МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“Київський політехнічний інститут”
Інститут моніторингу якості освіти
Фізико-технічний інститут

Серія “На допомогу студенту”
Загальна фізика

О. В. Кравцов, О. В. Гомонай

Лекції з загальної фізики. Хвилі

Текст лекцій

Київ 2012

Кравцов О.В., Гомонай О.В. Лекції з загальної фізики: хвилі. Навчальний посібник – К.: НТУУ "КПІ", 2012.– 51 с. – (Серія "На допомогу студенту". Загальна фізика)

Затверджено до друку
Радою ФТІ НТУУ "КПІ"
Протокол N 7 від 29 серпня 2008 р.

Навчальне видання

КРАВЦОВ Олег Васильович
ГОМОНАЙ Олена Василівна

Лекції з загальної фізики: хвилі

Навчальний посібник

Комп'ютерна верстка
у вид. системі LaTeX-2ε

Зміст

Розділ 1

Хвильовий рух електромагнітних хвиль

§1 Загальні характеристики хвильового руху

Загальний вигляд **хвильового рівняння** (рівняння д'Аламбера) за відсутності згасання та дисперсії:

$$\nabla^2\psi - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0. \tag{1.1}$$

Стала v визначає фазову швидкість хвилі.

Для хвилі, що розповсюджується вздовж осі x:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0,$$

загальний розв'язок такого рівняння:

$$\psi(x,t) = f_1\left(t - \frac{x}{v}\right) + f_2\left(t + \frac{x}{v}\right).$$

Для хвилі, що розповсюджується вздовж осі x за наявності згасання

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + 2\gamma\frac{\partial\psi}{\partial x} + \gamma^2\psi = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}. \tag{1.2}$$

Розв'язок (1.2)

$$\psi(x,t) = a_0 e^{-\gamma x}\exp\left[-i\left(\omega t - kx\right)\right], \tag{1.3}$$

де γ – коефіцієнт згасання хвилі, ω – циклічна частота ($= 2\pi\nu = 2\pi/T$), ν – лінійна частота, T – період, $k \equiv 2\pi/\lambda$ – хвильове число, λ – довжина хвилі.

Для розв'язку (1.3) мають місце такі співвідношення: $\omega = vk$, $\lambda = vT = 2\pi v/\omega$.

Інтенсивність хвилі (1.3) $I = I_0 e^{-\kappa x}$, де $\kappa = 2\gamma$ – коефіцієнт поглинання.

§1.1 Плоскі і сферичні хвилі

Плоска гармонічна хвиля:

$$\psi(\vec{r}, t) = a_0 e^{-i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}, \tag{1.4}$$

де $\vec{r}$ – радіус-вектор точки хвильової поверхні, $\vec{k} = \vec{n}k$ – хвильовий вектор, $\vec{n}$ – одиничний вектор нормалі до хвильової поверхні.

Сталу a_0 називають амплітудою, а $\phi \equiv \omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}$ – фазою хвилі.

Сферична монохроматична хвиля:

$$\psi(r, t) = \frac{a_0}{r} e^{-i(\omega t - kr)} \tag{1.5}$$

де r – відстань від точкового джерела. Амплітуда сферичної хвилі a_0/r, фаза $\phi = \omega t - kr$.

Сферична монохроматична хвиля із згасанням:

$$\psi(r, t) = \frac{a_0 e^{-\gamma r}}{r} e^{-i(\omega t - kr)}. \tag{1.6}$$

Інтенсивність такої хвилі

$$I = I_0 \frac{e^{-\kappa r}}{r^2}.$$

§1.2 Електромагнітні хвилі та їх властивості

§1.3 Електромагнітні хвилі в вакуумі

Рівняння електромагнітної хвилі в вакуумі:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \qquad \vec{\nabla}^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0. \tag{1.7}$$

Плоска монохроматична хвиля:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp[i(\omega t - \vec{k}\vec{r})], \qquad \vec{B} = \vec{B}_0 \exp[i(\omega t - \vec{k}\vec{r})] \tag{1.8}$$

Тут $\vec{E}_0$, $\vec{B}_0$ – сталі вектори, $\vec{r} = (x, y, z)$. Якщо $\vec{n}$ – одиничний вектор нормалі до хвильової поверхні, то $\vec{n} \times \vec{E} = c\vec{B}$, $c\vec{n} \times \vec{B} = -\vec{E}$.

Вектор Пойнтинга: $\vec{\Pi} = \varepsilon_0 c^2 \vec{E} \times \vec{B} = 2cU_E\vec{n} = 2cU_B\vec{n} = cU\vec{n}$, де введено густину енергії електромагнітної хвилі:

$$U = U_E + U_B = \frac{\varepsilon_0}{2}E^2 + \frac{\varepsilon_0 c^2}{2}B^2$$

Поперечність електромагнітних хвиль

Якщо $\vec{n}$ – одиничний вектор нормалі до хвильової поверхні, то $\vec{n} \times \vec{E} = c\vec{B}$, $c\vec{n} \times \vec{B} = -\vec{E}$.

Поляризація електромагнітних хвиль

Хвилю називають *поляризованою* якщо вектор $\vec{E}$ в певній точці простору при проходженні хвилі змінюється за детермінованим (не хаотичним) законом. Площина поляризації $\vec{E}, \vec{k}$.

Лінійно поляризована хвиля: $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \alpha)$

Еліптично-поляризована хвиля:

$$\frac{E_x^2}{a^2} + \frac{E_y^2}{b^2} = 1 \tag{1.9}$$

Закон Малюса : інтенсивність хвилі, що пройшла через поляризатор: $I = I_0 \cos^2 \varphi$, де I_0 – інтенсивність хвилі на вході в поляризатор, φ – кут між вектором поляризації хвилі і віссю поляризотора.

Степінь поляризації :

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}/2} = \frac{I_{\text{pol}}}{I_{\text{pol}} + I_{\text{chaot}}}, \tag{1.10}$$

$I_{\max}$, $I_{\min}$ – максимальна і мінімальна інтенсивності, що спостерігаються на виході з поляризатора при повороті його осі, I_{pol}, I_{chaot} – інтенсивність поляризованої і неполяризованої компоненти світла на вході в поляризатор.

Випромінювання електромагнітних хвиль

Заряд q, що рухається з прискоренням $\vec{a}$, випромінює в тілесний кут 4π *потужність*

$$P = 20\frac{q^2a^2}{c^2}\text{ Вт}\quad \text{(в системі СІ).} \tag{1.11}$$

Середня за пері од потужність випромінювання диполя, дипольний момент якого залежить від часу як $\vec{p} = \vec{p}_0 \cos\omega t$:

$$\langle P\rangle = 10\frac{p_0^2\omega^4}{c^2}\text{ Вт.} \tag{1.12}$$

В хвильовій зоні диполя (див. Рис.)

$$\begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{E}_0 \\ \vec{B}_0 \end{pmatrix} \frac{\sin\theta}{R}\cos(\omega t - kR). \tag{1.13}$$

Діпазон частот, які використовуються в радіомовленні: $\Delta\nu = 10$ кГц$\div$ 275 ГГц ($\Delta\lambda = 30$ км$\div$ 1,09 мм).

Релятивістський ефект Доплера

Оптичний ефект Допплера:

$$\omega = \omega_0\frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - (v/c)\cos\alpha}. \tag{1.14}$$

Поздовжний ефект Допплера ($\alpha = 0$):

$$\omega = \omega_0\sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}}.$$

Поперечний ефект Допплера ($\alpha = \pi/2$):

$$\omega = \omega_0\sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

§1.4 Електромагнітні хвилі в речовині

Рівняння д'Аламбера для електромагнітних хвиль в речовині:

$$\vec{\nabla}^2\vec{E} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E} = 0, \quad \vec{\nabla}^2\vec{H} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{H} = 0. \tag{1.15}$$

Фазова швидкість (швидкість переносу фази):

$$v_{\text{фаз}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}.$$

При $\mu \approx 1$, $v_{\text{фаз}} = c/\sqrt{\varepsilon}$.

Абсолютний показник заломлення речовини

$$n = \frac{c}{v_{\text{фаз}}} = \sqrt{\varepsilon}.$$

Інтенсивність $I \propto nE_m^2$.

Групова швидкість (швидкість переносу енергії):

В однорідному середовищі

$$v_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk},$$

В загальному випадку

$$\vec{v}_{\text{гр}} = \vec{\nabla}_k \omega = \frac{\partial\omega}{\partial k_x}\vec{e}_x + \frac{\partial\omega}{\partial k_y}\vec{e}_y + \frac{\partial\omega}{\partial k_z}\vec{e}_z.$$

Розділ 2

Звукові хвилі

§1 Характеристики і властивості звуку

Звуком (або хвилми пружності) назвивають механічні коливання частинок середовища, що розповсюджуються в просторі.

Розрізняють такі діапазони звукових частот, які сприймає людське вухо:

- звук – 20 Гц $\div$20 кГц,
- інфразвук – менше 20 Гц,
- ультразвук – більше 20 кГц,
- гіперзвук – $10^9 \div 10^{13}$ Гц, або $1 \div 10^4$ ГГц. Гіперзвук дуже складно створити, оскільки при такій частоті довжина хвилі порядка міжатомних відстаней, тобто, 10^{-8} см, а швидкість гіперзвуку, відповідно, порядка 10 км/с.

Для характеристики звуку вводять такі поняття:

- висота;
- тембр ;
- гучність.

Розглянемо ці поняття детальніше. Почнемо з *висоти*, яка визначається частотою звуку. Чим більша частота, тим більш "високий" звук. Однак, якщо фізичний прилад просто розрізняє частоти за абсолютною величиною, то людина сприймає відносну висоту, тобто, співвідношення частот різних звуків. Саме на це сприйняття орієнтована музика. Так, в музиці вводять октави, тобто, інтервали частот, граничні значення яких відрізняються вдвічі. Людське вухо сприймає звуки, розділені октавою, як дуже схожі, хоча вони і відрізняються частотами.

Тембр характеризує звуковий хвильовий пакет, точніше, його спектральний склад. Будь-який сигнал. в тому числі і звуковий. представляє собою хвильовий пакет, тобто, сукупність хвиль з близькими, але різними частотами. Набір частот, що входять в пакет, визначають його спектр. Чим ширше частотний інтервал, в якому лежить спектр звукового сигналу, тим багатший ("густіший") в нього тембр, тим приємніший такий звук для вуха європейця. Сигнали з вузьким спектром (близьким до монохроматичного) сприймаються як різкі, неприємні.

Гучність – це інтенсивність **сприйняття** звуку. В загальній теорії хвиль інтенсивністю називають кількість енергії, що її переносить хвиля за одиницю часу через одиницю поверхні перпендикулярно до цієї поверхні. Інтенсивність вимірюється в Вт/м^2. Наприклад, для електромагнітних хвиль енергія, що переноситься за одиницю часу,

$$\mathcal{E} = \int_S \vec{\Pi} \cdot \vec{n} dS, \tag{2.1}$$

відповідно, інтенсивність дорівнює

$$I = \frac{d\mathcal{E}}{dS} = \vec{\Pi} \cdot \vec{n} = \varepsilon_0 c^2 \vec{E} \times \vec{B} \cdot \vec{n}. \tag{2.2}$$

Таким чином, для ЕМХ інтенсивність дорівнює нормальній (відносно поверхні) компоненті вектора Пойнтинга. Якщо хвиля падає на поверхню S перпендикулярно, то $I = |\langle\vec{\Pi}\rangle|$. Оскільки в ЕМХ амплітуди електричного і магнітного полів зв'язані лінійним співвідношенням, $E_m = cB_m$, то інтенсивність пропорційна квадрату амплітуди: $I \propto E_m^2$.

