)$. Такі процеси називають – *марковськими процеси*, або процеси без післядії.

Для процесів марківського типу статистичні властивості процесу в момент $t_n$ повністю визначаються станом в момент $t_{n-1}$. В аналітичній формі:

$$v_n(t_n,u_n|t_1,u_1;t_2,u_2\ldots;t_{n-1},u_{n-1}) = v_2(t_n,u_n|t_{n-1},u_{n-1}) \qquad (3)$$

Зв`язок між $p_n$ та $p_{n-1}$ набуває вигляд:

$$p_n(t_1,u_1;t_2,u_2\ldots;t_n,u_n) = p_{n-1}(t_1,u_1;t_2,u_2\ldots;t_{n-1},u_{n-1})\cdot v_2(t_n,u_n|t_{n-1},u_{n-1}) \qquad (4)$$

Послідовно застосовуючи формулу (4) до $p_{n-1}$ та $p_{n-2}$ натомість отримаємо:

$$p_n(t_1,u_1;t_2,u_2\ldots;t_n,u_n) = p_1(t_1,u_1)\cdot v_2(t_2,u_2|t_1,u_1)\cdot v_2(t_3,u_3|t_2,u_2)\ldots v_2(t_n,u_n|t_{n-1},u_{n-1}) \quad (5)$$

[1] Формально будь-яку детерміновану функцію $f(t)$ можна представити у вигляді випадкової функції $u$ із густиною розподілу $\delta(u-f(t))$.

Рівняння (5) можна вважати аналітичним визначенням марківського процесу, а функцію $v$ називають *вірогідність переходу*. Для процесів із дискретним часом та дискретними можливими значеннями випадкових величин, марковість процесу означає, що існують вірогідності переходу від будь-якого значення $u_i$ при $l$-тому іспиті до $u_k$ при $n$-тому:

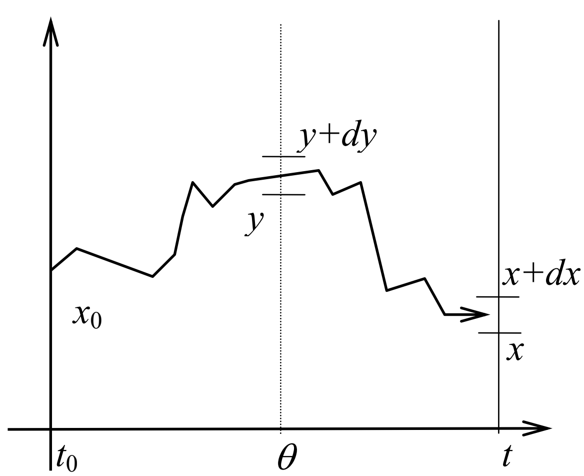
$$p(n, u_k | l, u_i) = P(\xi_n = u_k | \xi_l, u_i) \qquad (6)$$

Якщо, зокрема кількість можливих значень кінцева, то процес називають *простий ланцюг Маркова*.

Якщо випадкові величини мають неперервну множину значень, то марковість такого неперервного процесу із дискретним часом означає, що існують вірогідності переходу такі, що:

$$v(n, x | l, y) = P(x < \xi_n <= x + dx | \xi_l = y) \qquad (7)$$

## РІВНЯННЯ СМОЛУХОВСЬКОГО. МАРКОВСЬКИЙ ПРОЦЕС ДЛЯ ДИСКРЕТНИХ СТАНІВ



Мал. 2

Безпосереднім наслідком узгодженості багатовимірних розподілів вірогідностей для марківських процесів є рівняння Смолуховського, що відбиває той факт, що вірогідності переходів в послідовні моменти часу мають бути узгоджені.

Розглянемо неперервний процес з неперервними значеннями випадкових величин. Перехід із стану $x_0$ в стан $x$, що іде через довільний стан $y$, можна подати як два послідовних переходи $x_0 \to y$ та $y \to x$. Вірогідність спільної реалізації цих двох процесів дорівнює добутку вірогідностей кожного з тими ж умовними густинами вірогідності $v(\theta, y | t_0, x_0)dy \cdot v(t, x | \theta, y)dx$.

