Частина I

Розділ 2

Коливання і хвилі

Лекції 3-5.

Іванова В.В.

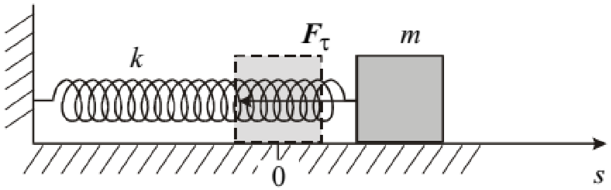
ФТІ НТУУ “КПІ ім. І.Сікорського”

Хвилі

Загальні характеристики, види хвиль

Хвиля – це процес поширення коливань у просторі.

(Коливаннями називаються процеси, для яких характерна повторюваність)



Коливаннями можуть бути власними (вільними) або вимушеними. (Існують також автоколивання та параметричні коливання)

Типи хвиль:

- пружні (механічні хвилі, акустичні)
- Електромагнітні

Пружна хвиля – процес розповсюдження збурення в пружному середовищі (рідкому, газоподібному, твердому)

При поширенні механічної хвилі ***частинки*** *середовища* ***не переносяться хвилею****, а лише* ***коливаються навколо положень рівноваги****.*

При цьому частинки обмінюються енергією. Тому хвилі переносять енергію без перенесення речовини.

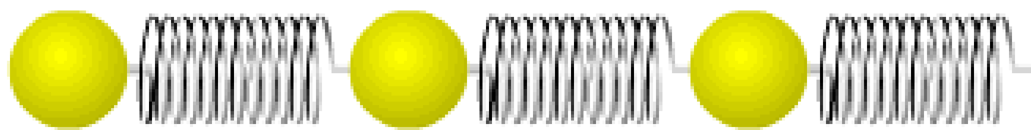
Хвилі

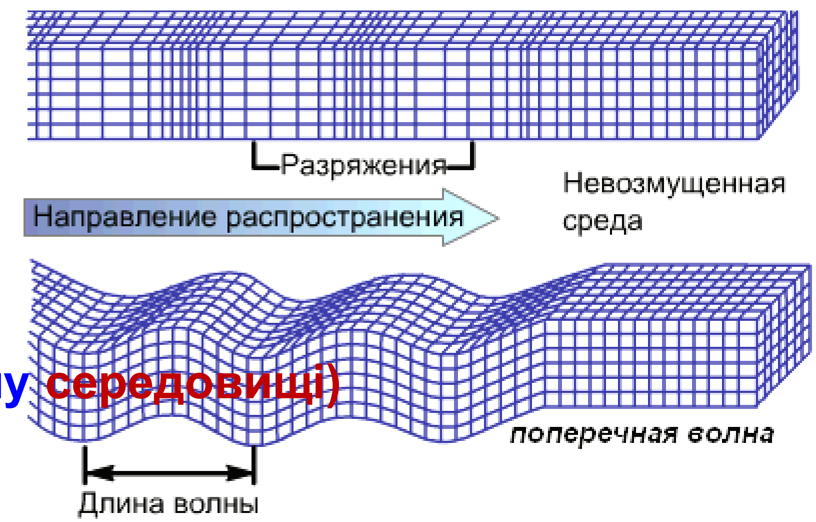
Загальні характеристики, види хвиль

Пружні хвилі

В залежності від напрямку коливань (часток) відносно напрямку розповсюдження хвилі бувають

- **Поздовжні хвилі**





- **Поперечні хвилі**

(можливі тільки в твердому середовищі)

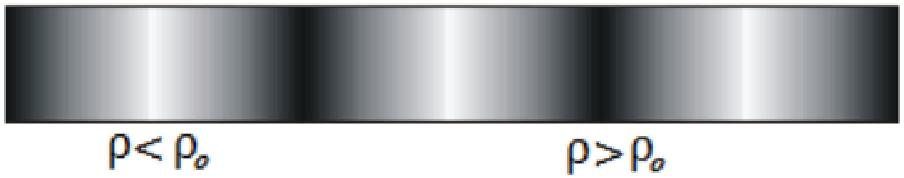
- **Поверхневі** (виникають на границі розділу середовищ)

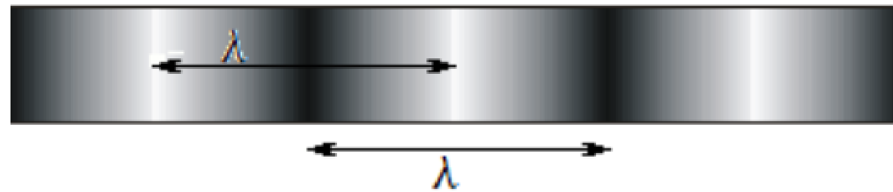
Хвилі

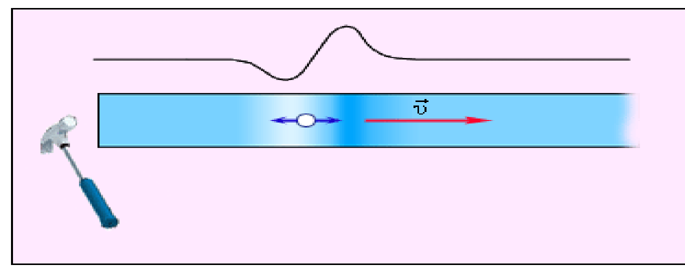
Загальні характеристики, види хвиль

Поздовжні хвилі

(зумовлені деформаціями стиснення і розтягнення)







Приклад:
Поширення поздовжнього хвильового імпульсу по пружному стрижню

$$v_{тверд} > v_{жидк} > v_{газ}$$

5-6 до 18 км/с — 1-2 км/с — 340 м/с

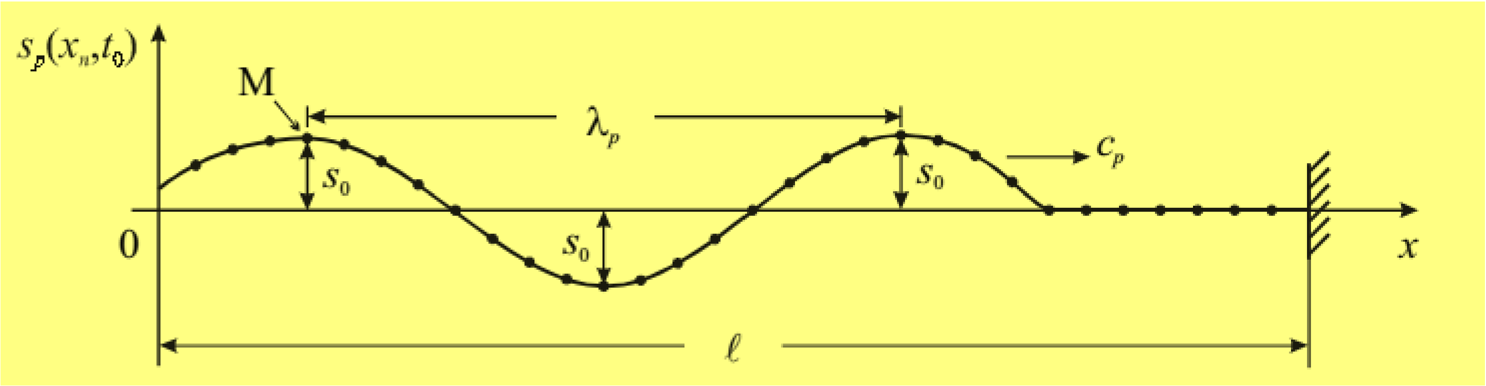
В одному й тому ж середовищі

$$v_{поздовж} \succ v_{попер}$$

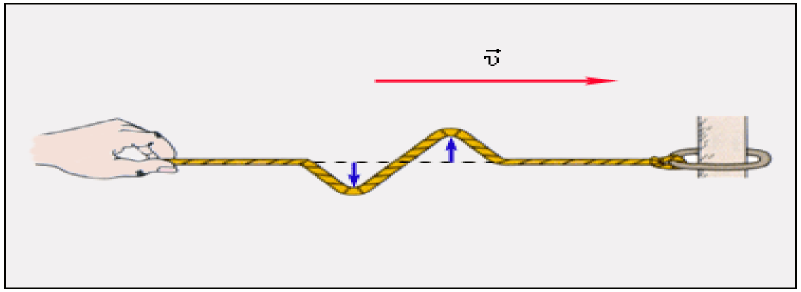
Хвилі

Загальні характеристики, види хвиль

Поперечні хвилі



Приклад:
Поширення поперечного хвильового імпульсу вздовж натягнутого гумового джгута.



Хвилі

Загальні характеристики, види хвиль

Бліц - тест

Пружні поперечні хвилі можуть розповсюджуватися
тільки у твердих тілах.
тільки у рідинах.
тільки у газах.
у будь-якому середовищі.

Поперечні механічні хвилі є хвилями
зсуву
стискання
розтягування
Довільної деформації

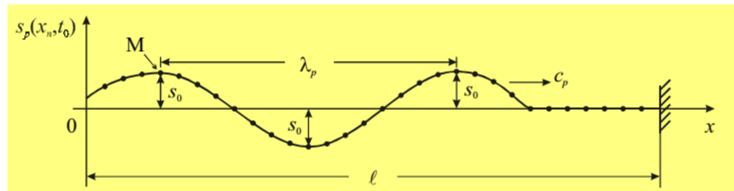
Пружні повздовжні хвилі можуть розповсюджуватися
тільки у твердих тілах.
тільки у рідинах.
у газах і рідинах
у будь-яких тілах

Хвилі

Загальні характеристики, види хвиль

Характеристики хвиль:

- ***амплітуда***
- ***період***
- ***частота***
- ***фаза***



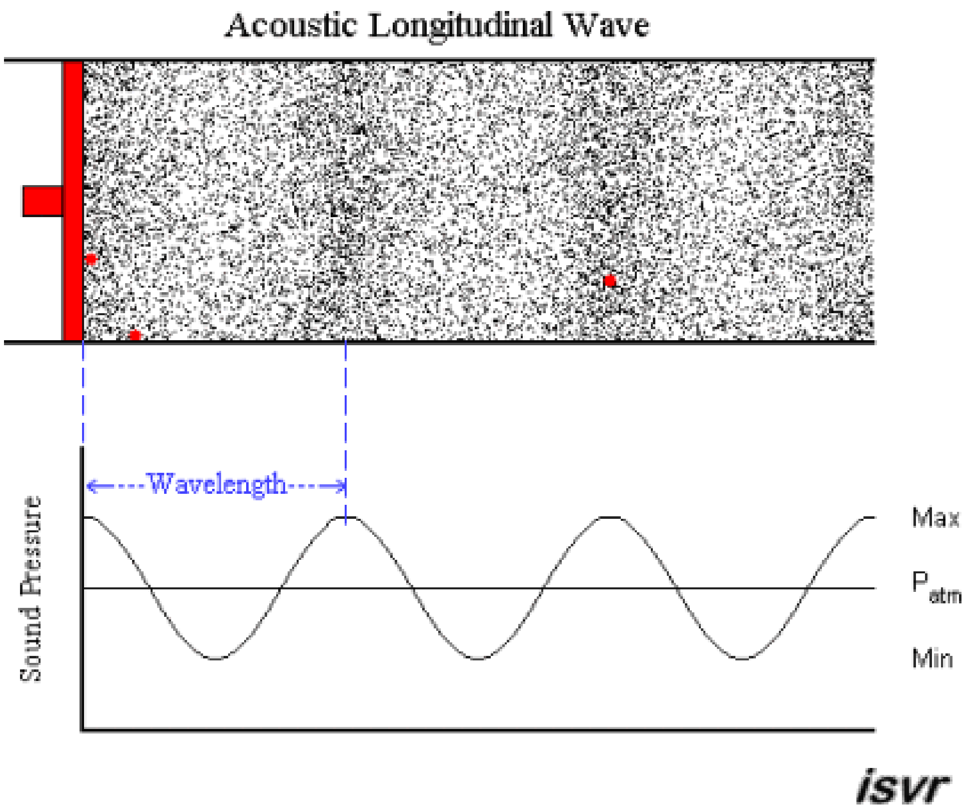
- ***хвильовий фронт*** – геометричне місце точок середовища, до яких дійшли коливання на даний момент часу (завжди ⊥ напрямку розповсюдження хвилі)
- ***хвильова поверхня*** *(фазова поверхня)* – геометричне місце точок, які коливаються в однаковій фазі

(хвилі: плоскі, сферичні, циліндричні та ін)

- ***промінь*** –лінія, дотична до якої в кожній її точці, визначає напрямок переносу енергії хвилі (в найпростішому випадку перпендикулярна до хвильової поверхні)
- ***довжина хвилі (λ)*** – найменша відстань між двома точками середовища, які коливаються в однаковій фазі
- ***швидкість хвилі*** (фазова швидкість) **(v)** – швидкість поширення постійної фази хвилі
- ***хвильове число*** – $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$

Хвилі

Загальні характеристики, види хвиль

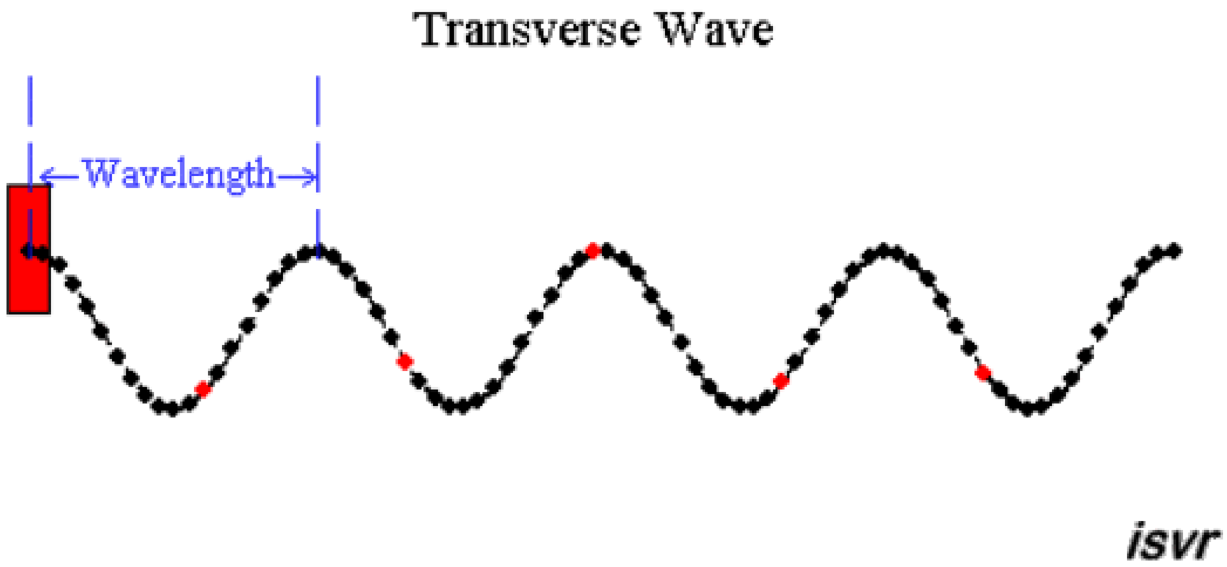


довжина хвилі **(λ)**

- – найменша відстань між двома точками середовища, які коливаються в однаковій фазі
- \- або відстань, на яку розповсюджується хвиля за період

Хвилі

Загальні характеристики, види хвиль



довжина хвилі **(λ)**

- – найменша відстань між двома точками середовища, які коливаються в однаковій фазі
- - або відстань, на яку розповсюджується хвиля за період

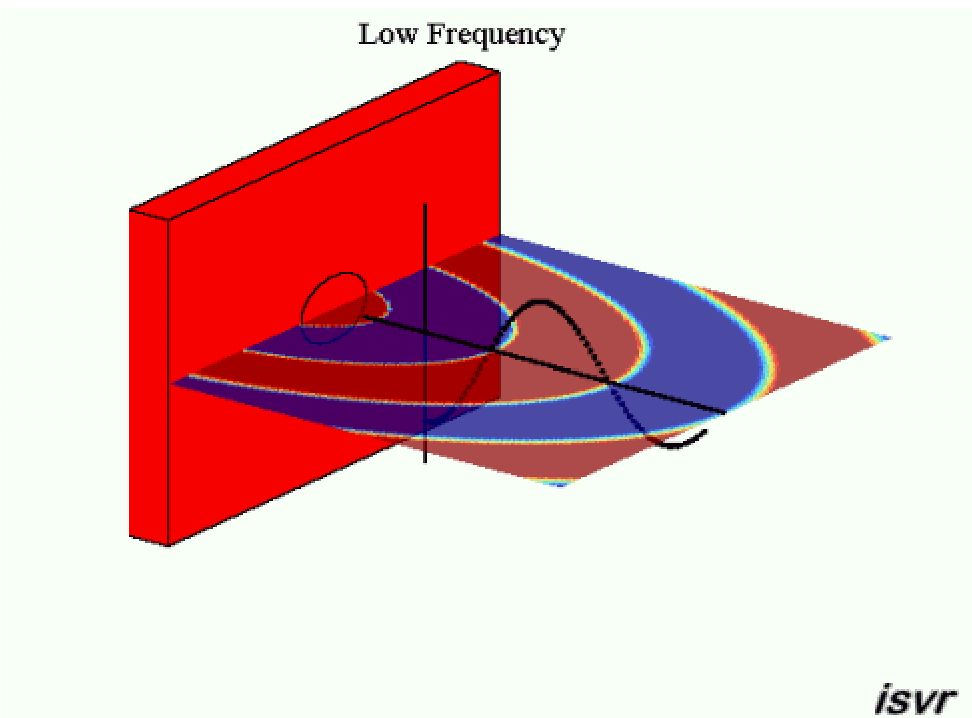
Хвилі

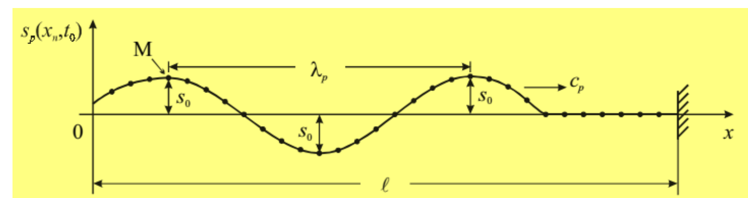
Загальні характеристики, види хвиль

***Швидкість хвилі** і швидкість коливання часток у хвилі – це **різні поняття**!*

швидкість хвилі (фазова швидкість) **(** v **)** - це

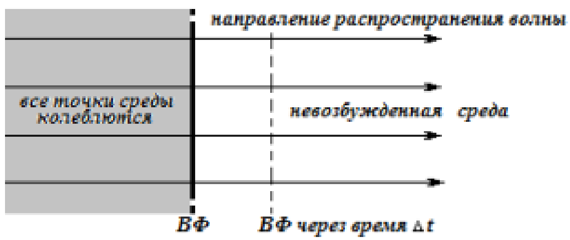
- *швидкість поширення постійної фази хвилі,* $(\omega t - kr) = const$
- *відстань, на яку розповсюджується хвильовий процес за одиницю часу*