В загальному випадку інтенсивність теж пропоційна квадрату амплітуди хвилі: $I \propto a^2$.

Інтенсивність звукових хвиль називають *силою звуку*. Сила звука – об'єктивна (не залежить відсприйняття) характеристика звукової хвилі. А гучність – суб'єктивна характеристика. оскільки залежить від сприйняття інтенсивності.

Як випливає з експерименту, сила звуку зростає в геометричній прогресії, а гучність – в арифметичній (у відповідності з законом Вебера-Фехнера. див. далі). Отже, гучність пропорційна логарифму сили звука: $\lg I$.

Біофізичний закон Вебера-Фехнера (E.H. Weber, G.T. Fechner, 1834 р.). Фундаментальна особливість всіх органів чуття відбражена законом Вебера-Фехнера: сприйняття сигналу людиною пропорційно до логарифму інтенсивності зовнішнього впливу. В середині минулого століття (1950 р.) цей закон було узагальнено Стівеном для широкого класу реакцій людського організму, включаючи біль, зовнішній тиск (тактильні відчуття), зір і слух.

Для гучності звуку (та сприйняття світла оком) вводять величину

$$L = \lg \frac{I}{I_{\min}}, \quad (\text{Бел}), \quad \text{або} \quad L = 10 \lg \frac{I}{I_{\min}} \quad (\text{децибел}), \tag{2.3}$$

де I – інтенсивність зовнішнього впливу, $I_{\min}$ – гранична (стандартна) інтенсивність впливу відповідного сигналу (звукового або світлового).

Умовно приймається, що величина $I_{\min}$ знаходиться поблизу границі сприймання відповідного сигналу. Сигнал з $I < I_{\min}$ не сприймається, отже, при $I = I_{\min}$ $L = 0$.

Формулу (2.3) застосовують для визначення відносної інтенсивності різних величин. Зокрема, для звуку при частоті $\nu = 1$кГц $I_{\min} = 10^{-12}$ Вт/м^2 (границя чутливості "середньостатистичного" вуха), для світлових хвиль $I_{\min} = 10^{-16}$ Вт/м^2 (границя чутливості "середньостатистичного" ока).

Одиниця вимірювання гучності Бел названа на честь винахідника телефона Александра Грехема Белла (1847 — 1922). На практиці використовують меншу одиницю, дБ. Це пов'язано з тим, що найменша зміна гучності, яку сприймає людське вухо (при частоті в 1 кГЦ) як раз і дорівнює зміні на 1 дБ:

$$\Delta L = 1 \text{ дБ} = 0{,}1 \text{ Б} = \lg L = \lg 10^{0{,}1}, \tag{2.4}$$

що відповідає зміні інтенсивності

$$\frac{I_2}{I_1} = 10^{0,1} = 1,26.$$

Це означає, що збільшення гучності на 1 дБ вимагає збільшення звукової потужності на 26% (на 1 м^2).

Наведемо приклади гучностей типових звуків:

- 25 дБ – шелест листя при вітрі;
- 30 дБ – цокотіння стінного маятникового годинника;
- 75-80 дБ – шум на вулиці невеликого міста, пилосос.

Санітарні норми вимагають, щоб в квартирі вдень було не більше 40 дБ, а вночі – не більше 30 дБ.

Повернемося до визначення (2.3). Відношення інтенсивностей I_1 і I_2 двох сигналів в децибелах дорівнює

$$\Delta L_{21} = L_2 - L_1 = 10\left(\lg\frac{I_2}{I_{\min}} - \lg\frac{I_1}{I_{\min}}\right) = 10\lg\frac{I_2}{I_1}. \tag{2.5}$$

Таким чином, якщо інтенсивність одного звукового сигналу в 10 разів більша за інтенсивність іншого, то його гучність буде більша на 10 дБ.

Наведена вище границя чутливості $I_{\min}$ залежить від частоти. Людське вухо найбільш чутливе до частот, що лежать в інтервалі від 500 до 5000 Гц (людська мова). В цьому діапазоні частот і визначається граничне значення $I_{\min}$. Діапазон інтенсивностей, які сприймає людське вухо (тобто, наше звукове вікно в світ), лежить в інтервалі $10^{-12} \div 1$ Вт/м^2, що відповідає $\Delta L_{\text{вухо}} = 0 \div 120$ дБ.

Цікаво, що найвдосконаліший оптичний прилад – людське око, – здатний сприймати інтенсивності в інтервалі $10^{-16} \div 10^{-4}$ Вт/м^2, що, знов-таки, відповідає $\Delta L_{\text{око}} = 0 \div 120$ дБ. Такий збіг, скоріш за все, не є випадковим. Однак причини його сучасна біофізика поки що не з'ясувала. Є припущення, що універсальність "робочих" інтервалів різних органів відчуття пов'язана з природою мозку. Адже фактично ми чуємо і бачимо мозком, оскільки нервові закінчення від слухового та зорового апаратів йдуть до мозку, де, власне, і відбувається усвідомлення побаченого і почутого.

Чи виконується закон Вебера-Фехнера для інших сенсорних реакцій людини, таких, як біль, тактильні відчуття (тиск), запах? Через сто років після Вебера і Фехнера Стівенс (S.S. Stevens, 1950 р.) узагальнив співвідношення (2.3), ввівши замість логарифмічного степеневий зв'язок між реакцією (L) та інтенсивністю стимулу I (див. Рис. 2.1):

$$L = k(I - I_{min})^a, \tag{2.6}$$

де показник a різний для різних чинників.

Близький до одиниці (і, відповідно, до закону Вебера-Фехнера) показник a для таких стимулів, як сприймання яскравості, візуальна оцінка довжини об'єкту, відчуття холоду та тепловий біль, сприймання голосу. Менший за одиницю (порядка 0,7) показник мають такі стимули, які створюють певний "дискомфорт" – нагрів тіла в цілому, запах, тактильні відчуття при натисненні. Більший за одиницю (порядка 1,5) показник мають стимули, "загрозливі" для організму людини – локальний нагрів, смакові відчуття, перевантаження, пов'язані з прискоренням, навантаженням м'язів.

Рис. 2.1: Біофізичний закон Стівенса: залежність реакції мозку від інтенсивності стимула для різних зовнішніх чинників.

Повернемось, однак, до звуку. При інтенсивності $I_{\max} = 1 \div 10$ Вт/м^2 коливання перестають сприйматися як звук і з'являється біль. Тому це значення інтенсивоності називають больовою границею відчуття. В децибелах границя болю лежить в інтервалі 120-130 дБ. Таку інтенсивність звуку створює реактивний двигун в 5 м від джерела. Зазначимо, що больова границя, як нижня границя чутливості, залежить від частоти. Для ока больова границя становить $I_{\max} = 10^{-4}$ Вт/м^2.

Вимірювання відношення інтенсивностей в дБ, яке спочатку виникло в акустиці, згодом розповсюдили на всі хвильові процеси, в тому числі, і на електромагнітні хвилі. Наприклад, кожній радіостанції або телестудії відводиться для мовлення певний діапазон частот. При цьому жорстко встановлюють величину згасання як відношення інтенсивності на границях виділеного інтервалу до максимальної інтенсивності діапазона. Як правило, $I_2 = 10^{-6} \cdot I_{\max}$. Отже, з формули (2.5) отримуємо згасання в 60 дБ або 6 Б.

Відмітимо ще одну особливість. Оскільки гучність залежить від частоти, то для характеристики гучності на різних частотах вводять спеціальну одиницю – *фон*. Приймають, що на стандартній частоті 1 кГц гучність в фонах дорівнює гучності в децибелах, а для інших частот будують ізофони, тобто, лінії однакової фізіологічної гучності (див. Рис.2.2).

Рис. 2.2: Лінії однакової фізіологічної гучності. Вертикальна червона лінія відповідає стандартній частоті 1 кГц, на якій гучність в фонах співпадає з гучністю в децибелах. Пунктирна лінія – границя чутливості.

Наприклад, звук на частоті 100 Гц і гучністю 50 дБ сприймається вухом так само, як і звук на частоті 1 кГц гучністю в 40 дБ. Це означає, що обидва звуки мають однакову гучність в 40 фон. Для прикладу відмітимо, що гучність тихого шепоту становить 30 фон, нормальне спілкування – 50 фон, гучна промова (лекція) – 70 фон.

Обговоримо, нарешті, швидкість звуку. В твердих тілах існують поздовжні і поперечні хвилі. Для поздовжних хвиль швидкість звуку v залежить від модуля Юнга E та густини матеріалу ρ:

$$v_{\parallel} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \tag{2.7}$$

Для поперечної хвилі в аналогічну формулу замість модуля Юнга слід підставити модуль зсуву G:

$$v_{\perp} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}. \tag{2.8}$$

Оскільки зазвичай $G \propto 0,1E$, то швидкість поперечної хвилі приблизно в $3 \div 1,5$ разів менша за швидкість поздовжної. Наприклад, в сталі $v_{\parallel} = 5100$ м/с, $v_{\perp} = 3000$ м/с; в свинці $v_{\parallel} = 2000$ м/с, $v_{\perp} = 700$ м/с.

В газах та рідинах розповсюджуються тільки поздовжні хвилі (стиснення та розрідження), відповідна швидкість залежить від тиску P:

$$v_{\text{газ}} = \sqrt{\frac{P}{\rho}}. \tag{2.9}$$

Наприклад, при температурі 20 С швидкість звуку в повітрі 340 м/с, в воді 1490 м/с.

§2 Акустичний ефект Допплера

При переході від однієї інерціальної системи відліку до іншої частота хвилі не залишається інваріантною. Іншими словами, для двох різних спостерігачів, які рухаються один відносно іншого, частота однієї тієї ж хвилі буде різною. Цей фізичний ефект називають ефектом Допплера (відкритий австрійцем Крістіаном Допплером в 1842 р.). Припустимо, що джерело хвилі рухається із швидкістю v_{s}, а приймач (детектор) – із швидкістю v_{d}. Частота, яку сприймає детектор, ω_{d}, залежить від відносної швидкості джерела і приймача.

Для того, щоб знайти зв'язок між ω_{d} і частотою хвилі ω_{s} в нерухомій системі відліку, скористаємося положенням про *інваріантність фази хвилі* φ при переході від однієї інерціальної системи відліку до іншої:

$$\varphi = \omega t - kx = \omega' t' - k' x' = \mathrm{inv}. \tag{2.10}$$

Тут штриховані величини відносяться до системи відліку K', що рухається із швидкістю v_0, а величини без штрихів – до нерухомої системи K.

Згідно з перетвореннями Галілея, $t = t'$, $x' = x - v_0 t$. Підставляючи ці співвідношення в (2.10), отримуємо

$$\omega t - kx = \omega' t - k'(x - v_0 t). \tag{2.11}$$

Для того, щоб рівність (2.11) виконувалася для довільного моменту часу t і в довільній точці x, необхідно, щоб $k = k'$ і $\omega' = \omega - v_0 k' = \omega - v_0 k$. Оскільки частота в K- системі залежить від хвильового вектора як $\omega = v_{\text{зв}} k$, де $v_{\text{зв}}$ – швидкість звуку, то остаточно отримуємо формулу для перетворення частот

$$\omega' = \omega \left(1 - \frac{v_0}{v_{\text{зв}}}\right). \tag{2.12}$$

Розглянемо тепер деякі окремі випадки.