Однак, перехід $x_0 \to y \to x$ є один із взаємовиключних переходів Мал. 2. Повну вірогідність переходу буде отримано інтегруванням по всім можливим значенням $y$:

$$v(t,x|t_0,x_0)dx = dx\int v(\theta,y|t_0,x_0)v(t,x|\theta,y)dy \qquad (8)$$

Для випадкових марківських послідовностей, коли час та значення функцій дискретні, рівняння **( 8 )** слід переписати як:

$$p(n,x_k|l,x_i) = \sum_j p(n,x_k|m,x_j)p(m,x_j|l,x_i), \quad l<m<n \qquad (9)$$

або як:

$$p(t,x_k|t_0,x_i) = \sum_j p(t,x_k|\theta,x_j)p(\theta,x_j|t_0,x_i), \quad t_0<\theta<t \qquad (10)$$

якщо час неперервний.

В останньому рівнянні припустимо, що для не дуже великих різниць часу $\tau=t-t_0$ вірогідність переходу має вигляд:

$$p(t+\tau,x_k|t_0,x_{\hat{\imath}}) = \delta_{jk} + A_{jk}\tau \qquad (11)$$

де наявність символу Кронекера відбиває той факт, що при $\tau\to 0$ кінцеве значення з достовірністю співпадає із початковим, а $A_{jk}dt$ є вірогідність переходу за час $dt$ із стану $j$ в стан $k$[2]. Отже сама величина $A_{jk}$ невід`ємна. Тут:

$$A_{jk}(t) = \left.\frac{\partial p(\xi,x_k|t,x_{\hat{\imath}})}{\partial\xi}\right|_{\xi=t} \qquad (12)$$

Оскільки вірогідність переходу хоч в який-небудь стан має дорівнювати одиниці, то:

$$\sum_k p(t+\tau,x_k|t_0,x_j) = 1 \qquad (13)$$

де виконується таке:

$$\sum_k A_{jk}(t) = 0, \quad A_{jj}(t) = -\sum_{k\neq j} A_{jk}(t) <= 0 \qquad (14)$$

Підставляючи **( 11 )** в **( 10 )** отримаємо:

$$\frac{p(t,x_k|t_0,x_i)}{\partial t} = \sum_j A_{jk}(t)p(t,x_j|t_0,x_i) \qquad (15)$$

Ця система визначає залежності вірогідностей переходу від часу.

---

[2] Вираз «не дуже великих різниць» з точки зору фізики слід розуміти у порівнянні саме із величинами $A_{jk}^{-1}$ - характерним «часом життя» відповідного стану.

Цим рівнянням задовольняють не тільки вірогідності переходу, але і одновимірна вірогідність стану $p_1(t,x_k)$. Якщо задано початковий розподіл вірогідностей $P(t_0,x_i)$, то:

$$p_1(t,x_k)=\sum_i P(t_0,x_i)\,p(t,x_k|t_0,x_i) \qquad (16)$$

Помноживши **( 15 )** на $P(t_0,x_i)$ та взявши суму по $i$ з урахуванням **( 16 )** отримаємо:

$$\frac{p_1(t,x_k)}{\partial t}=\sum_j A_{jk}(t)\,p_1(t,x_j) \qquad (17)$$

Останнє рівняння слід інтегрувати за початкових умов:

$$p_1(t_0,x_k)=P(t_0,x_k) \qquad (18)$$

Якщо, процес <u>однорідний</u>, тобто власне процес від часу не залежить, сталі станів $A_{jk}$ величини незмінні і система **( 15 )** набуває вигляду:

$$\frac{p(x_k|t,x_i)}{\partial t}=\sum_j A_{jk}\,p(x_j|t,x_i) \qquad (19)$$

Нарешті для ергодичних процесів, якщо довго почекати, то:

$$\lim_{t\to\infty} p(x_k|t,x_i)=P(x_k) \qquad (20)$$

Тобто кінцевий розподіл не залежить від початкового. В такому випадку отримаємо рівняння для находження $P(x_k)$:

$$\sum_j P(x_j)=1, \qquad \sum_j A_{jk}P(x_j)=0 \qquad (21)$$

Розглянемо для прикладу однорідний по часу процес – хімічну реакцію[3]. Тоді, можливо два процеси: $1\to 2$ (розпад) з вірогідністю $\alpha dt$, та зворотній $2\to 1$ з вірогідністю $\beta dt$. Відповідно до сказаного вище: $A_{12}=\alpha$, $A_{21}=\beta$, $A_{11}=-\alpha$, $A_{22}=-\beta$, а рівняння ( 19 ) для вірогідностей стану, за початкових умов:

$$p_1(t,1)\equiv P_1(t) \quad p_1(t,2)\equiv P_2(t)$$

набувають вигляду:

$$\frac{dP_1}{dt}=-\alpha P_1+\beta P_2 \qquad \frac{dP_2}{dt}=\alpha P_1-\beta P_2 \qquad (22)$$

Рівняння **( 22 )** з урахуванням $P_1+P_2=1$ легко приводиться до вигляду:

[3] Це може бути також радіоактивний розпад, іонізація, діссоціація

$$\frac{dP_1}{dt}=-(\alpha+\beta)P_1+\beta \tag{23}$$

яке легко розв`язується і при початкових умовах $P_1(0)=1$, $P_2(0)=0$ має розв'язок:

$$P_1=e^{-(\alpha+\beta)t}+\frac{\beta}{\alpha+\beta}\left(1-e^{-(\alpha+\beta)t}\right),\quad P_2=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\left(1-e^{-(\alpha+\beta)t}\right) \tag{24}$$

Зокрема для радіоактивного розпаду, коли $\beta=0$:

$$P_1=e^{-\alpha t},\quad P_2=1-e^{-\alpha t} \tag{25}$$

## СУМА ВИПАДКОВИХ ФАЗОРІВ. РОЗПОДІЛ РЕЛЕЯ

Перш ніж вивести головне диференційне рівняння для марковських процесів з неперервною множиною можливих значень, застосуємо широко поширений метод – складемо рівняння для марковської послідовності, а потім зробимо граничний перехід $\Delta t\to 0$, $\Delta x\to 0$.

Розглянемо задачу про «абсолютного п`яничку», який в послідовні моменти часу $N\Delta t$ $(N=1,2,3..)$ робить крок довжиною $a$ вперед або назад з вірогідностями $p$ та $q=1-p$, відповідно. Аналогічним чином можна сформулювати задачу про одномірні блукання частки, або суму коливань з випадковими амплітудами $\pm a$ (суму випадкових фазорів).

Вважаємо, що в початковий момент часу «п`яничка» вийшов із точки з координатою 0 і введемо вірогідність переходу за $N$ кроків в точку $ma$ - $p(Na,ma|0,0)\equiv p_{N,m}$. «П`яничка» може попасти в точку $ma$ або із точки $(m-1)a$ або із точки $(m+1)a$, відповідно, із вірогідністю $p$ та $q$. Тоді, згідно із формулою для повної вірогідності, вірогідність опинитися в точці $ma$ становить:

$$p_{N,m}=p\cdot p_{N-1,m-1}+q\cdot p_{N-1,m+1},\qquad v(t,x)\cdot a=p_{N,m} \tag{26}$$
$$v(t,x)=pv(t-\Delta t,x-a)+qv(t-\Delta t,x+a)$$

Розвиваючи в ряд за степенями $\Delta t$ та $a$ та враховуючи, що $p+q=1$ отримаємо:

$$0=-\frac{\partial v}{\partial t}\Delta t-(p-q)\frac{\partial v}{\partial x}a+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{a^2}{2}+(p-q)\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial t}a\Delta t+\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\frac{t^2}{2}+\ldots \tag{27}$$