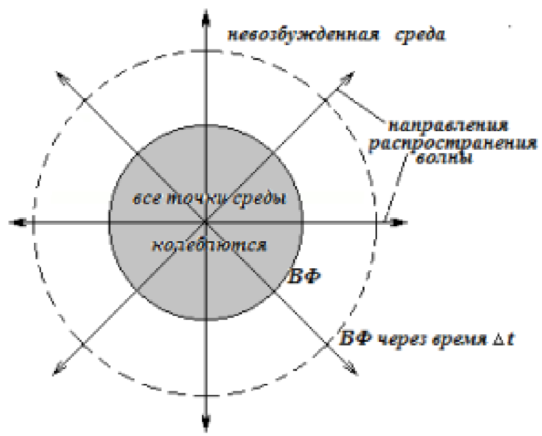


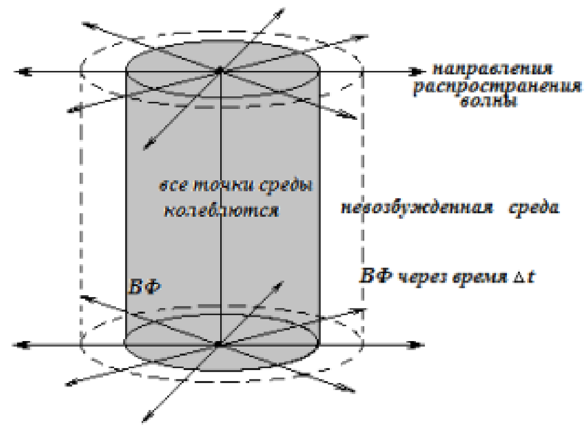


Хвилі

Хвильовий фронт і хвильова поверхня



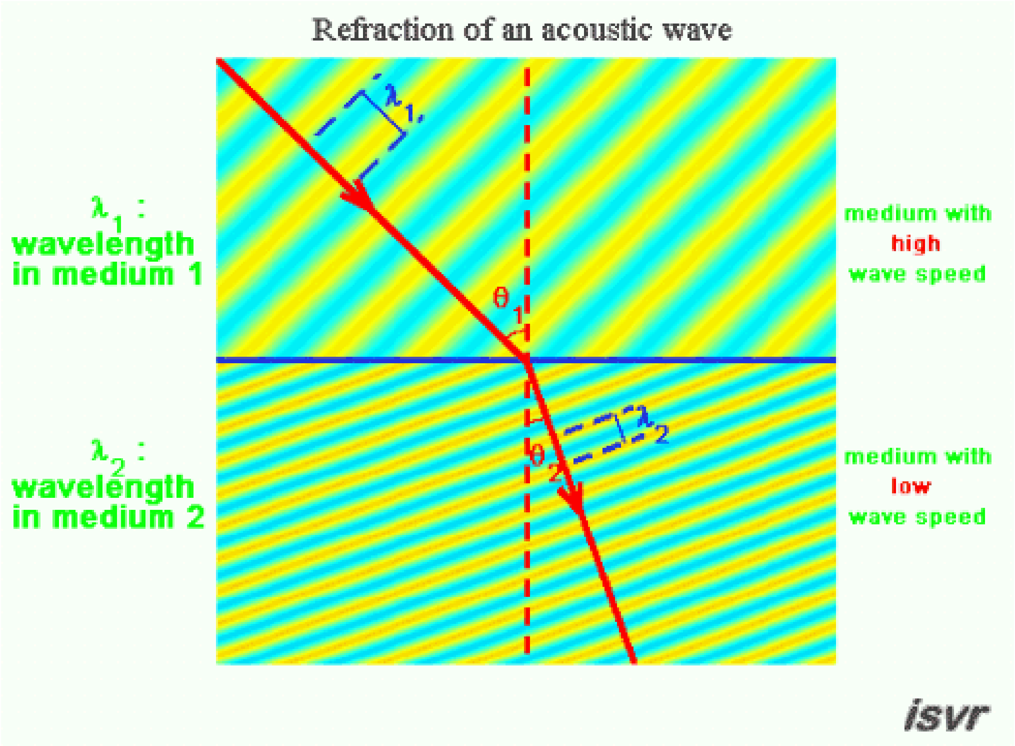




Хвильовою або фазовою поверхнею *називають поверхню, на якій хвиля має* ***постійну фазу***

Хвилі

Довжина хвилі $\lambda = v_{\phi}T$



***Зміна довжини хвилі** при переході з одного середовища (швидкість хвилі більша) в інше (швидкість хвилі менша)*

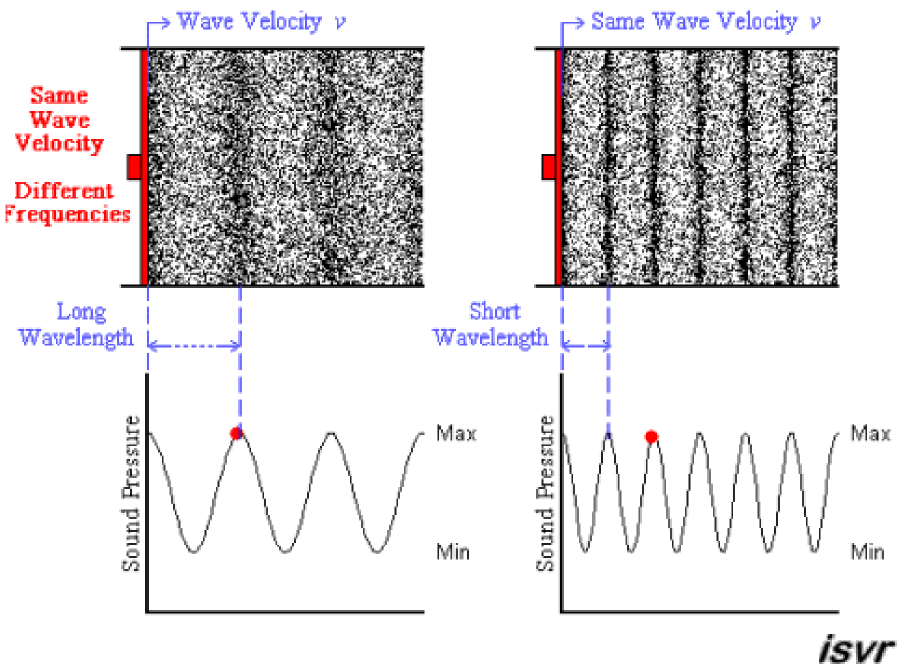
Загальні характеристики, види хвиль

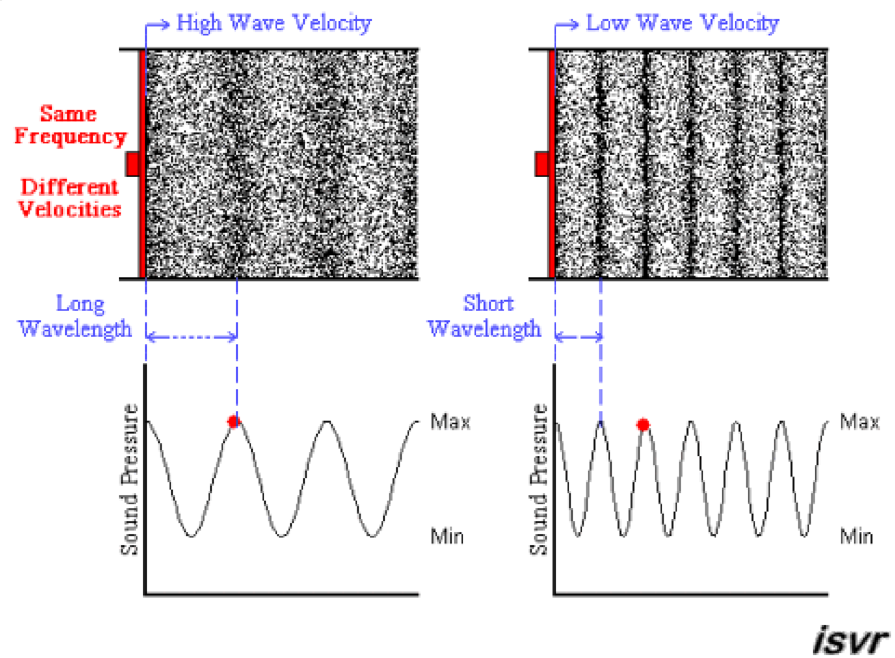
швидкість хвилі (фазова швидкість)

$$v_{\text{ф}} = \frac{\lambda}{T}$$

$$\nu = \frac{1}{T} \quad \nu - \text{частота}$$

$$v_{\text{ф}} = \lambda \cdot \nu$$





однакові швидкості різні частоти

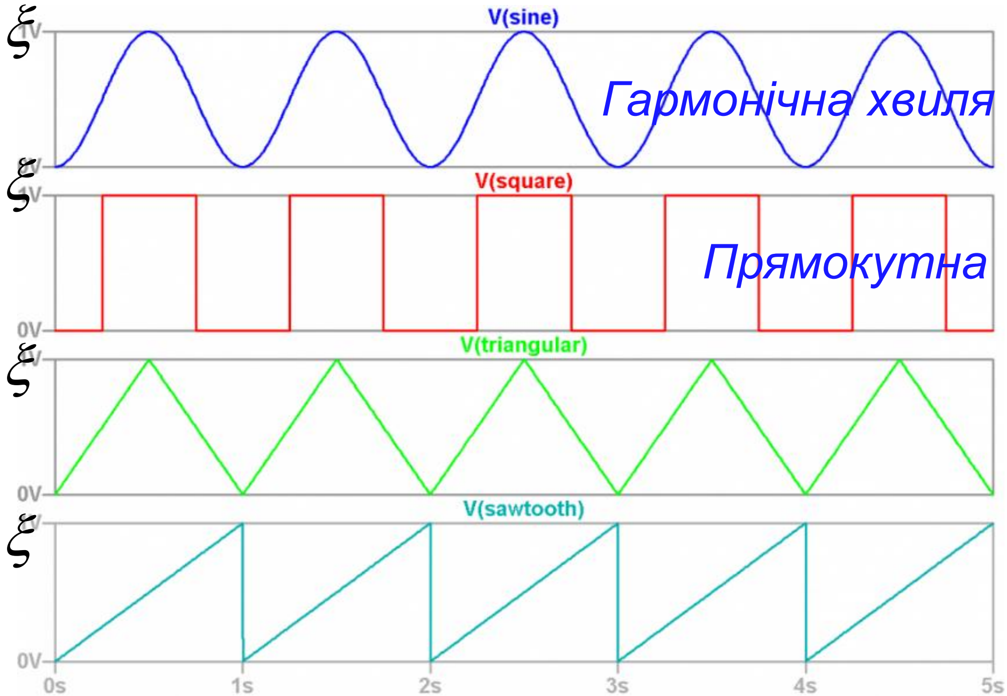
різні швидкості однакові частоти

Хвилі

Рівняння хвилі

$$\xi = f(x, y, z; t)$$

Визначає зміщення точки, яка коливається, як функцію координат і часу



Хвиля розповсюджується вздовж напрямку x

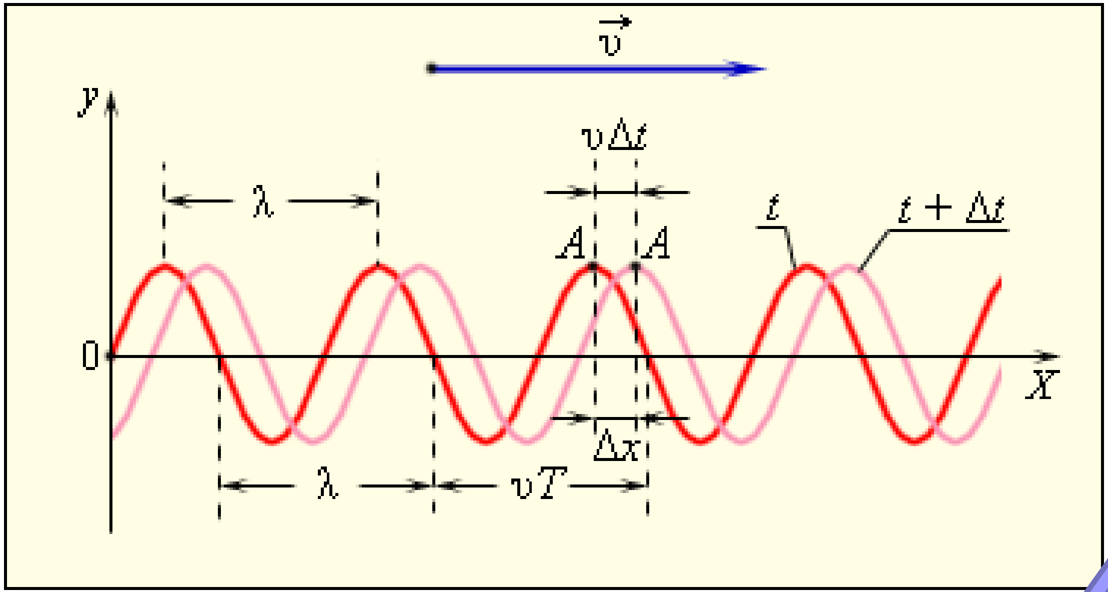
$$\xi = f(t - x/v)$$

В точку з координатою x *хвиля (фаза) прийде із запізненням*

Хвилі

Рівняння хвилі

Гармонічні хвилі



$$y(x,t) = A\cos\omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right) = A\cos(\omega t - kx),$$