1. Якщо швидкість джерела звуку $v_{\mathrm{s}} = 0$, а швидкість приймача $v_{\mathrm{d}} = \pm v_0$, то частота звуку, яку реєструє приймач

$$\omega_{\mathrm{d}} = \omega_{\mathrm{s}} \left(1 - \frac{\pm v_0}{v_{\text{зв}}}\right).$$

2. Якщо $v_{\mathrm{s}} = \pm v_0$, а $v_{\mathrm{d}} = 0$, то

$$\omega_{\mathrm{s}} = \omega_{\mathrm{d}} \left(1 - \frac{\pm v_0}{v_{\text{зв}}}\right).$$

3. Якщо $v_\mathrm{s} \neq 0$, а $v_\mathrm{d} \neq 0$, то

$$\omega_\mathrm{d} = \omega_\mathrm{s} \frac{v_\text{зв} - v_\mathrm{d}}{v_\text{зв} - v_\mathrm{s}}.$$

Розділ 3

Ефекти додавання хвиль

§1 Биття

Розглянемо дві плоскі хвилі, що розповсюджуються вздовж осі x:

$$\psi_1(x,t) = a_1 \cos(\omega_1 t - k_1 x + \varphi_1), \quad \psi_2(x,t) = a_2 \cos(\omega_2 t - k_2 x + \varphi_2). \quad (3.1)$$

Припустимо, що частоти цих коливань близькі

$$\omega_1 \approx \omega_2 \gg |\omega_1 - \omega_2|.$$

Приймемо також для визначеності $a_1 \geq a_2$. Розглянемо результат накладання коливань (3.1) в точці з фіксованою координатою x_*.

Для знаходження величини $\psi(x_*,t) = \psi_1(x_*,t) + \psi_2(x_*,t)$ можна скористатися або відомими формулами додавання тригонометричних функцій, або їх геометричною інтерпретацією, що спирається на правила векторної алгебри і теорему косинусів.

Величину $\psi_1 = a_1 \cos\alpha_1$ можна розглядати як X- компоненту вектора $\vec{a}_1$ в декартовій системі координат XY (не плутати з координатою x в фізичному просторі, в якому розповсюджується хвиля). Аналогічно, $\psi_2 = a_2 \cos\alpha_2$ можна розглядати як X-компоненту вектора $\vec{a}_2$, а суму $\psi = \psi_1 + \psi_2$ – як X- компоненту вектора $\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$ (див. Рис.) З геометричих міркувань (теорема косинусів) величина вектора $\vec{a}$ залежить від різниці кутів $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$:

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 a_2 \cos\alpha \quad (3.2)$$

і може змінюватись від $|a_1 - a_2|$ (вектори $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$ протилежно напрямлені) до $|a_1 + a_2|$ (вектори $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$ паралельні).

Рис. 3.1: Биття.

Скористаємось векторним додаванням коливань (див. Рис.). Кожен з векторів $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$ обертається на площині зі своєю кутовою швидкістю ω_1,ω_2.

Кут між векторами $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$ (а, фактично, це відносна фаза коливань) залежить від часу таким чином:

$$\alpha = (\omega_2 - \omega_1)t - (k_2 - k_1)x_* + (\varphi_2 - \varphi_1) = (\omega_2 - \omega_1)t + (\varphi_2 - \varphi_1), \quad (3.3)$$

де ми скористались довільністю вибору координати і поклали $x_* = 0$.

Отже, з векторної діаграми Рис. ми бачимо, що вектор $\vec{a}_2$ обертається відносно вектора $\vec{a}_1$ з кутовою швидкістю $\Omega = |\omega_2 - \omega_1|$ (якщо $\omega_2 > \omega_1$, то в тому ж напрямку, що і кожен з векторів). Вся ж картинка обертається з частотою $\omega \approx \omega_1$. Довжина вектора $\vec{a}$ змінюється з часом з частотою Ω від $|a_1 - a_2|$ до $|a_1 + a_2|$.

Таким чином, сумарне коливання (див. Рис.3.1) в фіксованій точці простору, через яку проходять хвилі (3.1), відбувається із змінною амплітудою, при цьому період коливань амплітуди дорівнює

$$T = \frac{2\pi}{\Omega}. \quad (3.4)$$

Зрозуміло, що такі коливання вже не можна вважати гармонічними. Знайдемо інтенсивність сумарних коливань, скориставшись співвіджношенням $I \propto a^2$ і формулою (3.2):

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos(\Omega t + \Delta\varphi), \quad (3.5)$$

де $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$. З формули (3.5) видно, що при накладанні хвиль з різними частотами не тільки амплітуда, але й інтенсивність сумарних коливань в заданій точці простору періодично змінюється з часом. Саме явище коливань інтенсивності і називають *биттям*.

§2 Стоячі хвилі

Розглянемо тонкий стержень, закріплений з обох боків. Вздовж стержня може розповсюджуватися звукова хвиля, а точкі закріплення можна розглядати як перешкоди на її шляху. Наявність перешкоди призводить до явища, яке називають *стоячими хвилями*.

В загальному випадку, стоячі хвилі утворюються внаслідок накладання двох біжучих хвиль: хвилі, що падає на перешкоду і хвилі, що відбилася від перешкоди. Стоячі хвилі мають такі властивості:

1. Для утворення стоячої хвилі необхідна перешкода, від якої хвилі відбиваються.

2. Область простору, в якому знаходиться стояча хвиля, можна розбити на комірки розміром $\lambda/2$, де λ – довжина хвилі. На границях цих комірок амплітуда коливань дорівнює нулю.

3. Стоячі хвилі мають дискретний спектр коливань і в певному розумінні можуть вважатися класичним аналогом квантових систем (тобто, систем з дискретним енергетичним спектром).

4. Стоячі хвилі не переносять енергії.

Розглянемо утворення стоячої хвилі на прикладі струни довжини L з закріпленими кінцями. Вздовж струни (вісь x) розповсюджуються дві біжучі хвилі: зліва направо $\psi_{\rightarrow}(x,t)$, і справа наліво, $\psi_{\leftarrow}(x,t)$:

$$\psi_{\rightarrow}(x,t) = a_0 \exp[-i(\omega t - kx)], \quad \psi_{\leftarrow}(x,t) = a_0 \exp[-i(\omega t + kx - \theta)]. \tag{3.6}$$

Зауважте, що хвилі мають однакову амплітуду, але відрізняються фазами (зсув фаз θ).

В результаті накладання хвиль (3.6) утворюється стояча хвиля

$$\psi_{\text{stand}}(x,t) = \psi_{\rightarrow}(x,t) + \psi_{\leftarrow}(x,t) = a(x)e^{-i\omega t} \tag{3.7}$$

з амплітудою $a(x) = a_0 \left(e^{ikx} + e^{-ikx+i\theta}\right)$. Очевидно, що оскільки амплітуда стоячої хвилі $a(x)$ не залежить від часу,

$$\frac{\partial a}{\partial t} = 0,$$

то стояча хвиля не переносить енергії. Дійсно, енергія хвилі $\mathcal{E} \propto a^2$, отже, в фіксованій точці простору x

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \propto \frac{\partial a^2}{\partial t} = 0,$$

і енергія від однієї точки до іншої не переноситься.

Величиною, що спостерігається в експерименті, є модуль амплітуди:

$$|a(x)|^2 = a(x)a^*(x) = 4a_0^2\cos^2\left(kx - \frac{\theta}{2}\right) \tag{3.8}$$

Для знаходження частотного спектру скористаємося граничними умовами: кінці закріплені, отже, на кінцях амлітуда зміщень дорівнює нулю. З умови на лівій границі, $a(0) = 0$, знаходимо $\theta = pi$ (пояснити), тоді

$$|a(x)| = 2a_0|\sin kx|. \tag{3.9}$$

Як видно з формули (3.9), максимальна амплітуда коливань в стоячій хвилі дорівнює $2a_0$. Точки з максимальною амплітудою називають пучностями. З формули (3.9) також легко побачити, що в пучності дорівнює нулю просторова похідна амплітуди, $da/dx = 0$.

Тепер легко визначити з (3.9) координати вузлів стоячої хвилі (тобто, границі комірок, де коливання відсутні), тобто, $|\sin kx| = 0$, отже, $kx = \pi n$, звідки

$$x_n = \frac{\pi n}{k}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad x_n = n\frac{\lambda}{2} \quad , n = 1, 2\ldots \tag{3.10}$$

Умова на правій границі, $a(L) = 0$, означає, що один з вузлів має координату $x_n = L$. Підставляючи в (3.10) отримуємо, що можливі (дозволені) значення хвильових векторів $k = k_n = \pi n/L$, як і відповідні їм можливі значення довжин стоячих хвиль $\lambda_n = 2L/n$ квантуються, тобто, приймають тільки дискретних значень ($n = 1, 2\ldots$). Максимальна можлива довжина стоячої хвилі залежить тільки від довжини струни: $\lambda_{\max} = 2L/1$, або, $L = \lambda_{\max}/2$.

Спектр частот знаходиться із закону дисперсії $\omega = vk$, де v – фазова швидкість хвилі в середовищі. Очевидно, що спектр частот теж квантується:

$$\omega = vk = \frac{\pi n}{L}v \quad \Rightarrow \quad \omega_n = \frac{\pi v}{L}n.$$

Той факт, що частоти стоячих хвиль, які можуть виникнути в струні, трубі, стержні, дискретні і тому чітко визначені, використовують в музиці для створенні звуків різної висоти. Найпростіший (в фізичному розумінні) приклад – органні труби, в яких за допомогою спеціальних пристороїв ("міхів") створюють стоячі хвилі з довжиною, вдвічі більшою за довжину труби. Кожна нота (звук певної висоти) створюється "своєю" трубою відповідної довжини. Набір звуків різної висоти, які може стоврити орган, великий, але обмежений кількістю труб в інструменті. Те ж саме стосується фортепіано і арфи – кожна струна інтсрументу має фіксовану довжину, тому скільки струн – стільки різних частот.

Гітара, хоч має всього шість або сім струн, дозволяє збільшити кількість частот за рахунок зміни довжини струни – один з кінців струни при грі притискають до грифу (в певних, "дискретних" місцях), тим самим створюють нові граничні умови. Спектр звуків, які можна отримати від скрипки, віолончелі або домри, майже неперервний, це пов'язано з тим, що притискати струну при грі можна в будь-якому місці на грифі.

І, нарешті, відзначимо роль резонаторів, які в музикальних інструментах називають корпусом. При грі на гітарі або скрипці в стуні збуджуються стоячі хвилі на різних частотах (основний тон на мінімальній частоті і обертона на кратних частотах). Роль резоанатора полягає в тому, щоб підсилювати амплітуди одних обертонів і зменшувати інших, створюючи, таким чином, звуки певного тембру.

Зауважимо, що ми розглянули певний, але не єдиний тип граничних умов – закріплені кінці. Стояча хвиля може утворюватися і в струні з вільним кінцем, в цьому випадку в нуль обретається не амплітуда, а просторова похідна від амплітуди (іншими словами, на закріпленому кінці повинен утворюватися вузол, а на вільному – пучність). Незалежно від граничних умов стячі хвилі мають дискретний спектр, а от тип умов (закріплені чи вільні кінці) визначає зв'язок між довжиною хвилі і довжиною струни.