Тепер перейдемо до границі $\Delta t\to 0$, $\Delta x=a\to 0$ і припустимо, що існують границі:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(p-q)a}{\Delta t}=A\quad \lim_{\Delta t\to 0}\frac{a^2}{\Delta t}=B \tag{28}$$

В такому випадку **( 27 )** переходить в рівняння дифузії для вірогідності переходу:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -A\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{B}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \qquad (29)$$

яке для початкових умов та умов нормування:

$$v(t_0, x|t_0, x_0) = \delta(x - x_0) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} v(t, x)dx = 1 \qquad (30)$$

має розв'язок:

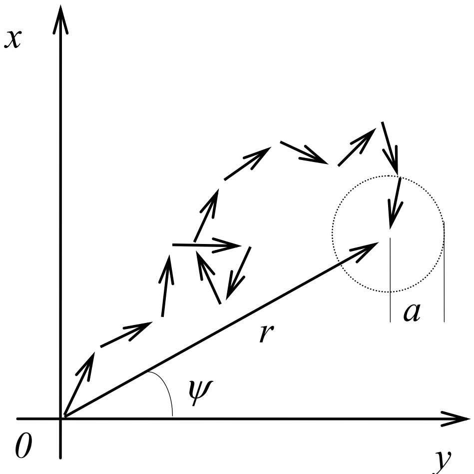
$$v(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi Bt}}\exp\left\{-\frac{(x - At)^2}{2Bt}\right\} \qquad (31)$$

тобто нормальний розподіл, що дрейфує із швидкістю $A$ та дисперсією, що збільшується із часом за законом $\sigma^2 = Bt$.

Поведінка $v(t,x|t_0,x_0)$ із зростанням часу доволі очевидна: розподіл поступово розпливається, максимум його рухається із постійною швидкістю А. Така поведінка притаманна броунівській частинці у полі тяжіння, систематична швидкість при цьому $A = -mg/\alpha$. Отже рівняння **( 31 )** описує дифузію в рівномірному потоці.

При $A \sim p - q = 0$ приходимо до задачі про розподіл випадкової амплітуди великого числа коливань із рівно вірогідними малими амплітудами $\pm a$. Оскільки в такому випадку нас цікавить інтенсивність, тобто момент другого порядку, то з допомогою **( 31 )** неважко знайти:

$$\bar{I} = \overline{x^2} = Bt, \quad \overline{\Delta I^2} = \overline{I^2} - \bar{I}^2 = 2B^2t^2 \;\Rightarrow\; \sqrt{\overline{\Delta I^2}}\Big/\bar{I} = \sqrt{2} \qquad (32)$$



Мал. 3

Таким чином, відносного вирівнювання флуктуацій інтенсивності не відбувається – якби довго не складати випадкові коливання, відносний розкид такого ж порядку, що і сама інтенсивність.

Більш загальний випадок – двовимірний, про суму коливань з рівномірно розподіленими на інтервалі $[0, 2\pi]$ фазами з випадковими малими амплітудами $\pm a$. На векторній діаграмі така задача зводиться до задачі про блукання на двомірній площині. Попадання в точку $(x,y)$ в момент часу $t$ може відбутися із будь-якої точки на колі радіусу $a$ із центром в $(x,y)$, якщо частка в момент $t$-$\Delta t$ знаходилась на цьому колі (Мал. 3). Оскільки всі напрямки елементарного вектору $\boldsymbol{a}$ рівно імовірні, то повна вірогідність є інтеграл по всім напрямках і рівняння **( 26 )** тоді набуває вигляду:

$$v(t,x,y) = \int_0^{2\pi} v(t-\Delta t, x - a\cos\varphi, y - a\sin\varphi)\frac{d\varphi}{2\pi} = \tag{33}$$

$$= v(t-\Delta t, x, y) + \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\cos^2\varphi + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\sin^2\varphi\right)\frac{d\varphi}{2\pi} - a\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial v}{\partial y}\sin\varphi\right)\frac{d\varphi}{2\pi} +$$

$$+ a^2\int_0^{2\pi}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\cos\varphi\sin\varphi\frac{d\varphi}{2\pi} + \ldots = v(t-\Delta t, x, y) + \frac{a^2}{4}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) + o(a^3)$$