$$k = \omega/\upsilon = 2\pi/T\upsilon$$

хвильове

число

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\lambda = v_{фаз} \cdot T$$

***Фаза** хвилі*

Хвилі

Рівняння хвилі

Нехай плоска хвиля поширюється як

$$\xi = A\cos(\omega t - kr)$$

Постійна фаза хвилі – $(\omega t - kr) = const$

$$\frac{d(\omega t - kr)}{dt} = 0$$

$$\omega - k\frac{dr}{dt} = 0.$$

$$v_\phi = \frac{dr}{dt} = \frac{\omega}{k} = v.$$

Фазова швидкість хвилі

хвильове

число

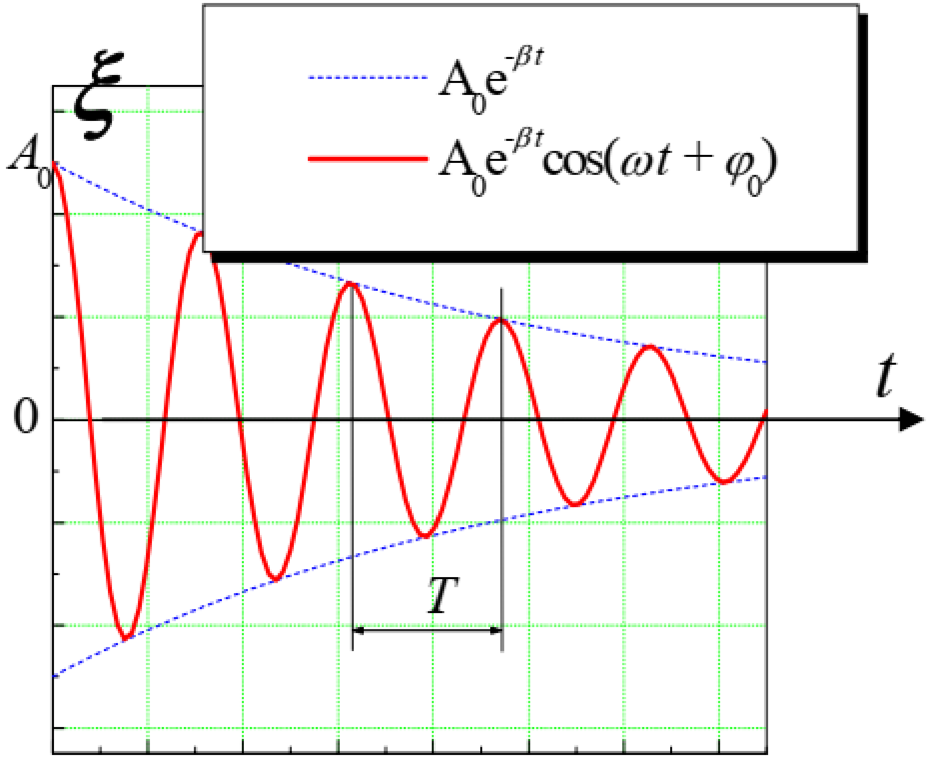
$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Хвилі

Загальні характеристики, види хвиль

Затухаючі хвилі

Амплітуда, а отже і енергія коливань згасають з часом



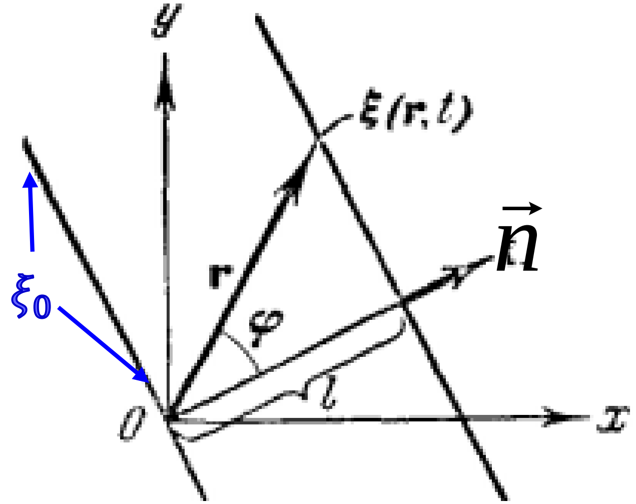
Хвилі

Рівняння плоскої хвилі

Рівняння хвилі, яка розповсюджується вздовж осі x $\xi = A\cos(\omega t - kx)$

Нехай коливання в площині, яка проходить через т.*O*, $\xi_0 = A\cos(\omega t)$

Тоді коливання в площині на відстані ***l*** від т.*O* коливання будуть відставати на ***l/v*:**



$$\xi = A\cos\omega(t - l/v)$$

$$\vec{n}\vec{r} = r\cos(\varphi) = l$$

$$\xi = A\cos(\omega t - \vec{n}\vec{r}\omega/v)$$

$$\omega = 2\pi/T \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{n}$$

Рівняння <u>плоскої хвилі</u>, яка розповсюджується в напрямку вектора $\vec{k}$

$$\xi = A\cos(\omega t - \vec{k}\vec{r})$$

Хвилі

Загальні характеристики, види хвиль

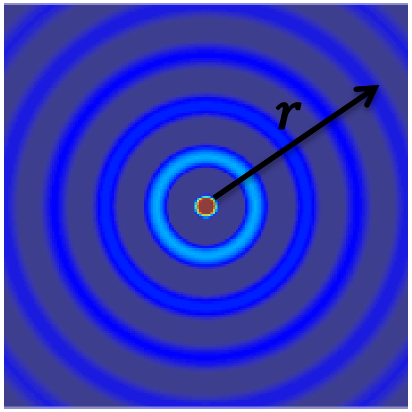
Рівняння сферичної та циліндричної хвиль

Джерело хвилі – точкове.

Хвильова поверхня – сфера.

$$\xi = \frac{A}{r} cos(\omega t - kr)$$

Рівняння сферичної хвилі



Джерело хвилі – лінійчате.

Хвильова поверхня – циліндрична.

$$\xi = \frac{A}{\sqrt{r}} cos(\omega t - kr)$$

Рівняння циліндричної хвилі

Хвилі

Загальні характеристики, види хвиль

Принцип суперпозиції хвиль

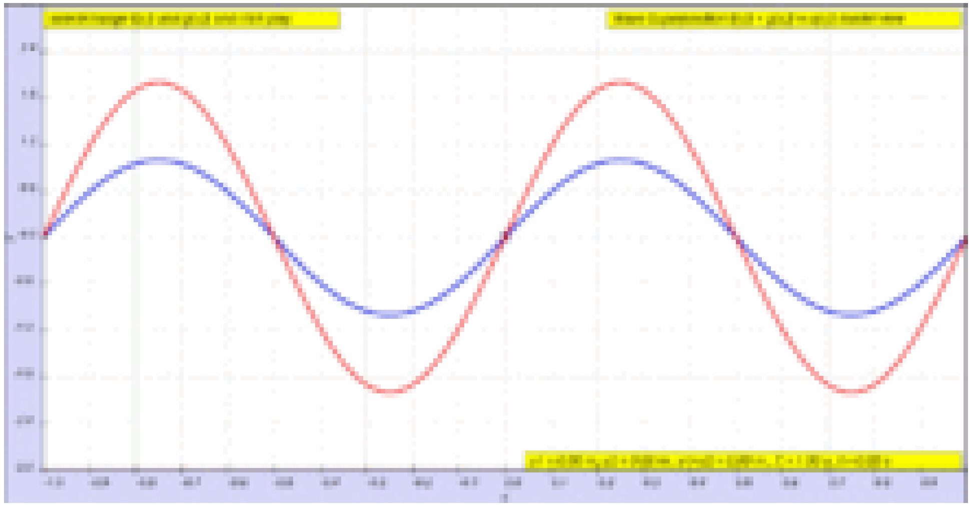
При розповсюдженні **в лінійному середовищі** кількох хвиль кожна з них розповсюджується так, наче інших не існує, а результуюче зміщення частинки в будь-який момент часу дорівнює **геометричній сумі** зміщень від кожного з хвильових процесів

Хвилі

Загальні характеристики, види хвиль

Стоячі хвилі

Стояча хвиля – суперпозиція двох хвиль з однаковими амплітудами і частотами, які розповсюджуються назустріч одна одній



довжина стоячої хвилі

$$\lambda_{ст} = \frac{\lambda}{2}$$

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= A\cos(\omega t - kx) \\ \xi_2 &= A\cos(\omega t + kx) \end{aligned}\right\} \quad \xi_1 + \xi_2 = 2A\cos(kx)\cos(\omega t)$$

вузли

$$x_п = \pm\left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}$$

пучності

$$x_п = \pm m\frac{\lambda}{2}$$

Хвилі

Загальні характеристики, види хвиль

Хвилі, що біжать і стоячі хвилі

Хвиля, що біжить	Стояча хвиля
Амплітуда	
Всі точки хвилі здійснюють коливання з **однаковою амплітудою**	Всі точки між двома вузлами коливаються з **різними амплітудами**
Фаза	
Фаза коливань залежить від координати даної точки	Всі точки між двома вузлами коливаються в однаковій фазі При переході через вузол фаза міняється на π ; точки по різні боки від вузла коливаються в **протифазі**
Перенос енергії	
Енергія коливального руху переноситься в напрямку розповсюдження хвилі	**Переносу енергії не відбувається**; в межах $\frac{\lambda}{2}$ відбуваються взаємні перетворення кінетичної і потенціальної енергії

Хвилі

Хвильове рівняння першого порядку

Рівняння плоскої хвилі $\xi = f(t - x/v)$

Фаза $\varphi = t - x/v$

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} = \frac{\partial\xi}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \xi'_{\varphi}\cdot 1; \qquad \frac{\partial\xi}{\partial x} = \frac{\partial\xi}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \xi'_{\varphi}\left(-\frac{1}{v}\right) = -\xi'_{\varphi}/v.$$

Диференційне хвильове рівняння в часткових похідних 1 порядку

$$\boxed{\frac{\partial\xi}{\partial x} = \pm\frac{1}{v}\frac{\partial\xi}{\partial t}}$$

Відносна деформація середовища $\partial\xi/\partial x = \varepsilon$.