Розглянемо тепер особливості електромагнітних стоячих хвиль. Нагадаю, що біжуча електромагнітна хвиля характеризується двома фізичними векторами, $\vec{E}$ і $\vec{B}$, причому в біжучій хвилі $|\vec{B}_{\rightarrow}| = |\vec{E}_{\rightarrow}|/c$, а вектори $\vec{E}_{\rightarrow}$, $\vec{B}_{\rightarrow}$ і хвильовий вектор $\vec{k}$ взаємноперпендикулярні утворюють праву трійку (мішаний добуток $(\vec{E}_{\rightarrow} \cdot \vec{B}_{\rightarrow} \times \vec{k}) > 0$). При відбитті від зеркальної (металевої) перешкоди, яка перпендикулярна до напрямку розповсюдження хвилі (вектора $\vec{k}$) орієнтація вектора $\vec{E}$ не змінюється, $\vec{E}_{\rightarrow} \upuparrows \vec{E}_{\leftarrow}$, а орієнтація векторів $\vec{B}$ і $\vec{k}$ змінюється на протилежну: $\vec{B}_{\leftarrow} \uparrow\downarrow \vec{B}_{\rightarrow}$, таким чином права трійка залишається правою. Урахування таких граничних умов дозволяє отримати наступні вирази для стоячих електромагнітних хвиль:

$$\begin{aligned} E_{\text{stand}} &= 2E_0 \cos\left(kx - \frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\omega t - \frac{\theta}{2}\right), \\ B_{\text{stand}} &= \frac{2E_0}{c} \sin\left(kx - \frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\omega t - \frac{\theta}{2}\right). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Зверніть увагу на те, що положення вузлів для вектора $\vec{E}$ співпадають з положеннями пучностей для вектора $\vec{B}$.

§3 Хвильові пакети

Розглянемо сукупність плоских хвиль з близькими частотами, які вільно рухаються вздовж осі x:

$$\psi(x,t) = \sum_j \psi_j, \quad \psi_j = a_j \exp[-i(\omega_j t - k_j x)], \tag{3.12}$$

причому всі частоти і хвильові вектори лежать в певному (досить вузькому) діапазоні навколо середнього значення ω_0, k_0: $\omega_0 - \Delta\omega \leq \omega_j \leq \omega_0 + \Delta\omega$, $k_0 - \Delta k \leq k_j \leq k_0 + \Delta k$. Закон дисперсії (зв'язок між частотою і хвильовим вектором) вважається відомим, $\omega = \omega(k)$.

Таку сукупність називають *хвильовим пакетом*. Якщо різні значення k_j в сумі (3.12) розташовані досить щільно, то суму можна замінити інтегралом:

$$\psi(x,t) = \int_{k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k} A(k) \exp[-i(\omega(k)t - kx)] dk. \tag{3.13}$$

Величина $A(k)$ описує амплітуду хвилі з хвильовим вектором k і в загальному випадку приймає різні значення в залежності від k. Однак, якщо (як це характерно саме длч хвильових пакетів) $A(k)$ мало змінюється інтервалі $k_0 - \Delta k \leq k \leq k_0 + \Delta k$, можна прийняти, що $A(k) \approx A(k_0) = const$. Якщо, крім того, функція $\omega(k)$ також повільно змінюється в зазначеному інтервалі хвильових векторів, можна наближено прийняти

$$\omega(k) = \omega_0 + \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_0 \xi + \ldots, \tag{3.14}$$

де $\xi = k - k_0$.

З урахуванням прийнятих наближень (3.13) набуває вигляду:

$$\begin{aligned} \psi(x,t) &= A(k_0) \exp[-i(\omega_0 t - k_0 x)] \int_{-\Delta k}^{\Delta k} e^{i(x-ut)\xi} d\xi \\ &= 2A(k_0) \frac{\sin[(x-ut)\Delta k]}{x-ut} \exp[-i(\omega_0 t - k_0 x)]. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Тут введено зручне для подальшого позначення *групової швидкості* (див. обговорення нижче):

$$u = \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_0 . \tag{3.16}$$

Рис. 3.2: Хвильовий пакет.

Як видно з останнього виразу в (3.15), величина $\psi(x,t)$ складається з двох множників – швидкоосцилюючого на несучій частоті ω_0 ("плоска хвиля") і амплітудний множник

$$A = 2A(k_0)\frac{\sin(\varphi\Delta k)}{\varphi} \to_{\varphi\to 0} 2A(k_0)\Delta k. \tag{3.17}$$

Зауважимо, що амплітуда (3.17) залежить як від координати, так і від часу, $\varphi = x - ut$ Зафіксуємо момент часу (наприклад, візьмемо $t = 0$), тобто, зробимо "миттєвий" знімок просторової залежності амплітуди:

$$A(x) = 2A(k_0)\frac{\sin(x\Delta k)}{x}. \tag{3.18}$$

Очевидно, що функція (3.18) набуває максимального значення, а в точках $x = x_n = \pi n/\Delta k$ ($n = \pm1, \pm2, \ldots$) дорівнює нулю. Оскільки функція $A(x)$ досить швидко спадає з ростом x, то можна вважати, що інтервал, в якому $A(x)$ набуває ненульових значень лежить між першими нулями функції, $x \in [x_{-1}, x_1]$. Таким чином, *ширина хвильового пакета* $\Delta x = 2x_1 = 2\pi/\Delta k$, звідки отримуємо $\Delta x\Delta k = 2\pi$. Більш точні математичні розрахунки призводять до *співвідношення невизначеностей*

$$\Delta x\Delta k \geq 2\pi, \tag{3.19}$$

яке визначає просторову протяжність хвильового пакета.

Вище ми представили хвильовий пакет (3.13) як інтеграл за хвильвими векторами. Однак, функцію $\psi(x,t)$ можна представити і через інтеграл за частотами:

$$\psi(x,t) = \int_{\omega_0-\Delta\omega}^{\omega_0+\Delta\omega} A(\omega)\exp[-i(\omega t - k(\omega)x)]d\omega. \tag{3.20}$$

Скориставшись наближенням, аналогічним до (3.14),

$$k(\omega) = k_0 + \left.\frac{dk}{d\omega}\right|_0 \xi + \ldots, \tag{3.21}$$

де $\xi = \omega - \omega_0$, можна виразити амплітуду через частотний інтервал $\Delta\omega$:

$$\psi(x,t) = 2A(\omega_0)\frac{\sin\{[t-(dk/d\omega)_0 x]\Delta\omega\}}{t-(dk/d\omega)_0 x}\exp[-i(\omega_0 t - k_0 x)]. \tag{3.22}$$

Якщо зафіксувати певну точку простору (наприклад, $x = 0$) і проаналізувати часову залежність амплітуди, то отримаємо співвідношення невизначенностей

$$\Delta t\Delta\omega \geq 2\pi, \tag{3.23}$$

яке визначає часову протяжність хвильового пакета.

Співвідношення невизначенностей (3.19) і (3.23) для хвильових процесів носять фундаментальний характер і мають місце для хвиль будь-якої природи. Якщо хвиля розповсюджуєтьсяв довільному напрямку, то співвідношення, аналогічні (3.19), виконуються для кожної з координат: $\Delta x\Delta k_x \geq 2\pi$, $\Delta y\Delta k_y \geq 2\pi$, $\Delta z\Delta k_z \geq 2\pi$.

Співвідношення (3.19) і (3.23) широко використовуються в теорії кодування і передачі сигналів для оцінки фундаментальних обмежень на пропускну здатність класичних інформаційних каналів, вибору оптимальних процедур вимірювання (зчитування інформації) тощо. З них також випливає, що монохроматична хвиля з $\Delta\omega = 0$ і $\Delta k = 0$ є лише математичною ідеалізацією, оскільки така хвиля повинна бути нескінченою в просторі ($\Delta x \to \infty$) і часі ($\Delta t \to \infty$).

Слід звернути увагу на те, що амлпітуда хвильового пакету $A(x-ut)$ (або $A(t-(dk/d\omega)_0 x)$ залежить явним чином від часу, отже, $\partial A^2/\partial t \propto \partial\mathcal{E}/\partial t \neq 0$ в кожній точці простору. Це означає, що хвильовий пакет переносить енергію.

З формул (3.15), (3.22) випливає, що главний максимум хвильового пакуту не має певного, фіксованого положення в просторі, а весь час зміщується зі швидкістю u, яка визначається формулою (3.16). Дійсно, як видно, наприклад, з (3.15), фаза амплітуди, $\varphi = x - ut$, відповідно, зміна фази $d\varphi = dx - udt$. Якщо прирівняти $d\varphi = 0$, то можна знайти зв'язок між зміщенням dx точки з певною фазою за час dt: $dx = udt$. Таким чином, u є швидкість зміщення хвильового пакета і, відповідно, енергії. Цю швидкість. як вже зазначалося. називають груповою.

Вираз для групової швидкості можна отримати і із співвідношень невизначенності $\Delta x\Delta k \approx 2\pi$ і $\Delta t\Delta\omega \approx 2\pi$, поділивши одне на друге:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}\frac{\Delta k}{\Delta\omega} = 1 \quad \Rightarrow \quad u \equiv \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}.$$

В загальному випадку, при розповсюдженні хвильового пакету в довільному напрямку,

$$u_x = \frac{\partial \omega}{\partial k_x}, \quad u_y = \frac{\partial \omega}{\partial k_y}, \quad u_z = \frac{\partial \omega}{\partial k_z}, \quad \vec{u} = \vec{\nabla}_k \omega. \tag{3.24}$$

Отримані формули (3.16), (3.24) для групової швидкості не враховують наявності диспесії середовища (тобто, залежності фазової швидкості від частоти або хвильового вектора). Іншими словами, при розвиненні в ряд залежності частоти від хвильового вектора (3.14) ми врахували тільки перші два доданки. Урахування подальших членів ряду необхідно, в середовищі з дисперсією. В останньому випадку хвильовий пакет змінює форму, розповзається. Однак, якщо дисперсія мала (тобто, відкинуті в (3.14) доданки малі порівнянно із залишеними), то хвильовий пакет зберігає свою форму. В цьому випадку групова швидкість – це швидкість центру пакета.

Знайдемо зв'язок між груповою швидкістю і фазовою,

$$v = \frac{\omega}{k}. \tag{3.25}$$

Для цього виразимо з (3.25) $\omega = vk$ і підставимо в (3.16):

$$u = v + k\frac{dv}{dk}. \tag{3.26}$$

Згадаємо зв'язок між хвильовим вектором і довжиною хвилі в середовищі: $k = 2\pi/\lambda$, $dk = -2\pi/\lambda^2$ і підставимо в (3.26). В результаті отримуємо *формулу Релея*:

$$u = v - \lambda\frac{dv}{d\lambda}. \tag{3.27}$$

В області нормальної дисперсії $dv/d\lambda > 0$, отже, групова швидкість менша за фазову, $u < v$. За відсутності дисперсії, $dv/d\lambda = 0$, групова швидкість співпадає з фазовою, $u = v$.

Для електромагнітних хвиль в середовищі дисперсію визначають за залежністю показника заломлення від частоти, $n(\omega)$. З іншого боку, в цьому випадку фазова швидкість $v = c/n$ і $k = \omega n/c$. Отже, взявши похідну від хвильового вектора,

$$\frac{1}{u} = \frac{dk}{d\omega} = \frac{n}{c} + \frac{\omega}{c}\frac{dn}{d\omega},$$

отримуємо для групової швидкості електромагнітних хвиль в середовищі такі формулу:

$$u = \frac{c}{n + \omega(dn/d\omega)}. \tag{3.28}$$

Формула (3.28) "підказала" фізикам, як можна уповільнити імпульс світла до швидкості порядка 1 км/с (т.з. "зупинка світла", невдала з точки зору фізики назва, придумана для реклами явища). Дійсно, відношення групової швидкості до швидкості світла в вакуумі визначається двома доданками (в знаменнику) – показником заломлення, який в залежності від середовища може змінюватися в інтервалі $1 \div 10$, і частотною похідною від показника заломлення. Відомо, що в області поглинання величина показника заломлення сильно змінюється в дуже вузькому інтервалі частот поблизу частоти поглинання, отже, похідна $\omega(dn/d\omega)$ може становити $10^5 \div 10^6$, і, відповідно, в стільки ж разів зменшиться групова швидкість світлового імпульсу. Зауважимо, що спостерігати явище уповільнення можна тільки для хвильових пакетів зі спектром в певному, достатньо вузькому частотному діапазоні, який відповідає діапазону полинання середовища. Середовище теж готують спеціальним чином, як правило, це газ охолоджених атомів/іонів рубідія а бо натрія, які мають зручну для екпсериментів частоту поглинання.