Якщо тепер припустити, що існує границя типу **( 28 )** (другий), то в результаті граничного переходу отримаємо двовимірне рівняння дифузії:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{B}{2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \tag{34}$$

нормований розв'язок якого, що переходить при $t=0$ в $\delta(x)\delta(y)$, є:

$$v(t,x) = \frac{1}{2\pi Bt}\exp\left\{-\frac{x^2 + y^2}{2Bt}\right\} \tag{35}$$

Перейшовши до полярних координат отримаємо, що:

$$v(t,x,y)dxdy = v(t,r,\psi)drd\psi = \frac{d\psi}{2\pi}\frac{rdr}{Bt}\exp\left\{-\frac{r^2}{2Bt}\right\} \quad (36)$$

З **( 36 )** витікає, що амплітуда та фаза розподілені незалежно, а амплітуда підкоряється закону розподілу, що отримало назву *розподіл Релея*:

$$v(t,r)dr = \frac{rdr}{Bt}\exp\left\{-\frac{r^2}{2Bt}\right\} \quad (37)$$

з дисперсією $\sigma^2 = \langle x^2 \rangle = \langle y^2 \rangle = Bt$, найвірогіднішим значенням $r_m = \sigma$, середнім значенням $\langle r \rangle = (\pi/2)^{1/2}\sigma$ та $\langle r^2 \rangle = 2\ Bt$. Як і для одновимірного випадку відносний розкид інтенсивності такого ж порядку, що і сама інтенсивність.

## РІВНЯННЯ ФОКЕРА-ПЛАНКА.

Попередній розгляд дає ідею яким чином можна отримати головне рівняння, якому задовольняють густини вірогідностей і яке витікає із рівняння Смолуховського.

В рівнянні Смолуховського проміжний момент $\theta = t - \tau$ може бути вибрано дуже близьким до $t$. Зробимо також припущення про існування таких границь. По-перше припустимо, що:

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{(x-y)}{\tau} = \lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-y)v(t,x|t-\tau,y)dx = A(y,t) \quad (38)$$

Аналогія із першою границею в **( 36 )** цілком очевидна. *A(y,t)* - середня швидкість зміни стану в момент $t$ в точці $y$ - коефіцієнт зносу (дрейфова швидкість).

По-друге припускаємо, що:

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{(x-y)^2}{\tau} = \lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-y)^2 v(t,x|t-\tau,y)dx = B(y,t) \quad (39)$$

Таким чином припускається, що середній розкид точок $x$ відносно фіксованої точки $y$ росте за дифузійним законом. Нарешті по-третє:

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{(x-y)^3}{\tau} = \lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\int_{-\infty}^{+\infty}|x-y|^3 v(t,x|t-\tau,y)dx = 0 \quad (40)$$

Тобто, вірогідність значних змін $|x-y|$ дуже мала і наближається до нуля швидше ніж $\tau$.

Помножимо тепер рівняння Смолуховського **( 8 )** на довільну функцію *q(x)*, що разом із своєю першою похідною *q`(x)* обертається на нуль на безкінечності, та має обмежену третю похідну $|q```(x)|<M$. Інтегруючи по *x* отримаємо:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} q(x)v(t,x\,|\,t_0,x_0)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t-\tau,y\,|\,t_0,x_0)dy\int_{-\infty}^{+\infty} q(x)v(t,x\,|\,t-\tau,y)dx = \tag{41}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} v(t-\tau,y\,|\,t_0,x_0)dy\int_{-\infty}^{+\infty} dx\cdot v(t,x\,|\,t-\tau,y)\cdot$$

$$\cdot\left\{q(y)+q'(y)(x-y)+q''(y)\frac{(x-y)^2}{2}+q'''(z)\frac{(x-y)^3}{6}\right\},\quad \text{де}\ \ y<z<x$$