Швидкість коливань частки навколо положення рівноваги $\partial\xi/\partial t = u_x$

Хвилі

Хвильове рівняння другого порядку

$$\xi = f(t - x/v) \qquad \varphi = t - x/v$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \xi'_\varphi \cdot 1; \qquad \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \xi'_\varphi\left(-\frac{1}{v}\right) = -\xi'_\varphi / v.$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\xi'_\varphi\right) = \frac{\partial \xi'_\varphi}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \xi''_\varphi,$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial x}\left(\xi'_\varphi\right) = -\frac{1}{v}\frac{\partial \xi'_\varphi}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{1}{v}\xi''_\varphi\left(-\frac{1}{v}\right) = \frac{1}{v^2}\xi''_\varphi.$$

Диференційні хвильові рівняння 2 порядку

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \qquad \nabla^2 \xi = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2},$$

$$\nabla^2 \xi = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}.$$

Узагальнене хвильове рівняння

В декартових координатах

$$\Delta\xi = \nabla^2 \xi = \left(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}\right) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$$

$$\Delta\xi - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = 0$$

Оператор Д'Аламбера $\square$

$$\square\xi = 0$$

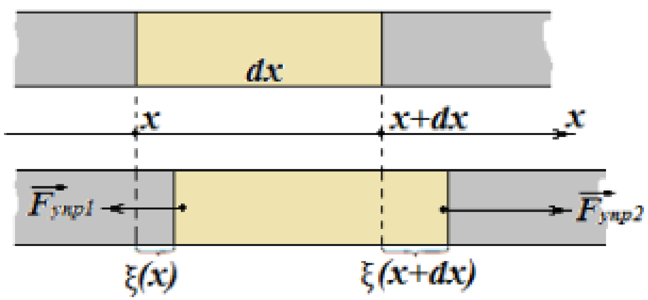
Розв'язком хвильового рівняння є рівняння будь-якої хвилі

$$\Delta = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}$$ – оператор Лапласа.

Швидкість пружних хвиль

Поздовжня хвиля в тонкому стрижні

(стиснення – розтягнення)



$$dm\cdot\vec{a}=\vec{F}_{упр1}+\vec{F}_{упр2}$$

$$dm\cdot a_x=-F_{упр1}+F_{упр2}$$

$$\rho S dx\cdot\frac{d^2\xi}{dt^2}=\sigma(x+dx)S-\sigma(x)S$$

$$\rho\cdot\frac{d^2\xi}{dt^2}=\frac{\sigma(x+dx)-\sigma(x)}{dx}$$

$$\rho\cdot\frac{d^2\xi}{dt^2}=\frac{d\sigma}{dx}$$

Закон Гука $\sigma = E\varepsilon$;

Н/м²

E – модуль Юнга (Па)

$$\varepsilon=\frac{\partial\xi}{\partial x}$$

$$\boxed{\frac{d^2\xi}{dt^2}=v^2\cdot\frac{d^2\xi}{dx^2}} \Leftrightarrow \boxed{\frac{d^2\xi}{dt^2}=\frac{E}{\rho}\cdot\frac{d^2\xi}{dx^2}}$$

$$\boxed{v=\sqrt{\frac{E}{\rho}}}$$

Швидкість пружних хвиль

$$v = \sqrt{E/\rho}.$$

Поздовжні хвилі в тонкому стрижні, *E* – модуль Юнга, ρ - об'ємна густина

$$v = \sqrt{G/\rho},$$

В твердому тілі, поперечні хвилі, *G* – модуль зсуву, ρ - об'ємна густина

$$v = \sqrt{F/\rho_1}.$$

Поперечна хвиля в гнучкому шнурі, *F* – сила натягу нитки, ρ_l - лінійна густина

$$v = \sqrt{\gamma RT/M},$$

$$\gamma = C_p/C_V$$

Акустична хвиля в газах, *R* – універсальна газова константа, M – молярна маса

Енергія пружної хвилі
Густина енергії

Енергія деформованого (розтягнутого, стисненого) стрижня

$$\varkappa x = F = \sigma S, \quad \sigma = E\varepsilon \quad \varepsilon = x/l,$$

$$\Rightarrow \quad U = \varkappa x^2/2.$$

$$U = \frac{Fx}{2} = \frac{\sigma S \cdot \varepsilon l}{2} = \frac{E\varepsilon^2}{2} Sl. \Rightarrow w_\text{п} = U/Sl \quad \Rightarrow \quad \boxed{w_\text{п} = E\varepsilon^2/2.}$$

Густина енергії

$$\boxed{w = w_\text{к} + w_\text{п} = \rho\,\dot{\xi}^2/2 + E\varepsilon^2/2}$$

$$v = \sqrt{E/\rho}. \Rightarrow E = \rho v^2 \Rightarrow w = \frac{\rho}{2}\left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 + v^2\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2\right]$$

$$\boxed{\frac{d^2\xi}{dt^2} = v^2 \cdot \frac{d^2\xi}{dx^2}} \Rightarrow \boxed{w = \rho\,\dot{\xi}^2}$$

Характеристики пружних хвиль

Бліц - тест

В незатухаючій плоскій хвилі, що біжить
Фаза коливань залежить від координати
Всі точки між вузлами коливаються в однаковій фазі
Всі точки між пучностями коливаються в однаковій фазі

В стоячій хвилі
Амплітуда коливань всіх точок однакова
Всі точки між вузлами коливаються з різними амплітудами

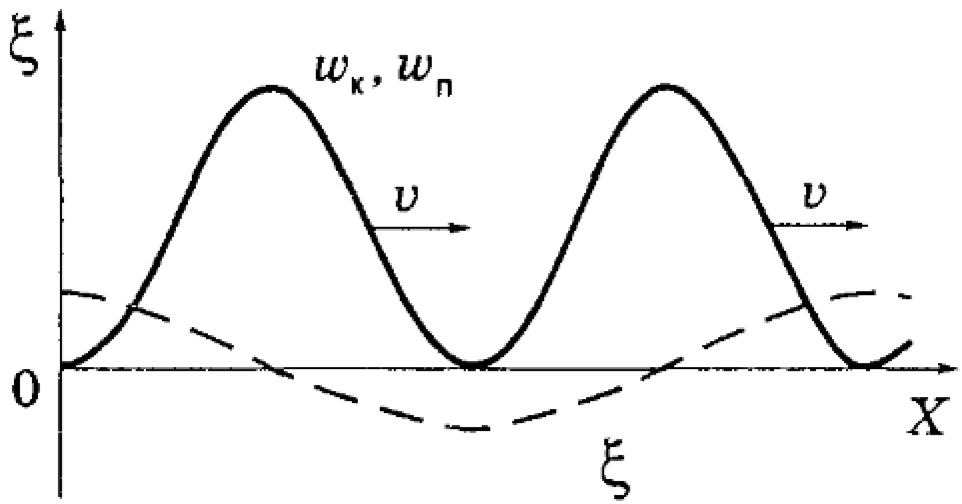
Амплітуда коливань залежить від відстані до джерела хвилі
В плоскій хвилі
Стоячій хвилі
Сферичній хвилі

Густина енергії

Для гармонічної хвилі $\xi = \xi_0 \cos(\omega t - kx)$

Густина енергії $$w = \frac{dW}{dV} = \rho \xi_0^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx)$$

Середнє значення густини енергії $$\langle w \rangle = \frac{1}{2} \rho \xi_0^2 \omega^2$$



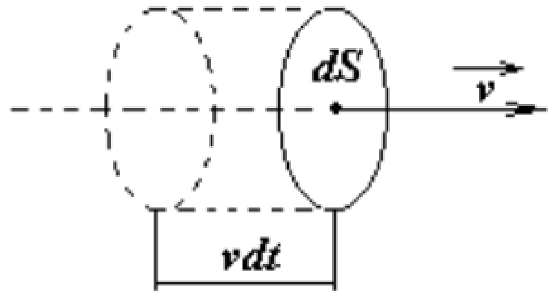
- Розподіл густини енергії вздовж стрижня

Густина потоку енергії, вектор Умова (j)

Густина потоку енергії *j* – потік енергії крізь одиничну площину, перпендикулярну до напряму її переносу

(тільки для хвилі, що біжить!) $j = wv$

Інтенсивність хвилі ⇔ **Середнє значення густини потоку енергії (j)**



$$I = \frac{dW}{dSdt}$$

$$I = \frac{w \cdot dS \cdot vdt}{dSdt} = wv = \frac{1}{2}\rho\xi_0^2\omega^2 v$$

$$\langle j \rangle = \frac{1}{2}\rho\xi_0\omega^2 v$$

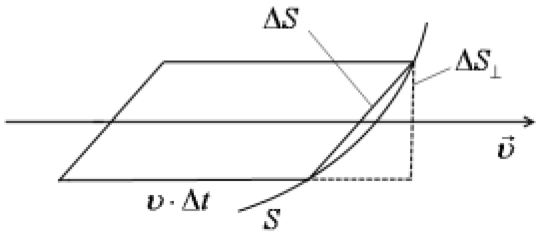
Вектор Умова $\vec{\mathbf{j}} = w\vec{\mathbf{v}}$

Повний потік енергії крізь поверхню S: $\Phi = \int_S \vec{\mathbf{j}}\, d\vec{\mathbf{S}} = \int_S j_n dS,\quad d\vec{\mathbf{S}} = \vec{\mathbf{n}}\, dS$

Густина потоку енергії, вектор Умова (j)

Знаючи вектор Умова в деякій точці простору, можна знайти потік енергії через деяку ділянку площі будь-якої орієнтації, яка проходить через цю точку

$$\boxed{\Delta\Phi = j\,\Delta S\cos\alpha}$$



Приклад

Сферична хвиля: $\xi = \frac{a_0}{r}\cos(\omega t - kr),$

Впевнимось, що амплітуда сферичної хвилі дійсно пропорційна 1/r.