Описане уповільнення сівтлових імпульсів вперше спостерігалося на початку 21 століття дослідниками з MIT, США (М. Лукін з співави.). Сам ефект може використовуватися при обробці інформації, закодованої в квантових степенях вільності імпульса.

Розглянемо приклад використання співвідношення невизначенностей . Для цього оцінимо ширину $\Delta\nu$ смуги частот, які необхідні для передачі телевізійного зображення. Приймемо, що зображення складається з 625 рядків, в кожному рядку $4 \cdot 625.3 = 833$ елементи; за 1 секунду передається 25 кадрів зображення, кожен з яких складається з $1,3 \cdot 625^2 = 5 \cdot 10^5$ послідовних елементів. Отже, для передачі кожної точик зображення необхідно $\Delta t = (25 \cdot 5 \cdot 10^5)^{-1} = 8 \cdot 10^{-8}$ с. Зі співвідношення $\Delta\omega\Delta t = 2\pi$ отримуємо $\Delta\omega = 8 \cdot 10^7$ с$^{-1}$, або, поділивши на 2π, отримуємо $\Delta\nu = 12,5$МГц[1]. Всередині смуги $\Delta\nu$ знаходиться несуча частота ν_0, $\nu_0 - \Delta\nu/2 < \nu < \nu_0 + \Delta\nu/2$, величина якої завжди більша за ширину смуги: $\nu_0 > \Delta nu$. Діапазон несучих частот, який використовується в кабельному телебаченні, лежить в інтервалі орієнтовно від 50 до 860 МГц (точніше, 47-862 для сучасної серійної апаратури). Очевидно, що для стійкого прийому сигналу несуча частота кожного каналу повинна відрізнятися від сусідньої на величину не менше $\Delta\nu$. Отже, за на-

[1] Це досить груба оцінка, яка не враховує оцифровування сигналів, колір і т.п., однак, дуже близька до реальних 6 МГц, які використовуються в кабельному телебаченні і до 8 МГц в наземному.

шими оцінками, в зазначеному діапазоні частот кабельного телебачення можна розмістити приблизно 65 каналів. Зазначимо, що для наземного телебачення діапазон несучих частот та ширина смуги мають ті ж самі значення.

§4 Когерентність та інтерференція

Корегентність є загальною властивістю хвиль будь-якої природи.

Розглянемо сутність поняття *когерентність* на прикладі коливань довільної фізичної величини $a(t)$ що відбуваються в фіксованій точці простору. Фізичний зміст величини $a(t)$ поки що не суттєвий, це може бути, наприклад, миттєве значення амплітуди звукової хвилі, або компоненти вектора $E(t)$ або $B(t)$ в електромагнітній хвилі.

Всі методи регістрації хвильових коливань в фізичних системах базуються на вимірювані енергії (інтенсивності) коливань. Будь-яке вимірювання триває скінчений проміжок часу Δt, який, як правило, значно перевищує період T хвилі ($\Delta t \gg T$). Оскільки енергія коливань проорційна квадрату величини, що коливається, $\mathcal{E} \propto [a(t)]^2$, то в експерименті реально вимірюють середнє за Δt значення величини $[a(t)]^2$. Це середнє значення називають *вимірюваною інтенсивністю* і позначають у такий спосіб:

$$\langle I \rangle \equiv \langle I \rangle_{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} [a(t)]^2 dt. \tag{3.29}$$

Припустимо, що величина $a(t)$ є сумою двох гармонічних хвиль однакової частоти:

$$a(t) = A_1 \cos(\omega t + \alpha_1) + A_2 \cos(\omega t + \alpha_2). \tag{3.30}$$

Відмітимо, що таке точне співпадіння частот – це зручна ідеалізація, на практиці частоти можуть трохи відрізнятися. це питання буде обговорено нижче.

Підставимо (3.30) в (3.29) і врахуємо, що при осереднені за періодом або за інтервалом часу, набагато більшим за період

$$\langle \cos^2 \omega t \rangle_{\Delta t} = \langle \sin^2 \omega t \rangle_{\Delta t} = \frac{1}{2}, \quad \langle \cos \omega t \sin \omega t \rangle_{\Delta t} = 0. \tag{3.31}$$

Використавши, крім того, відому формулу тригонометрії $2\cos\beta\cos\gamma = \cos(\gamma - \beta) + \cos(\gamma + \beta)$, отримуємо для вимірюваної інтенсивності:

$$\langle I \rangle = \langle I_1 \rangle + \langle I_2 \rangle + \langle I_{12} \rangle, \tag{3.32}$$

Тут введено позначення

$$\langle I_{12}\rangle = A_1 A_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) = 2\sqrt{\langle I_1\rangle\langle I_2\rangle}\cos(\alpha_1 - \alpha_2), \tag{3.33}$$

і враховано, що $\langle I_j\rangle = A_j^2/2$, $j = 1, 2$ (довести самостійно).

Аналіз виразу (3.32) показує, що при накладанні двох гармонічних хвиль (3.30) максимальне значення вимірюваної інтенсивності $\langle I\rangle_{\max} = \left(\sqrt{\langle I_1\rangle} + \sqrt{\langle I_2\rangle}\right)^2$, а мінімальне – $\langle I\rangle_{\min} = \left(\sqrt{\langle I_1\rangle} - \sqrt{\langle I_2\rangle}\right)^2$

Таким чином, вимірювана інтенсивність не дорівнює простій сумі вимірюваних інтенсивностей кожної з хвиль. Це явище і називають *інтерференцією*.

Інтерференцію хвиль називають *конструктивною*, якщо $\langle I\rangle > \langle I_1\rangle + \langle I_2\rangle$ (тобто, $\langle I_{12}\rangle > 0$.

Інтерференцію хвиль називають *деструктивною*, якщо $\langle I\rangle < \langle I_1\rangle + \langle I_2\rangle$ (тобто, $\langle I_{12}\rangle < 0$.

Інтерференція відсутня, якщо $\langle I\rangle = \langle I_1\rangle + \langle I_2\rangle$, або тобто, $\langle I_{12}\rangle = 0$.

Однак, реальна картина інтерференції трохи складніша за описану вище ідеалізовану схему. Як обговорювалося раніше, реальні хвилі ніколи не бувають строго монохроматичними і строго плоскими. З іншого боку, при тривалому осередненні. тобто. за умови $\Delta t \gg T$, навіть невеликі випадкові або систематичні відхилення від гармонічності можуть призвести до знищення інтерференції, тобто, до $\langle I_{12}\rangle = 0$. Тому в реальній ситуації $\langle I_{12}\rangle$ може помітно відрізнятися від нуля тільки якщо виконані певні умови. Саме тому здатність реальних хвиль (тобто, хвильових пакетів) до інтерференції ($\langle I_{12}\rangle \neq 0$) називають *когерентністю*. Таким чином, дві або більше хвиль називають *когерентними*, якщо при їх суперпозиції спостерігають інтерференцію.

Слід звернути особливу увагу на той факт, що визначення когерентних хвиль спирається не на *існування*, а на *спостереження* інтерференції. Це означає, що наявність або відсутність когерентності залежить не тільки від характеру самих хвиль, але й від інтервалу часу Δt протоягом якого відбувається спостереження інтенсивності. Одна й та сама група хвиль може бути когерентною при одному значенні Δt і некогерентною при іншому.

Найпростіший приклад – биття. Якщо час вимірювання Δt інтенсивності коливань задовільняє умові $2\pi/\omega \ll \Delta t \ll T$, де ω – несуча частота, а період биття визначається формулою (3.4) (див. стор. 19), то вимірювана інтенсивність включає ненульовий інтерференційний доданок, $\langle I_{12}\rangle \neq 0$. Якщо ж $\Delta t \gg T$, то всі інтерференційні ефекти будуть осереднені, і $\langle I_{12}\rangle = 0$, інтерференція не спостерігається.

Умові когерентності легко задовольнити для звукових хвиль, характерні частоти яких становлять 10^3 Гц. Для таких хвиль різниця частот в 1 Гц відповідає періоду биття $T = 1$ с. Зробити час спостереження Δt значно меншим за 1 с досить просто, так, наше вухо розрізняє часові інтервали в 0,5 мс. На відміну від звукових, електромагнітні хвилі оптичного діапазону мають характерну частоту 10^{15} Гц. Спостерігати інтерференцію таких хвиль і отримати когерентність набагато складніше.

Будемо називати релальну хвилю *майже монохроматичною*, якщо вона близька до монохроматичної хвилі з частотою ω_0. Така реальна хвилю преставляє собою хвильовий пакет з різким максимумом при $\omega = \omega_0$. Іншими словами. ширина пакета $\Delta\omega \ll \omega_0$. Частоту ω_0 називають *несучою*.

Розглянемо результат накладання двох таких майже монохроматичних хвиль (хвильових пакетів) з однаковою несучою частотою. Очевидно, що ці пакети містять хвилі з близькими частотами, отже, при їх накладанні можливі биття. Це означає, що існує такий проміжок часу τ, що для часу вимірювання $\Delta t \ll \tau$ інтерференція спостерігається (хвильові пакети когерентні), а при $\Delta t > \tau$ інтерференція зникає, пакети некогерентні. Таким чином. приходимо до визначення *часу когерентності*. Часом когерентності τ_{coh} двох або більше хвиль називають максимальний проміжок часу, при усереднені по якому ще спостерігають ефект інтерференції.

Розглянемо інтерференцію майже монохроматичних хвиль в точці $x = 0$. Припустимо, миттеві значення цих хвиль, $a_1(t)$ і $a_2(t)$, задані законами

$$a_1(t) = A_1(t)\cos(\omega_0 t + \alpha_1), \quad a_2(t) = A_2(t)\cos(\omega_0 t + \alpha_2), \tag{3.34}$$

де ω_0– несуча частота, а амплітуди $A_1(t)$ і $A_2(t)$ плавно залежать від часу (ознака майже монохроматичної хвилі), тобто, $A_1(t)$ і $A_2(t)$ майже не змінюються протягом періоду $T_0 = 2\pi/\omega_0$. Інтерференційний доданок в цьому випадку має вигляд

$$\langle I_{12}\rangle = \langle A_1(t)A_2(t)\rangle\cos(\alpha_1 - \alpha_2), \tag{3.35}$$

де виконано осереднення за період часу T_0 (довести самостійно), а знак

$\langle \ldots \rangle$ в правій частині (3.35) означає усереднення за часом вимірювання Δt.

Для всіх реальних джерел, що випромінюють хвилі, існує такий мінімальний час когерентності τ_{coh}, що при усередненні по $\Delta t > \tau_{\mathrm{coh}}$ виконується рівність $\langle A_1(t)A_2(t)\rangle = 0$, і, отже, $\langle I_{12}\rangle = 0$. Час існування значення $\langle I_{12}\rangle \neq 0$і буде часом когерентності.