В члені з *q(x)* інтеграл по *x* дасть одиницю. Перенісши його в ліву частину та замінивши інтегрування на *y* перейдемо до границі по τ. Це дає:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} q(x)\frac{\partial v(t,x|t_0,x_0)}{\partial t}dx = \tag{42}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dy\cdot v(t,y|t_0,x_0)\left\{q'(y)A(y,t)+q''(y)\frac{B(y,t)}{2}+q'''(z)\lim_{\tau\to 0}\frac{\overline{(x-y)^3}}{6\tau}\right\}$$

Замінивши інтегрування по *y* на інтегрування по *x*, з урахуванням умови **( 40 )** та властивостей *q(x)*, отримаємо з огляду на довільність *q(x)*:

$$\frac{\partial v(t,x|t_0,x_0)}{\partial t} = -\frac{\partial A(x,t)v}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 B(x,t)v}{\partial x^2} \tag{43}$$

Це параболічне рівняння носить назву рівняння *Фокера-Планка*. Розв’язок його має бути невід`ємне, нормовано до одиниці та задовольняти початковим умовам:

$$v(t_0,x|t_0,x_0) = \delta(x-x_0) \tag{44}$$

Фізична трактовка цього рівняння може бути така. В початковий момент із точки $x_0$ виходить велика кількість часток, що рухаються незалежно. Їх концентрація в в момент *t* в точці *x* буде $v(t,x|t_0,x_0)$. Потік часток складається із гідродинамічного потоку *Av* та дифузійного $-1/2\,\partial Bv/\partial x$. Тоді **( 43 )** є не що інше як рівняння неперервності.

Якщо в початковий момент початковий розподіл $p(t_0,x_0)$, то в момент *t* одновимірна функція розподілу має вигляд:

$$p(t,x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(t_0,x_0)v(t,x|t_0,x_0)dx_0 \tag{45}$$

Помноживши рівняння Фокера-Планка **( 43 )** на $p(t_0,x_0)$ та проінтегрувавши по $x_0$, отримаємо рівняння Фокера-Планка для густини вірогідності:

$$\frac{\partial p(t,x)}{\partial t}=-\frac{\partial A(x,t)p}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 B(x,t)p}{\partial x^2} \tag{46}$$

де в якості початкових умов виступає початковий розподіл, а розв'язок невід`ємний та нормований до одиниці.

Розглянемо тепер стаціонарний марковський процес. Вірогідність переходу залежить тільки від $t$-$t_0$, а отже $A$ та $B$ взагалі не залежать від часу. Одновимірна вірогідність теж не залежить від часу. Тоді рівняння **( 46 )** набуває вигляд:

$$0=\frac{\partial}{\partial x}\left[A(x)p-\frac{1}{2}\frac{\partial B(y,t)p}{\partial x}\right] \tag{47}$$

Якщо на границі області зміни $x$ потік дорівнює нулю, то він і всюди дорівнює нулю:

$$0=\left[A(x)p-\frac{1}{2}\frac{\partial B(y,t)p}{\partial x}\right] \tag{48}$$

Інтегруючи, отримаємо:

$$p(x)=\frac{C}{B(x)}\exp\left\{\int\limits_0^x\frac{2A(s)}{B(s)}ds\right\} \tag{49}$$

де стала $C$ знаходиться із умов нормування.

Прикладом стаціонарного розподілу може бути броунівський рух в полі тяжіння над відбиваючою границею. Тоді, дійсно потік обертається на нуль. Величина $A$ стала і із фізичних міркувань становить $-mg/\alpha$. Тоді **( 49 )** переходить в:

$$p(x)=C\exp\left\{-\frac{2mgx}{\alpha B}\right\} \tag{50}$$

Порівнюючи цей вираз із барометричною формулою, отримаємо, що $B=2kT/\alpha$. Отже коефіцієнт $B$ в рівнянні Фокера-Планка характеризує інтенсивність поштовхів, іншими словами пропорційний коефіцієнту кореляції випадкової сили, що діє на систему.