Середня за період густина потоку енергії: $\Rightarrow \langle \boldsymbol{j} \rangle = \frac{1}{2}\rho a_0 \omega^2 v$

Тоді потік енергії через сферу радіусом r:

$$\langle\Phi\rangle = \langle j\rangle\, 4\pi r^2 \sim a_r^2 r^2.$$

Якщо потік не розсіюється, він не залежить від r: $a_r^2 r^2 = \mathrm{const}$

$$a_r \sim 1/r.$$

Енергія стоячої хвилі

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = A\cos kx \cdot \cos\omega t,$$

Потенціальна енергія хвилі пропорційна деформації, кінетична – швидкості руху частинок відносно положення рівноваги

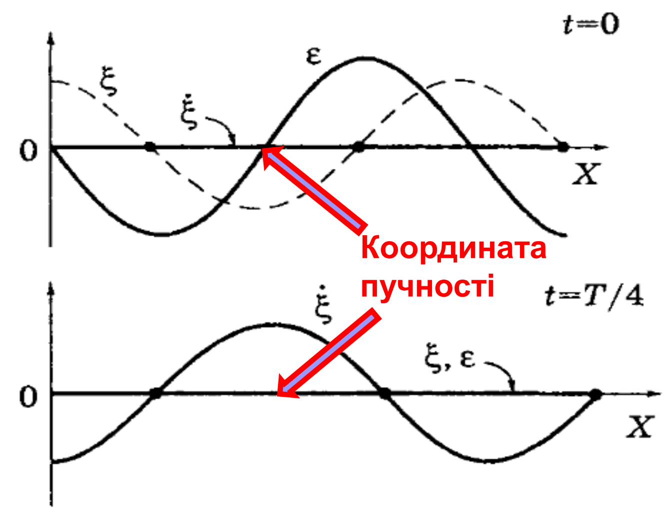
$$w = w_к + w_п = \rho\,\dot{\xi}^2/2 + E\varepsilon^2/2$$

Швидкість частинок хвилі відносно положення рівноваги:

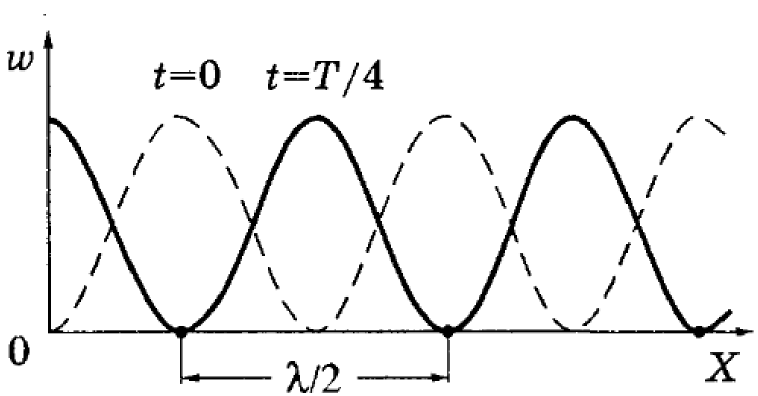
$$\dot{\xi} = -A\omega\cos kx \cdot \sin\omega t,$$

Відносна деформація:

$$\varepsilon = -Ak\sin kx \cdot \cos\omega t.$$



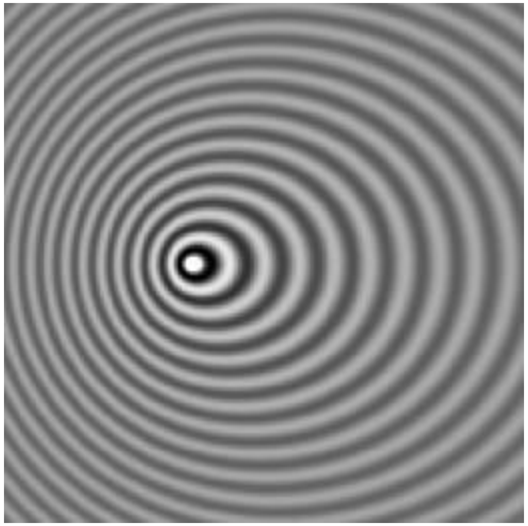
Відбувається обмін енергією між вузлами і пучностями, переносу енергії немає



Відхилення частинок хвилі відносно положення рівноваги ξ, їх швидкість $\dot{\xi}$ та відносна деформація ε в початковий момент і за чверть періоду.

Ефект Доплера (самостійно)

https://www.youtube.com/watch?v=R98sEa8ovCo



Ефект Доплера — явище зміни частоти хвилі, яку реєструє приймач, викликане переміщенням джерела або приймача.

https://www.youtube.com/watch?v=R98sEa8ovCo

Електромагнітні хвилі

1. *Аналіз рівнянь Максвела, доведення існування електромагнітних хвиль*
2. *Хвильове рівняння електромагнітної хвилі*
3. *Плоскі електромагнітні хвилі, швидкість їх поширення*
4. *Зв'язок миттєвих значень Е і Н*
5. *Енергія електромагнітної хвилі. Вектор Пойнтінга*
6. *Хвильовий пакет. Групова швидкість*
7. *Шкала електромагнітних хвиль*

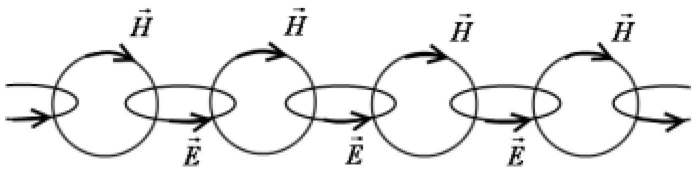
Електромагнітні хвилі

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t};$$

$$\mathrm{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t};$$

$$\mathrm{div}\vec{D} = \rho;$$

$$\mathrm{div}\vec{B} = 0,$$



$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E};\ \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H};\ \vec{j} = \sigma \vec{E},$$

$$\mathrm{rot}\vec{E} = [\vec{\nabla} \times \vec{E}] = \begin{pmatrix} \overrightarrow{x_0} & \overrightarrow{y_0} & \overrightarrow{z_0} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{pmatrix},$$

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\overrightarrow{x_0} + \frac{\partial}{\partial y}\overrightarrow{y_0} + \frac{\partial}{\partial z}\overrightarrow{z_0},$$

$$\mathrm{div}\vec{D} = \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{D}\right) = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{y} + \frac{\partial D_z}{\partial z},$$

Електромагнітні хвилі

Хвильове рівняння

$\sigma = 0,\ \mu = 1$

$\vec{j} = 0 \quad \rho = 0$

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\mu_0\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t};$$

$$\mathrm{rot}\vec{H} = \varepsilon_0\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t};$$

$$\mathrm{div}\vec{E} = 0;$$

$$\mathrm{div}\vec{H} = 0,$$

$$rot\,rot\,\vec{E} = grad\,div\,\vec{E} - \Delta\vec{E} = -\Delta\vec{E}$$

$$-\Delta\vec{E} = -rot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\mu\mu_0\frac{\partial\, rot\vec{H}}{\partial t}$$

$$= -\mu\mu_0\frac{\partial^2\vec{D}}{\partial t^2} = -\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\boxed{\Delta\vec{E} = \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}} \Leftrightarrow \boxed{\Delta\vec{E} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}}$$

$$\boxed{\Delta\vec{H} = \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}}.$$

$$v = \frac{c}{n} \qquad c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \qquad n = \sqrt{\varepsilon\mu}$$

c = 299792456 м/с.

Електромагнітні хвилі

Властивості електромагнітних хвиль

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\mu_0\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} \qquad \vec{E} = E_x\overrightarrow{x_0} + E_y\overrightarrow{y_0} + E_z\overrightarrow{z_0}$$

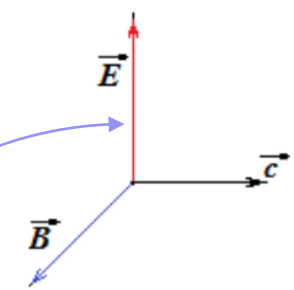
$$\mathrm{rot}\vec{E} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{x_0} & \overrightarrow{y_0} & \overrightarrow{z_0} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial E_y}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\overrightarrow{x_0} + \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z}\right)\overrightarrow{y_0} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\overrightarrow{z_0} =$$

$$= -\mu_0\mu\left(\frac{\partial H_x}{\partial t}\overrightarrow{x_0} + \frac{\partial H_y}{\partial t}\overrightarrow{y_0} + \frac{\partial H_z}{\partial t}\overrightarrow{z_0}\right).$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\mu_0\mu\frac{\partial H_x}{\partial t};$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu_0\mu\frac{\partial H_y}{\partial t}; \qquad (*)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\mu_0\mu\frac{\partial H_z}{\partial t}.$$



Для плоскої хвилі, $\vec{E} = E_x\overrightarrow{x_0} + E_y\overrightarrow{y_0} + E_z\overrightarrow{z_0} = \{0; E_y = E; 0\}$

поляризованої в (xy), яка розповсюджується вздовж осі x,

з (*) маємо

$$0 - 0 = -\mu_0\mu\frac{\partial H_x}{\partial t} \rightarrow H_x = 0;$$

$$0 - 0 = -\mu_0\mu\frac{\partial H_y}{\partial t} \rightarrow H_y = 0;$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - 0 = -\mu_0\mu\frac{\partial H_z}{\partial t} \rightarrow H_z \neq 0.$$

$$\vec{H} = \{0; 0; H_z = H\}$$

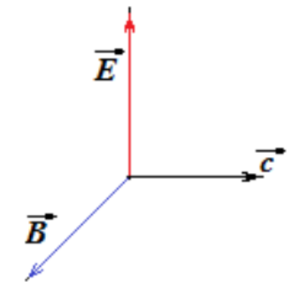
електромагнітна хвиля поперечна

Електромагнітні хвилі

Зв'язок значень E і H

Для плоскої хвилі

$\vec{E} = \{0; E; 0\} \qquad \vec{H} = \{0; 0; H\}$



$$E(x,t) = E_0 \sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right]$$

$$H(x,t) = H_0 \sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right]$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\mu_0\mu\frac{\partial H}{\partial t};$$