Якщо $\Delta t \approx \tau_{\mathrm{coh}}$, то хвилі називають *частково-когерентними*.

Окрім часу когерентності вводять ще поняття *довжини когерентності* – це відстань, при проходжені якої дві або більше хвиль втрачають когерентність. Так, для електромагнітних хвиль в вакуумі $\ell_{\mathrm{coh}} = c\tau_{\mathrm{coh}}$.

До цього часу ми розглядали когерентні хвилі, що відрізняються від плоских монохроматичних хвиль тільки розкидом по частотах і вважали, що у відповідних хвильових пакетах всі парціальні (складові) хвилі характеризуються однаково напрямленим хвильовим вектором $\vec{k}$. Когерентність такого типу називають *часовою*.

В реальних хвилях вектор $\vec{k}$ не має певного, визначеного напрямку хоча б вже тому, що реальні хвилі мають скінчені поперечні (відносно напрямку розповсюдження) розміри. Тому, як випливає зі співвідношення невизначенностей $\Delta k_j \Delta x_j \geq 2\pi$, для хвилі з поперечними розмірами Δr поперечні компоненти вектора $\vec{k}$, $\vec{k}_\perp$, мають розкид $k_\perp \propto 2\pi/\Delta r$ навколо нульового значення, що, в свою чергу. свідчить про викривлення (відмінність від плоского) хвильового фронту. Причин такого розкиду дві. По-перше, хвильовий фронт має скінчений розмір і тому сам пакет утворюється групою хвильових векторів. а не одним вектором (по аналогії з частотами). По-друге, скінчений кутовий розмір $\Delta\theta$ має і джерело випромінювання. Якщо $\theta \ll 1$, то з геометричних міркувань очевидно, що $\Delta\theta = \Delta k_\perp / k$. Таким чином, приходимо до ще одного поняття. пов'язаного зі здатністю реальних хвиль до інтерференціїї – *радіуса когерентності*. Радіусом когерентності r_{coh} називають максимальну відстань в напрямку, поперечному до напрямку розповсюдження хвилі, на якій ще можливо спостерігати інтерференцію. Крім того, користуються ще поняття *об'єм когерентності*: $v_{\mathrm{coh}} = \ell_{\mathrm{coh}} r_{\mathrm{coh}}^2$.

Інтерференція хвиль з скінечним радіусом когерентності можлива тільки за умови $r \ll r_{\mathrm{coh}} = 2\pi/\Delta k_\perp$, де r – поперечна відносно напрямку розповсюдження хвилі відстань між парціальними хвилями. По аналогії з часовою, когерентність, пов'язану з розкидом напрямків хвильових векторів називають *просторовою*. Таким чином, часова когерентність враховує немонохроматичність хвиль (хвильових пакетів), а просторова – викривлення хвильової поверхні (відхилення від плоскості).

Визначимо для прикладу радіус когерентності сонячних променів. Для цього скористаємося співвідношеннями для радіуса когерентності: $r_{\text{coh}} = 2\pi/\Delta k_\perp$ і для кутового розміру джерела випромінення (Сонця): $\Delta\theta = \Delta k_\perp/k$, комбінація яких призводить до формули

$$r_{\text{coh}} = \frac{2\pi}{k\Delta\theta} = \frac{\lambda}{\Delta\theta}. \tag{3.36}$$

Таким чином, з урахуванням (3.36), критерій інтерференції набуває вигляду: $r \ll r_{\text{coh}} = \lambda/\Delta\theta$. Приймемо для оцінки довжину хвилі з середини діапазону видимого світла, $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$ м. Кутовий розмір Сонця становить $\Delta\theta = 10^{-2}$ рад. Підставляючи в формулу (3.36), отримуємо оцінку для радіуса когерентності: $r_{\text{coh}} = 5 \cdot 10^{-5}$ м$= 0,05$ мм. Така мала величина радіуса когерентності Сонця сильно ускладнює спостереження інтерференції, особливо з урахуванням роздільної здатності людського ока – 0,1 мм (тобто, людина здатна розрізнити лінії, що знаходяться на відстані, вдвічі більшій за радіус когерентності), і це – на відстані найкращого зору (25 см). Не зважаючи на це, історично перше спостереження інтерференційної картини було здійснено саме для сонячних променів, і здійснив його 1801 року Томас Юнг. Він пропустив сонячні промені в темну кімнату крізь щільну тканину штори, в якій голкою проколов отвір і тим самим суттєво збільшив радіус когерентності. Такий отвір працював як джерело світла із значно меншиим (на кілька порядків) кутовим розміром, ніж Сонце. За отвором розміщувалися дві щілини, які створювали дві когерентні хвилі (ділення хвильового фронту, див. далі), результат накладання цих хвиль спостерігався на екрані.

І, нарешті, відмітимо (опустивши математичні подробиці) ще одну особливість спостереження інтерференційної картини. Експериментально встановлено, що спостереження інтерференції електромагнітних хвиль можливо тільки для хвиль з *однаковою поляризацією*. В 1819 році А.Ж. Френель і Араго провели досліди з хвилями, які були поляризовані у взаємно перпендикулярних напрямках і показали, що для таких хвиль інтерференція не спостерігається. При цьому дослідники також встановили умови інтерференції поляризованих хвиль. Експерименти Френеля і Араго стали вирішальним свідченням поперечності світлових хвиль (які, як встановив Максвел, мають електромагнітну природу).

Розглянемо тепер кілька прикладів. Для електромагнітних хвиль довжина когерентності і, відповідно, можливість і спосіб спостереження інтерференції суттєво залежать від діапазону частот (або довжин хвиль). Типові антени для радіодіапазону (частота від 10 кГц до 275 ГГц, довжина хвилі, відповідно, від 30 км до 1 мм) мають велику добротність, для них типове відношення розкиду частот (ширини смуги) $\Delta\omega$ до несучою частоти ω_0 становить $\Delta\omega/\omega_0 \propto 10^{-12} \div 10^{-10}$. Для типової довжини хвилі УКВ діапазону $\lambda = 3$ м довжина когерентності становить

$$\ell_{\rm coh} = c\tau_{\rm coh} = c\frac{2\pi}{\Delta\omega} = 10^{10}\frac{2\pi c}{\omega_0} = 10^{10}\lambda,$$

$\ell_{\rm coh} = 3{\cdot}10^{10}$ м$=3{\cdot}10^7$ км. Для таких хвиль два передавача практично завжди когерентні, якщо на них подають сигнал від одного спільного джерела. Будь-яка велика антена, що працює на передачу (а за принципом зворотності, і на прийом) , складається з великої кількості когерентних диполей Герца.

В мікрохвильовом діапазоні джерелом майже монохроматичних хвиль виступають *мазери*[2], в діапазоні від інфрачервоного до ближнього ультрафіолетового – *лазери*. Випромінювання мазерів і лазерів є макроскопічним квантовим об'єктом і описується законами квантової фізики (оптики). Довжина когерентності лазера може сягати кількох кілометрів.

Для більш високочастотного діапазону (наприклад, рентгенівського) майже монохроматичне випромінювання можна отримати тільки в умовах прискорювачів (синхротронне випромінювання), де явище інтерференції та дифракції використовують для діагностики пучків електронів та інших частинок.

§5 Діапазони електромагнітного випромінювання

Розрізняють три діапазони електромагнітних хвиль

1. Радіодіапазон: частота від 10 кГц до 275 ГГц, довжина хвилі від 30 км до 1 мм.

[2] Мазер – абревіатура від англійської Microwave Amplification of Stimulated Emission of Radiation, тобто, посилення мікрохвиль за рахунок стимулюваного випромінення. Аналогічно, лазер пов'язаний з посиленням світлових хвиль, Light.

Табл. 3.1: Діапазони електромагнітного випромінювання.

Діапазон		Частота, Гц	Довжина хвилі
Радіодіапазон	НВЧ	$> 10^{10}$	< 3 см
	УВЧ	$10^9 \div 10^{10}$	$3 \div 30$ см
	УКХ	$3 \cdot 10^7 \div 10^9$	$0,3 \div 10$ м
	КХ	$3 \cdot 10^6 \div 3 \cdot 10^7$	$10 \div 100$ м
	СХ	$3 \cdot 10^5 \div 3 \cdot 10^6$	$100 \div 1000$ м
	ДХ	$< 3 \cdot 10^5$	> 1000 м
Оптичний	ІЧ	$0,4 \cdot 10^{15} \div 3 \cdot 10^{11}$	$760 \div 1$ нм
	Видиме світло	$7,5 \div 0,4 \cdot 10^{15}$	$400 \div 760$ нм
	УФ	$30 \div 7,5 \cdot 10^{15}$	$10 \div 400$ нм
Рентген	М'який	$30 \cdot 10^{17} \div 30 \cdot 10^{15}$	$1 \div 100$ Å
	Жорсткий	$30 \cdot 10^{18} \div 30 \cdot 10^{17}$	$0.1 \div 1$ Å
	γ-промені	$> 30 \cdot 10^{18}$	<0.1 Å

2. Оптичний діапазон: частота від $3 \cdot 10^{11}$ Гц до $3 \cdot 10^{16}$ Гц, довжина хвилі від 10^6 нм до 10 нм.

3. Ренгенівський діапазон і γ-випромінювання: частота від 10 кГц до 275 ГГц, довжина хвилі від 30 км до 1 мм

Для порівняння зауважимо, що звук лежить в діапазоні $\nu = 0 \div 10^{13}$ Гц.

Розглянемо тепер кожний з діапазонів докладніше (див. Таблицю 3.1). Радіодіапазон поділяють на НВЧ (надвисокочастотний), УВЧ (ультрависокочастотний), УКХ (ультракороткі хвилі), КХ (ультракороткі хвилі), СХ (середні хвилі), ДХ (довгі хвилі). Джерелами радіохвиль можуть бути коливання електричних струмів в провідниках та мазери. Для прикладу, електричні сигнали, які виникають при обробці інформації в сучасних комп'ютерах (характерні частоти від 1 до 10 ГГц), створюють УВХ хвилі. Практичне використання радіохвиль і спосіб їх розповсюдження від передавача до передавача істотно залежить від взаємодії хвилі відповідної довжини з середовищем, в якому вона розповсюджується. Передача по прямій, на короткі відстані (до 200 км) здійснюється через атмосферу, яка прозора для НВЧ, УВЧ і УКХ. Хвилі цих діапазоні можна використовувати для обміну сигналами через супутники (зазвичай, УКХ). КХ відбиваються від верхніх (100 км від поверхні Землі) шарів іоносфери і використовуються для обміну на великі відстані за рахунок вібиття (як у хвильоводі), їх використовують вдень. Ввечері і вночі використовують СХ, які відбиваються від нижніх шарів іоносфери. ДХ огинаються перешкоди і тому використовуються і вдень, і вночі.

Джерелом хвиль оптичного діапазону виступають атоми і молекули. Найменша довжина хвилі оптичного діапазону $\lambda = 10$ нм=100Åв 100 разів перевищує розміри атома. Це означає, що для електромагнітних хвиль оптичного діапазону речовина може розглядатися як суцільна, оскільки на довжині хвилі "розміщується" велика кількість атомів і така хвиля "не відчуває" дискретності середовища.