Вираз для *А* та *В* наводить на думку, що існує можливість безпосередньо зв`язати коефіцієнти в рівнянні Фокера-Планка із вихідним диференційним рівнянням, що характеризує систему. Дійсно, такий зв`язок існує. Наведемо відповідні формули без доказів.

Розглянемо рівняння першого порядку із одним дельта-корельованим випадковим коефіцієнтом:

$$\dot{x} = a(x,t) + b(x,t)\xi(t), \quad \overline{\xi} = 0, \quad \xi\xi_\tau = 2B\delta(\tau) \tag{51}$$

Тоді для *А* та *В* можна записати:

$$A(x,t) = a(x,t) + b(x,t)b'(x,t)B \qquad B(x,t) = 2Bb^2(x,t) \tag{52}$$

Застосування рівняння Фоккера-Планка потребує деяких зауважень.

По-перше, хоча марковські процеси є доволі специфічний клас випадкових процесів, значення їх доволі значне, оскільки їх умови виконуються в широких межах застосування теорії. Дійсно, процес, спектр якого набагато ширший ніж характерна ширина «пропускання» системи завжди можна апроксимувати дельта-корельованим процесом. А такий процес, як видно з вищесказаного є марківським.

По-друге, випадкові процеси загального вигляду завжди можна привести до схеми процесу без післядії, якщо розширити кількість змінних, що описують стан системи. Наприклад, розв’язок детермінованого диференційного рівняння другого порядку при початкових умовах $t=t_0$, $x=x_0$, $x'=u_0$, буде функція $x=f(t,x_0,u_0,t_0)$. Якщо, тепер під станом системи розглядати тільки координату, то густина умовної вірогідності буде:

$$v(t,x|t_0,x_0,u_0) = \delta(x - f(t,t_0,x_0,u_0)) \tag{53}$$

Але задати $u_0$ фактично означає задати $x_0$ в два послідовних моменти часу, а отже умовна вірогідність залежить від двох послідовних моменти часу:

$$v(t,x|t_0,x_0,u_0) \approx v(t,x|t_0,x_0;t_0-\tau,x_0-\Delta x) \tag{54}$$

що не забезпечує марковості процесу. Натомість, якщо під станом системи вважати одночасне визначення $x$ та $u$, то умовна вірогідність такого процесу записується як:

$$v(t,x,u|t_0,x_0,u_0) = \delta(x - f(t,t_0,x_0,u_0))\delta(u - \dot{f}(t,t_0,x_0,u_0)) \tag{55}$$

Таким чином, отримуємо марківський багатовимірний процес.

По-третє, збільшення розмірності системи означає збільшення кількості зв`язаних рівнянь типу **( 1 )**. В такому випадку завжди можна записати рівняння для багатовимірних функцій розподілу:

$$\frac{\partial p(t,\vec{x})}{\partial t} = -\sum_i \frac{\partial A_i p}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,k}\frac{\partial^2 B_{ik} p}{\partial x_i \partial x_k}, \quad A_i = \lim_{\tau\to 0}\frac{\overline{x_i - y_i}}{\tau}, \quad B_{ik} = \lim_{\tau\to 0}\frac{\overline{(x_i - y_i)(x_k - y_k)}}{\tau} \qquad (56)$$

На жаль в більшості випадків інтегрування одразу ускладнюється.

Четверте, іноді коефіцієнти в **( 46 )** не можна вважати дельта-корельованими. Хоча рівняння Фоккера-Планка може бути отримано і в такому випадку, одновимірне рівняння стає багатовимірним.

П`яте, стаціонарний розподіл або двовимірний розподіл $p(x,x_\tau)$ (останній корисний при обчислювальні кореляційних функцій та спектрів) може бути дуже незручний для обчислення статистичних характеристик.