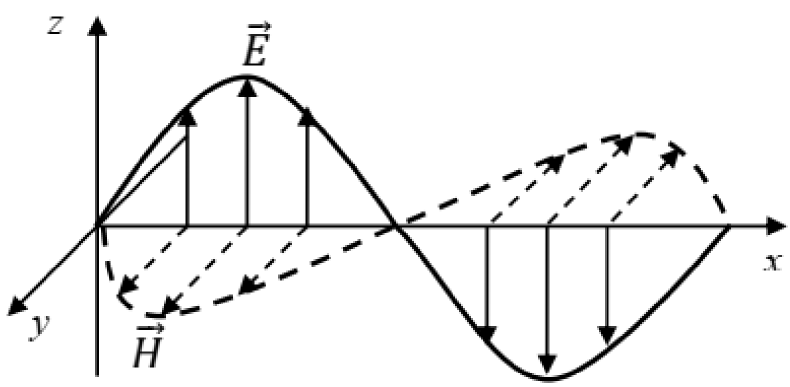
$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\varepsilon_0\varepsilon\frac{\partial E}{\partial t}.$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{E_0 \sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right]\right\} = -\mu_0\mu\frac{\partial}{\partial t}\left\{H_0 \sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right]\right\};$$

$$E_0 \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right]\left(-\frac{\omega}{v}\right) = -\mu_0\mu H_0 \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right]\omega;$$

$$E_0\frac{1}{v} = E_0\frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{c} = E_0\sqrt{\varepsilon\mu}\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} = \mu_0\mu H_0;$$

$$E_0\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} = \sqrt{\mu\mu_0}H_0.$$



$$\boxed{E_0\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} = \sqrt{\mu\mu_0}H_0}$$

Вектори $\vec{E}, \vec{H}$ і $\vec{k}$ - права трійка

Рівняння плоскої і сферичної електромагнітної хвилі в комплексній формі

$$E(x,t) = E_0 \exp[j(\omega t - kx + \varphi_0)]$$

$$E(x,t) = E_0 e^{j\varphi_0} e^{j\omega t} e^{-jkx}$$

$$\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} \text{ і } e^{\pm jx} = \cos x \pm j \sin x$$

$$\boxed{E(\vec{r},t) = E_0 \exp\left\{j(\omega t - \vec{k}\vec{r})\right\}}$$

Сферичні хвилі є таким розв'язком хвильового рівняння, який залежить лише від відстані *r* і не залежить від кутових координат.

$$\Delta\vec{E} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\vec{E}) \qquad \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\vec{E}) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(r\vec{E})$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{E(r,t) = \frac{E_0}{r}\exp\left\{j(\omega t - kr)\right\}}$$

Електромагнітні хвилі

Зв'язок миттєвих значень E і H

Для плоскої хвилі: $E_y = E_y(t - x/v), \quad H_z = H_z(t - x/v), \quad \varphi = t - x/v,$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\partial E_y}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial E_y}{\partial \varphi}\left(-\frac{1}{v}\right); \qquad \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial H_z}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial H_z}{\partial \varphi}\cdot 1 .$$

$$\Downarrow$$

$$\partial E_y/\partial x = -\mu\mu_0 \dot{H}_z, \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{v}\frac{\partial E_y}{\partial \varphi} = \mu\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial \varphi},$$

$$v = 1/\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}, \quad \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}\frac{\partial E_y}{\partial \varphi} = \sqrt{\mu\mu_0}\frac{\partial H_z}{\partial \varphi}.$$

$$\boxed{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}\, E_y = \sqrt{\mu\mu_0}\, H_z .}$$

Енергія електромагнітної хвилі
Вектор Пойнтінга, інтенсивність

Густина потоку енергії (j) – потік енергії крізь одиничну площину, перпендикулярну до напряму її переносу.

вектор Умова $\vec{j}$ ⇒ $\vec{\mathbf{j}} = w\vec{\mathbf{v}}$

$$w = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu\mu_0 H^2}{2}.$$

$$\boxed{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}\, E_y = \sqrt{\mu\mu_0}\, H_z .}$$

$$w = \varepsilon\varepsilon_0 E^2 = \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}\, EH = EH/v,$$

Густина потоку енергії електромагнітної хвилі **– вектор Пойнтінга** $\vec{S}$

$$\vec{S} = [\vec{E} \times \vec{H}] \quad S = |\vec{S}| = EH \quad H = E\sqrt{\varepsilon_0/\mu_0} = c\varepsilon_0 E$$

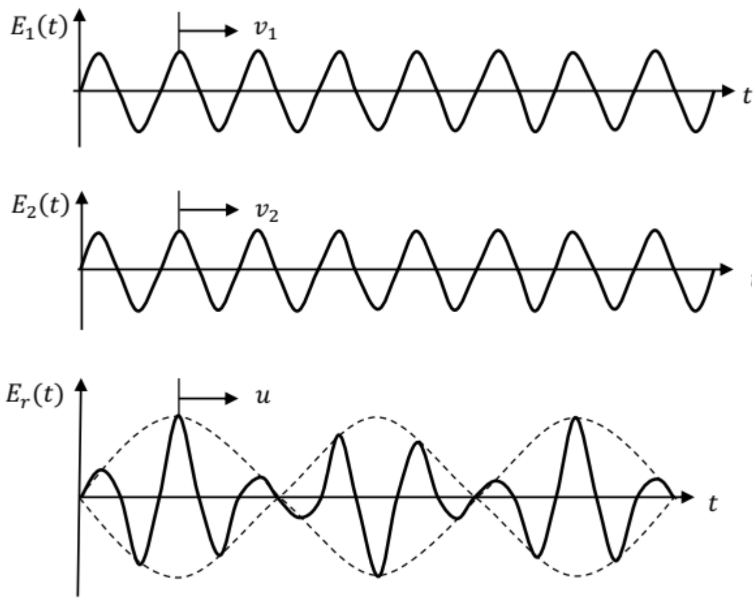
$$S(t) = c\varepsilon_0 E_0^2 \cos^2 \omega t = c\varepsilon_0 E_0^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\omega t\right)$$

$$I = \langle S(t) \rangle_t = \frac{1}{t_o}\int_0^{t_o} c\varepsilon_0 E_0^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\omega t\right) dt =$$

$$= \frac{1}{2} c\varepsilon_0 E_0^2 \left[1 + \frac{1}{2\omega t_o}(\cos 2\omega t_0 - 1)\right] \approx \frac{1}{2} c\varepsilon_0 E_0^2.$$

$$I \sim E^2$$

Група хвиль



$$E_1 = E_0 \cos[j(\omega_1 t - k_1 x)] \text{ і } E_2 = E_0 \cos[j(\omega_2 t - k_2 x)],$$

де $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$; $\Delta k = k_1 - k_2$; $\omega_1 \approx \omega_2$; $k_1 \approx k_2$.

$$E_r = E_1 + E_2 = E_0 \cos(\omega_1 t - k_1 x) + E_0 \cos(\omega_2 t - k_2 x) =$$

$$= 2E_0 \cos\left[\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t - \frac{k_1 - k_2}{2} x\right] \cos\left[\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t - \frac{k_1 + k_2}{2} x\right] =$$

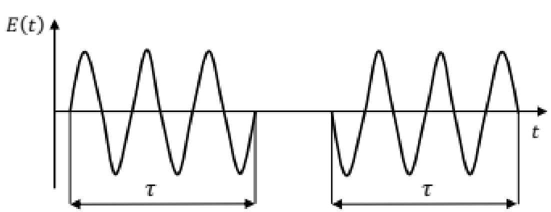
$$= A_r \cos[\omega_1 t - k_1 x],$$

$$A_r = 2E_0 \cos\left[\frac{\Delta\omega}{2} t - \frac{\Delta k}{2} x\right]$$

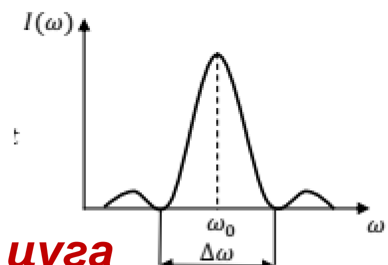
$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{d\omega}{dk}.$$

Фазова швидкість $\boxed{v_{фаз} = \frac{\omega}{k}}$

Групова швидкість $\boxed{u_{гр} = \frac{d\omega}{dk}}$



Цуги



Спектр цуга

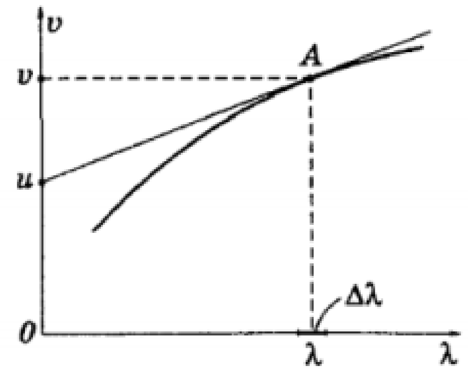
Електромагнітні хвилі

Зв'язок між груповою і фазовою швидкостями
Формула Релея

$$u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(vk)}{dk} = \frac{vdk + kdv}{dk} = v + k\frac{dv}{dk},$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad dk = -\frac{2\pi}{\lambda^2}d\lambda.$$