Умовна границя між оптичним та рентгенівським діапазонами відповідає якраз цим 100 атомним одиницям ("розмір атома")$= 100 \cdot 10^{-8}$ м=10 нм, при яких випромінювання вже починає "відчувати" дискретність середовища. Розрізняють м'який рентген, з відносно великою довжиною хвилі (близький до УФ), і жорсткий, довжина хвилі якого суттєво менша за розмір атома (0,1 Åі менше). Діапазон частот жорсткого ренгенівського випромінювання і γ-променів майже однаковий, відрізняються способи їх отримання. Ренгенівське випромінювання отримують при гальмуванні заряджених часток (гальмівне випромінювання), а також при переходах електронів на внутрішні оболонки атомів (такі переходи можуть бути спричинені опроміненням високоенергетичними електронами). γ-промені отримують внаслідок випромінення ядер атомів, а також при взаємодії між елементарними частинками (процеси анігіляції). Оскільки жорсткий ренген і γ-промені відчувають атомарну структуру речовини, їх використовують для дослідження атомної і електронної структури кристалів.

Розділ 4

Оптичне випромінювання

Як вже зазначалося вище, оптичне випромінювання лежить в діапазоні довжин хвиль від 760 нм до 10 нм, з якого видиме світло припадає на інтервал 760-400 нм. Завдяки відносно великій дожвині хвилі (порівняно з міжатомними відстанями) оптичне випромінювання нечутливе до дискретної структури матерії і це накладає особливості на опис процесів випромінювання, інтерференції та дифракції хвиль оптичного діапазону.

§1 Джерела оптичного випромінювання

Джерелами оптичного випромінювання можуть бути атоми, молекули, кристали. Всі джерела поділяють на два великих класи: некогерентні (переважно, теплові джерела, з яких найбільщ важливим для нас є Сонце) і когерентні джерела або квантові генератори (лазери або ОКГ=оптичні квантові генератори).

Розглянемо властивості джерел кожного з класів докладніше.

§1.1 Теплові джерела

За визначенням, до теплових відносять джерела (тіла), які знаходяться в тепловій рівновазі з випромінюванням. Температура випромінювання таким чином співпадає з температурою тіла.

Зрозуміло, що процеси встановлення рівноваги можуть залежати від особливостей структури тіла, його матеріалу, спектрів поглинання тощо. Для того, щоб уникнути пов'язаних з цим ускладнень, користуються моделлю *абсолютно чорного тіла.* Назва моделі пов'язана із сприйняттям чорного кольору (наприклад, оксамита, сажі) – предмети, які ми бачимо як чорні, поглинають випромінення всіх довжин хвиль (частот) і не відбивають світла. В фізичній моделі поняття "чорного" формалізують, приймаючи, що абсолютно чорне тіло а) скільки поглинає, стільки і випромінює (детальна рівновага); б) коефіцієнти поглинання і випромінення не залежать від частоти і матеріалу тіла. Дуже часто абсолютно чорне тіло уявляють як порожнину з маленьким отвором (див. вріз на Рис. 4.1). Всередині порожнини знаходиться рівноважне випромінення, і дуже невелика частина його виходить через отвір (утворюючи джерело). Однак, до абсолютно чорного тіла можна віднести і Сонце. В залежності від значення коефіцієнта поглинання випромінення розрізняють чорне і *сіре* тіло, у останнього коефіцієнт поглинання менший за одиницю.

Перейдемо тепер до аналізу властивостей рівноважного випромінення. Перш за все зазначимо, що спектр випромінення неперервний. тобто. в ньому представлені всі можливі довжини хвиль (або частоти). Важливою характеристикою об'єктів, що випромінюють, і в тому числі, абсолютного чорного тіла, є енергетична світимість M_e – сумарна (за всіма довжинами хвиль) інтенсивність випромінення з одиниці площі в тілесний кут 2π. Розмірність енергетичної світимості: $[M_e]$=Вт/м^2. Вводять також випромінювальну здатність $\mathcal{E}_\lambda$, яка визначається енергетичною світимостю в інтервалі довжин хвиль $(\lambda, \lambda + d\lambda)$:

$$\mathcal{E}_\lambda = \frac{dM_e}{d\lambda} \equiv \mathcal{E}_\lambda(\lambda, T). \tag{4.1}$$

Випромінювальна здатність залежить від довжини хвилі і від температури випромінення. На Рис.4.1 зображено залежність $\mathcal{E}_\lambda(\lambda; T)$ для трьох різних фіксованих значень абсолютної температури T. З рисунку видно, що функція $\mathcal{E}_\lambda(\lambda)$ прямує до нуля в області малих і великих довжин хвиль, і має максимум, положення якого залежить від температури. При збільшенні температури максимум зміщується в бік коротких довжин хвиль: $T\lambda_{\max} = b$, де стала (т.з. стала Віна) $b = 0,29$ см·К. Зв'язок між температурою та довжиною хвилі $\lambda_{\max}$, що відповідає максимуму випромінювальної здатності, був встановлений спочатку експериментально (як і сама залежність $\mathcal{E}_\lambda(\lambda; T)$) і носить назву *закон зміщення Віна.*

З визначення енергетичної світимості і формули (4.1) очевидно, що $M_e = \int_0^\infty \mathcal{E}_\lambda(\lambda; T) d\lambda$. Таким чином, енергетична світимість залежить тільки від температури абсолютно чорного тіла і ця залежність визна-

Рис. 4.1: Залежність випромінювальної здатності абсолютно чорного тіла від довжини хвилі для трьох різних температур.

чається *законом Стефана-Больцмана*:

$$M_e = \sigma T^4 \tag{4.2}$$

де – $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м^2·К^4) – стала Стефана-Больцмана.

Для найважливішого для нас абсолютно чорного тіла, Сонця, максимум випромінювальної здатності припадає на довжину хвилі 500 нм ("зелений колір"), що відповідає температурі 5800 К на поверхні Сонця. При цьому з 1 квадратного сантиметру поверхні випромінюється потужність 6,4 кВт. Длч джерела з температурою $T = 10^6$ К (вогняна куля, що складається з плазми – атомне гало) $\lambda_{\max} = 30$ Å(м'який ренген). При цьому потужність випромінювання з 1 квадратного сантиметру поверхні порядка 10^{10} кВт, тобто, в міліард разів більша, ніж з поверхні Сонця. Приблизно таку ж яскравість[1], і, отже, температуру, мають наднові зірки, які виникают внаслідок вибуху звичайних зірок.

Послідовна теорія випромінення абсолютно чорного тіла спирається на принципи квантової фізики і буде розглянута у відповідному розділі.

§1.2 Газовий розряд

В цьому розділі ми розглянемо ще один приклад некогерентного джерела випромінення – газовий розряд, який утворюється, наприклад, в електричній дузі, газорозрядних лампах. Випромінення цих джерел нерівноважне і цим івдрізняється від випромінення абсолютно чорного тіла.

Газовий розряд утворюється завдяки іонізації атомів під дією розігнаних електромагнітним полем електронів. Інтенсивність випромінення залежить не тільки від температури плазми, а й від умов створення розряду, і може суттєво перевищувати інтенсивність теплового випромінення. До основних особливостей газового розряду слід віднести низьку температуру основної маси газу (іонної плазми), тому лампи на основі такого розряду отримали назву лампи "холодного світла". До нерівноважних джерел випромінення відносять також люмінесцентні лампи, галогенні лампи, діодні лампи.

[1] Визначення яскравості див. в розділі §2.

В люмінесцентних лампах відбувається перетворення одного виду оптичного випромінення в інший (з іншою довжиною хвилі). Стінки такої лампи вкриті люмінофором – речовиною, яка поглинає в одному діапазоні довжин хвиль, а випромінює в іншому, з більшою довжиною хвилі. В лампі створюють газовий розряд, який випромінює світло ультрафіолетового діапазону, відповідно, люмінофор перевипромінює поглинене світло у видимому діапазоні. Люмінесцентні лампи мають високий, порівняно з лампами розжарування, ККД: якщо лампа розжарування має ефективність 15 лм/Вт (ККД 7,5%), то люмінесцента лампа має ефективність 60 лм/Вт (ККД 30%). Суттєвий недолік люмнесцентних ламп – мерехтіння на частоті 100 Гц (пов'язане з періодичністю збудження та згасання розряду), яке призводить до сильної втоми очей. Відмітимо, що процес люмінесценції може тривати кілька годин після закінчення збудження (опромінення). Тривалу люмінесценцію називають фосфоресценцією.

Галогенні лампи теж відносяться до газорозрядних. В сучасних лампах частота мерехтіння суттєво перевищує 100 Гц і світло таких ламп сприймається як неперервне. Крім того, такі лампи мають ще більшу ефективність – 120 лм/ВТ (ККД 60%).

В діодних лампах збудження здійснюється струмом, який "закачує" в напівпровідник електрони з високою енергією. При переході елекктронів в стани з меншою енергією виникає випромінення. Діодні лампи характеризуються високою ефективністю, і тому вважаються найбільш економічними. Крім того, інтенсивність випромінення залежить від струму через діод і тому нею легко керувати (лампи зі зміною інтенсивністю).

§1.3 Когерентні джерела

До когерентних джерел, як вже зазначалося вище, відносять лазери, або ОКГ, які генерують випромінення в оптичному діапазоні, і мазери, які працюють в НВЧ діапазоні.

Процес лазерної генерації – суто квантовий ефект і його можна послідовно описати тільки на основі квантової фізики. Відповідний розділ фізики називають квантовою електронікою. Генерація лазерного випромінення виникає внаслідок узгодженого (корельованого) переходу великої кількості атомів із збудженого стану в основний. Завдяки цьому лазерне випромінення відзначається високим ступенем монохроматичності, строго визначеною фазою та лінійною поляризацією. Іншими словами, лазери дають випромінення, яке дозволяє спостерігати стійку картину інтерференції, і тому це випромінення є когерентним, причому як в часовому, так і в просторовому відношенні. Так, час когерентності лазерного випромінення становить секунди. Якщо прийняти до уваги, що для оптичного діапазону типова частота випромінення 10^{15} Гц, то на часі когерентності вкладається 10^{15} періодів (і фактор якості, або добротність, лазерної системи 10^{15}!).

Просторова когерентність визначається кутом розходження лазерного променя ($\Delta k_\perp/k$) і становить 10-20$''$. Це дуже мала величина (для порівняння – у найкращого прожектора кут розходження становить 1-2°), тому просторова когерентність біля вихідного отвору зберігається практично по всьому перерізу променя[2].

Лазер здатний давати випромінення високої інтенсивності – до 100 Вт з кожного квадратного сантиметру вихідного отвору. Для рівноважного теплового випромінення таку інтенсивність можна отримати тільки за температури 10^{12} К. Високоінтенсивне випромінення використовують для зварювання, розрізання товстих металічних шарів (при цьому розріз дуже тонкий і не має "країв"), в медицині замість скальпеля, для "приварювання" сітківки ока, тощо.

Висока когерентність лазерного випромінення дозволяє використовувати його для дослідження віддалених об'єктів, наприклад, для картографії поверхні Місяця (з точністю до 1,5 м), космічного зв'язку на відстані до 1 світлового року (10^{13} км), в голографії.

До недоліків лазерів слід віднести дуже низьку (порівняно з іншими джерелами) енергетичну ефективність: відношення енергії випромінення до енергії накачки для найсучасніших газових лазерів становить не більше 20%. Більшу ефективність мають напівпровідникові (діодні) лазери, які, з іншого боку, поступаються газовим ступенем монохроматичності і когерентності.

Вплив лазерного випромінення на людський організм можна порівняти з отрутою – у великих дозах воно небезпечне і може призвести до ушкодження сітківкі (якщо "подивитись" на промінь навіть малопотужного діодного лазера), опікам і т.і., а в малих дозах використовується в медицині для лікування зубів і тканин ротової порожнини, в хірургії, тощо.

---

[2] Якщо вихідний отвір має радіус 5 мм, то при такому куті розходження радіус променя збільшиться вдвічі (тобто, помітно розшириться) на відстані аж 100 м.