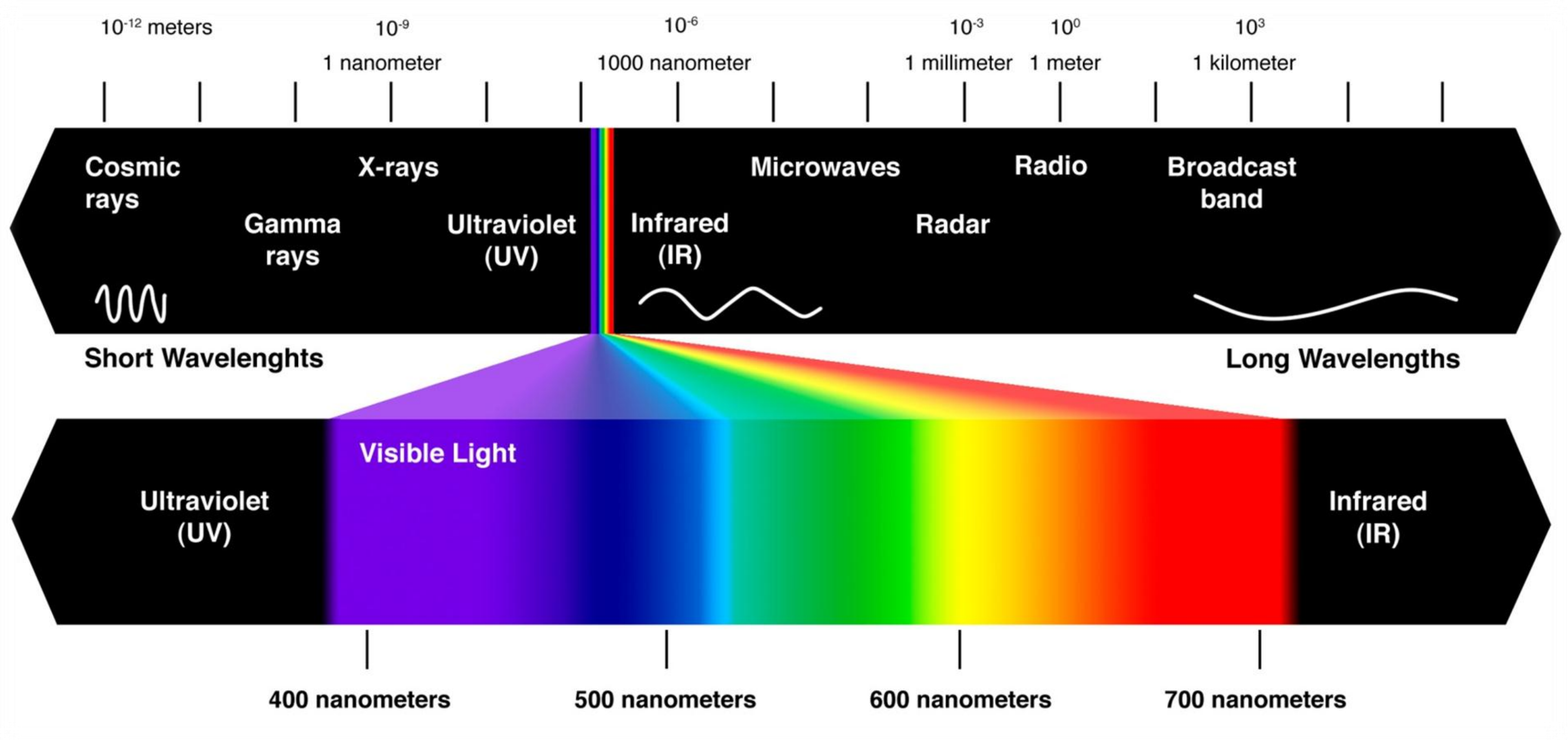
$$u = v - \frac{2\pi}{\lambda}\frac{dv}{\frac{2\pi}{\lambda^2}d\lambda} = v - \lambda\frac{dv}{d\lambda}.$$



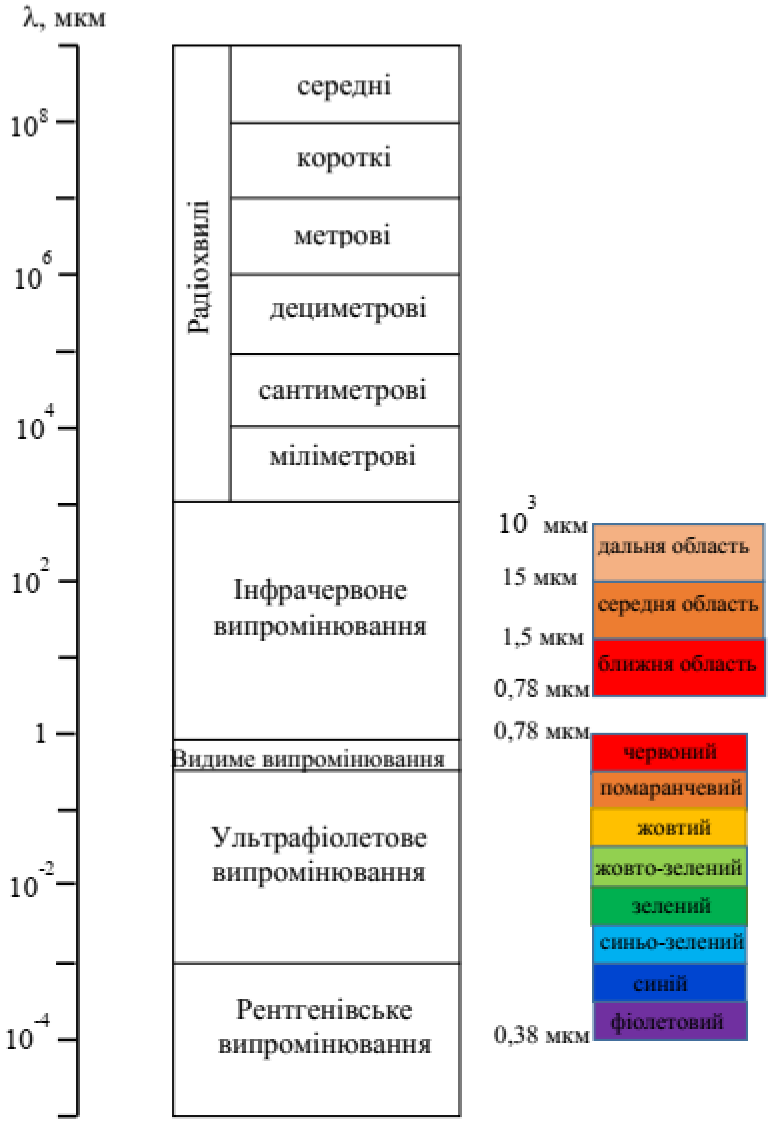
$$\frac{dv}{d\lambda} = \frac{dv}{dn}\frac{dn}{d\lambda} = \frac{d\left(\frac{c}{n}\right)}{dn}\frac{dn}{d\lambda} = \frac{\left(\frac{-c}{n^2}\right)dn}{dn}\frac{dn}{d\lambda} = \frac{-c}{n^2}\frac{dn}{d\lambda}.$$

$$u = v + \frac{c}{n^2}\frac{dn}{d\lambda} = v\left(1 + \frac{\lambda}{n}\frac{dn}{d\lambda}\right) \qquad \frac{dn}{d\lambda} = 0$$

Шкала електромагнітного випромінювання



Шкала електромагнітних хвиль



1. **Червоний – 0,647 мкм < λ < 0,780 мкм.**
2. **Помаранчевий – 0,585 мкм < λ < 0,647 мкм.**
3. **Жовтий – 0,575 мкм < λ < 0,585 мкм.**
4. **Жовто-зелений – 0,527 мкм < λ < 0,575 мкм.**
5. **Зелений** – 0,517 мкм < λ < 0,527 мкм.
6. **Синьо-зелений** – 0,486 мкм < λ < 0,527 мкм.
7. **Синій** – 0,424 мкм < λ < 0,486 мкм.
8. **Фіолетовий** 0,380 мкм < λ < 0,424 мкм.

Електромагнітні хвилі

Співвідношення між фазовою і груповою швидкостями хвиль у плазмі

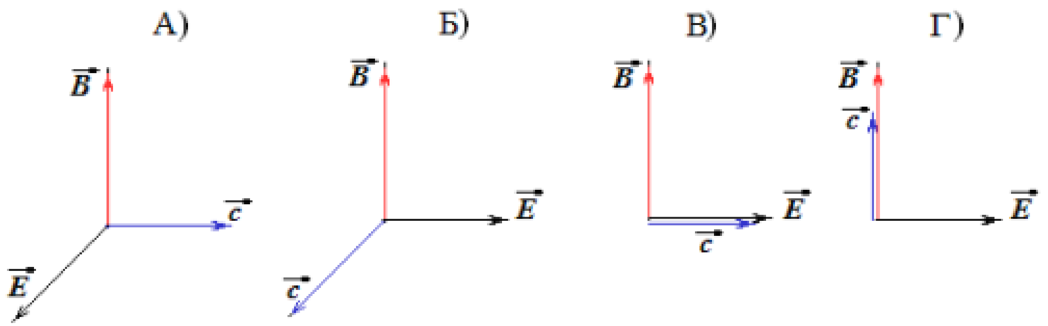
$$V=\frac{c}{n},\ n^2=1-\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2=\frac{c^2k^2}{\omega^2}$$

$$c^2k^2=\omega^2-\omega_0{}^2,\ V_{ph}V_{gr}=\frac{\omega}{k}\frac{d\omega}{dk}=\frac{d\omega^2}{dk^2}=c^2$$

Електромагнітні хвилі
Бліц - тест

- Що коливається в електромагнітній хвилі?
  А) електрони;
  Б) будь-які заряджені частинки;
  В) електричне поле;
  Г) електричне та магнітне поля.

- Де правильно показане взаємне розташування векторів швидкості, напруженості електричного поля та індукції магнітного поля в хвилі?



- Що можна сказати про фази коливань векторів напруженості електричного поля ***E*** і індукції магнітного поля ***B*** у хвилі?

А) коливаються в одній фазі;
Б) коливаються в протифазі;
В) коливання вектора ***E***
відстають по фазі від коливань вектора ***B*** на $\frac{\pi}{2}$
Г) коливання вектора ***B*** відстають по фазі від коливань вектора ***E*** на $\frac{\pi}{2}$

Електромагнітні хвилі

Бліц - тест

- Вкажіть зв'язок між миттєвими значеннями векторів напруженості електричного поля ***E*** і індукції магнітного поля ***B*** у хвилі?

А) $B = E\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon\mu_0\mu}$; Б) $B = \frac{E}{\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon\mu_0\mu}}$ В) $B\sqrt{\mu_0\mu} = E\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon}$; Г) $\frac{B}{\sqrt{\mu_0\mu}} = \frac{E}{\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon}}$.

- Серед радіохвиль довгого, короткого і ультракороткого діапазону найбільшу швидкість поширення в вакуумі мають хвилі ...

А) Довгого діапазону; Б) Короткого діапазону;
В) ультракороткого діапазону;
Г) швидкості поширення хвиль всіх діапазонів однакові.

- Вкажіть вираз для розрахунку швидкості електромагнітної хвилі у вакуумі

А) $c = \sqrt{\varepsilon_0\varepsilon\mu_0\mu}$; Б) $c = \sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$; В) $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon\mu_0\mu}}$; Г) $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$.