Рис. 4.2: Крива видності $V(\lambda)$. Криві 1, 2, 4 – чутливість синіх, зелених та червоних колбочок, крива 3 – чутливість паличок

Зауважимо, що лазерне випромінення і активна речовина лазера дають нам приклад макроскопічної квантової системи.

§2 Характеристики видимого світла

В розділі §1 (стор. 9) ми вже зіткнулись з тим, що існують об'єктивні (тобто ті, які не залежать від сприйняття людиною) і суб'єктивні (залежать від сприйняття людиною) характеристики хвиль. Так, для звуку розрізняють поняття гучності, яке визначається незалежно від частоти звуку і фізіологічної гучності, яке враховує чутливість людського вуха в різному діапазоні частот.

Аналогічна ситуація має місце і для електромагнітних хвиль видимого діапазону, оскільки саме їх сприймає людське око. Отже, для хвиль видимого діапазону вводять спеціальну систему світлових величин, відповідний розділ оптики, в якому вивчають способи їх вимірювання, називають *фотометрією*. Систему світлових величин, відповідно, називають *фотометричною* системою.

Як і звук, фотометричні величини визначають по відношенню до т.з. середнього світлоадатпованого людського ока, яке розглядають як умовний приймач. Усереднення проводять за великою кількістю спостерігачів на відстані найкращого зору (25 см). Середнє людське око характеризують т.з. спектральною чутливістю $V(\lambda)$. Графік залежності $V(\lambda)$ (крива видності, як її часто називають) зображено на Рис.4.2. Крива видності характеризує відносну чутливість і нормована таким чином, щоб в максимумі, при $\lambda_{\max} = 555$ нм, $V(\lambda_{\max}) = 1$.

Для більш детальної характеристики зору і сприйняття світла вводять окремо спектральну чутливість кожного з зорових елементів – синіх, зелених та червоних колбочок (відповідають за кольоровий зір) та паличок (див. Рис.4.3). Відповідні криві мають схожий вигляд, але положення максимуму кожної з кривих відповідає "кольору" колбочки. Максимум чутливості для паличок (які відповідають за безкольоровий зір) припадає на 498 нм, тобто, близький до зеленого "кольору".

Розглянемо тепер фотометричні одиниці докладніше. Всього використовують п'ять базових фотометричних одиниць (див. Таб.4.1).

Рис. 4.3: Залежності спектральної чутливості різних елементів людського ока. Криві 1, 2, 4 – чутливість синіх, зелених та червоних колбочок, крива 3 – чутливість паличок

Табл. 4.1: Фотометричні одиниці.

	Назва	Позначення	Од. вим.	Скор.
1	Світловий потік	Φ	люмен	лм
2	Сила світла	$I = d\Phi/d\Omega$	кандела	кд
3	Освітленість	$E = d\Phi_{\text{ad}}/dS$	люкс	лк
4	Світимість	$M = \Delta\Phi_{\text{em}}/\Delta S$		лм/м^2
5	Яскравість	$L = \Delta\Phi_{\text{em}}/(\Delta S\Delta\Omega\cos\theta)$		кд/м^2

Світловий потік Припустимо, що в око людини попадає світловий потік енергії монохроматичного випромінення з довжиною хвилі λ. Величина потоку, Φ_e, має розмірність Вт і може бути виміряна експериментально або розрахована за формулою (порівняй з (2.1) на стор. 10):

$$\Phi_e = \int_S \vec{\Pi} \cdot \vec{n} dS, \tag{4.3}$$

де $\vec{\Pi}$ – вектор Пойнтинга електромагнітної хвилі. Однак, не вся ця енергія сприймається оком. Ту частину енергії випромінення, яка сприймається оком, називають *світловим потоком*, Φ, і для вимірювання вводять спеціальну одиницю – люмен (лм). Φ_e і Φ пов'язані таким співвідношенням:

$$\Phi(\text{лм}) = K_m V(\lambda)\Phi_e, \tag{4.4}$$

де $K_m = 683$ лм/Вт, $V(\lambda)$ – відносна спектральна чутливість, визначена вище.

Так, наприклад, для зеленого світла з довжиною хвилі $\lambda = 555$ нм з потоку енергії $\Phi_e = 1$ мВт око сприймає $\Phi = 0,683$ лм.

Для немонохроматичного світла формулу (4.4) можна узагальнити. Для цього вводять спектральну потужність енергії випромінення, $\phi_e = d\Phi_e/d\lambda$, тобто, потік енергії з довжиною хвилі в інтервалі $(\lambda, \lambda + d\lambda)$. Тоді світловий потік визначається як інтеграл за всіма довжинами хвиль в інтевалі ненульової видності:

$$\Phi(\text{лм}) = K_m \int V(\lambda)\phi_e d\lambda. \tag{4.5}$$

Сила світла Розглянемо точкове джерело (Рис. 4.4), яке випромінює світловий потік Φ в усі напрямки. Для характеристики випромінення в певному напрямку вводять фотометричну величину – *силу світла*, яка визначається як світловий потік в одиницю тілесного кута Ω:

$$I = \frac{d\Phi}{d\Omega}, \tag{4.6}$$

і вимірюється в *канделах* (кд). Це основна одиниця системи СІ.

Зауважимо, що позначення сили світла співпадає з позначенням інтенсивності, але це різні фізичні величини і їх слід розрізняти.

Нагадаємо, що тілесний кут визначається як частина простору, обмежена незамкненою поверхнею (див. Рис. 4.4). *Міра* тілесного кута з вершиною в центрі сфери – відношення площі сферичної поверхні, на яку він спирається, до квадрата радіусу сфери: $d\Omega = dS/r^2 = \sin\theta d\theta d\phi$. Тут θ – полярний, а ϕ – азімутальний кути, як вказано на рисунку.

Тілесний кут вимірюється в стерадіанах (ср), повний тілесний кут $\Omega_{\text{full}} = \int d\Omega = 4\pi$. Отже, кандела пов'язана з люменом таким чином: 1 кд=1 лм/ср.

В загальному випадку сила світла залежить від напрямку, тобто, $I = I(\theta, \phi)$. Для ізотропного джерела сила світла стала: $I = \Phi/4\pi$.

Рис. 4.4: Тілесний кут

Освітленість Освітленістю називають світловий потік Φ_{ad}, що падає на одиницю поверхні:

$$E = \frac{d\Phi_{\text{ad}}}{dS}. \tag{4.7}$$

Одиниця вимірювання освітленості люкс (лк), з визначення очевидно, що 1 лк=1 лм/м^2.

Освітленість є дуже важливою характеристикою з фізіологічної точки зору. Так, встановлено, що для нормального читання[3] освітленість тексту повинна становити не менше 50 лк. Приклади освітленості, яку створюють різні джерела, з якими ми зіткаємося у житті, наведено в Таб.4.3.

[3] Норма наводиться для читання з паперового носія на відстані нормального зору 25 см.

Табл. 4.2: Типові значення освітленості.

Джерело	Освітленість
Повний Місяць	1 лк
Вуличне освітлення	10 лк
Домашнє освітлення	30÷ 300 лк
Офісне освітлення	100÷ 1000 лк
Хірургічне освітлення	10 000 лк
Пряме Сонячне світло	100 000 лк

Розглянемо таку практичну задачу: яку освітленість E в точці А на поверхні dS дає точкове джерело з силою світла I, розташоване на відстані r від точки А (див. Рис. 4.5)?

Рис. 4.5: Освітленість від точкового джерела.

Для розв'язку задачі побудуємо тілесний кут $d\Omega$, який спирається на площину dS. Сила світла визначає потік, який випромінюється джерелом в тілесний кут $d\Omega$: $d\Phi = Id\Omega$. А яка частина цього потоку падає на площину dS? Це залежить від кута α між нормаллю до площини dS і напрямом на точкове джерело. Побудуємо сферу радіуса r з центром в точці, де знаходиться джерело, так, щоб вона дотикалася до площини dS. Тоді тілесний кут $d\Omega = dS_0/r^2$, де площина dS_0 лежить на поверхні сфери. З геометричних міркувань очевидно, що $dS_0 = dS \cos\alpha$. Підкреслимо, що світло падає на площину dS_0 перпендикулярно, а на площину dS – під кутом α. Тоді світловий потік, що падає на поверхню в точці А, дорівнює $d\Phi_{\mathrm{ad}} = IdS_0/r^2 = (I\cos\alpha/r^2)dS$, звідки, скориставшись визначенням (4.8), отримуємо:

$$E = I\frac{\cos\alpha}{r^2}. \tag{4.8}$$

Світимість Для характеристики джерел, що мають скінчені розміри і не можуть вважатися точковими, вводять поняття *світимості*. Світимість – це світловий потік, який випромінюється або відбивається від одиниці поверхні в тілесний кут 2π:

$$M = \frac{\Delta\Phi_{\mathrm{em}}}{\Delta S}. \tag{4.9}$$

З визначення очевидно, що світимість вимірюється в лм/м^2.

Табл. 4.3: Світлова ефективність різних ламп.

Тип лампи		Ефективність, лм/Вт
Розжарення	Едісона (вуглець)	1,4
	Вольфрамова	15-20
	Кварцева	20-25
Флюоресцентна		50-80
Газорозрядна	Ртутна	50-60
	Галогенна	80-125
	Натрієва, вис. тиску	100-140

Яскравість – це світимість в даному напрямку в одиницю тілесного кута (див. Рис. 4.6)):

$$L(\theta,\varphi)=\frac{\Delta\Phi_{\rm em}}{\Delta S\Delta\Omega\cos\theta}=\frac{\Delta\Phi_{\rm em}}{\Delta S_0\Delta\Omega}=\frac{I(\theta,\varphi)}{\Delta S_0}. \tag{4.10}$$

Яскравість вимірюється в кд/м^2. Зауважимо, що і яскравість, і світи-

Рис. 4.6: До визначення яскравості.

мість характеризують як процеси випромінення, так і відбиття світла.

Якщо для джерела (поверхні, що світиться), яскравість $L = const$ не залежить від напрямку, то таке джерело називають *ламбертівським*. Для ламбертівського джерела

$$M=\frac{\Delta\Phi_{\rm em}}{\Delta S}=\pi L. \tag{4.11}$$

§3 Інтерференція і дифракція світла

В цьому розділі ми познайомимося з особливостями хвильових явищ (інтерференції і дифракції) для світлових хвиль видимого діапазону з довжиною хвилі від 0,4 до 0,76 мкм.

§3.1 Інтерференція світла

Інтерференцією світла називають стійкий протягом всього часу спостереження розподіл в просторі спостереження інтенсивності світлових хвиль, причому розподіл складається з послідовно розташованих максимумів і мінімумів.

Зауважимо, що в даному вище визначенні інтерференції фігурують як часові, так і просторові характеристики розподілу інтенсивності. Це пов'язано з просторовою і часовою когерентністю, про яку йшлося в розділі §4.

Спостережувальна інтенсивність при інтерференції:

$$\langle I \rangle = \langle I_1 \rangle + \langle I_2 \rangle + 2\sqrt{\langle I_1 \rangle \langle I_2 \rangle}\cos(\alpha_1 - \alpha_2), \tag{4.12}$$

Умова інтерфенційного максимуму:

$$x_{\text{max}} = \frac{m\lambda R}{d}. \tag{4.13}$$

Ширина інтерференційної смуги:

$$\Delta x = \frac{\lambda R}{d}. \tag{4.14}$$

§3.2 Дифракція світла. Голографія

голографії.

§4 Дисперсія світла