

ЗМІСТ

	Стр.
ПЕРЕЛІК УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ	7
ВСТУП	9
РОЗДІЛ 1 Огляд літератури	12
1.1 Вступ	12
1.2 Основні експериментальні дослідження АФ	12
1.3 Теоретичний підхід до опису динаміки АФ	17
1.4 АФ з МП взаємодією	20
1.5 Основні методи дослідження ДС	25
1.6 Висновки	26
РОЗДІЛ 2 Рівняння руху, дисперсійні співвідношення	27
2.1 Вступ	27
2.2 Дослідження потенціалу	27
2.3 Отримання рівнянь руху	36
2.4 Дисперсійні співвідношення.....	41
2.5 Висновки	44
РОЗДІЛ 3 Дослідження динаміки в присутності спінів поляризованого струму	45
3.1 Вступ	45
3.2 Граничні випадки	45
3.2.1 Дисперсійне рівняння в загальному випадку	45
3.2.2 МП зв'язок відсутній	46
3.2.3 Згасання відсутні	47
3.2.4 Спіновий струм відсутній	49
3.3 Порівняння граничних випадків.....	52
3.4 Висновки	53
РОЗДІЛ 4 Динаміка поблизу атрактора	55
4.1 Вступ	55
4.2 Вивід рівнянь руху.....	55
4.3 МП зв'язок відсутній	60
4.4 Ненульовий МП зв'язок	64
4.5 Висновки	67
ВИСНОВКИ	69
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	70
ДОДАТОК А	72
ДОДАТОК Б.....	73
ДОДАТОК В.....	75
ДОДАТОК Г.....	76

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ

Латинські символи:

d – товщина слою зразка, м
 H – магнітне поле, Т
 M – вектор намагніченості, Т
 N – кількість степенів волі динамічної системи
 w_{mag} – густина енергії
 \hbar – постійна Планка, Дж·с
 s – напрямок поляризації струму
 ρ – густина матеріалу, г/см³
 j_s – густина струму
 \mathbf{n} – одиничний вектор Нееля
 \mathcal{W} – густина потенціальної енергії
 \mathcal{L} – густина функції Лагранжа
 \mathcal{R} – густина функції Релея
 c_{11}, c_{12}, c_{44} – компоненти тензора модулів пружності, дин·см⁻²
 $\lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{44}$ – компоненти тензора магнітопружної взаємодії, ерг·см⁻³
 u – зміщення положення атома, см
 k, q – хвильовий вектор, см⁻³
 R – радіус

Грецькі символи:

γ – гіромагнітне відношення
 α – коефіцієнт згасання
 ω – частота
 κ – хвильовий вектор пружної хвилі, см⁻³
 Θ, Φ – узагальнені координати, радіан
 γ_{AF} – коефіцієнт дисипації в магнітній системі
 γ_{elas} – коефіцієнт дисипації в пружній системі

Індекси:

AF – антиферромагнетик
 FM – ферромагнетик
 an – анізотропія
 spin – спіновий струм
 E – обмін
 G – Гільберта
 cycle – цикл

Скорочення:

ФМ – феромагнетик

АФ – антиферомагнетик

ДС – динамічна система

НМ – немагнітний матеріал

СЕФ – спіновий ефект Хола

СЕЗ – спіновий ефект Зяєбека

РЛЛ – рівняння Ландау-Ліфшиця

УРЛЛ – узагальнені рівняння Ландау-Ліфшиця

ФП – фазовий простір

МП – магнітопружний

ПМ – пружномагнітний

ВСТУП

За останні десятиліття почали дуже стрімко розвиватися галузі фізики та електроніки, спрямовані на створення нових типів обчислювальних пристроїв. Цьому сприяли як і бажання покращити характеристики наявних обчислювальних пристроїв, так і накопичений досвід в різних галузях науки, що дає змогу досліджувати нові матеріали з цікавими властивостями. Виник новий розділ фізики – спінтроніка.

Спінтроніка (SPIN-TRansport electrONICS) – розділ фізики магнетизму та технології електронних пристроїв, в якому головна роль в процесах кодування, переносу і обробки інформації відводиться не заряду, а спіну електрона.

Її появі, як окремого розділу фізики, передувало відкриття в 1988 році ефекту гігантського магнітоопору фізиками Альбером Фертом (Університет Париж-Південь XI) і Петером Грюнбергом (Дослідницький центр Юліх), за що вони були удостоєні Нобелівської премії по фізиці у 2007 році. Основна сфера застосування даного ефекту – датчики магнітного поля, які використовуються для зчитування інформації в жорстких дисках комп'ютерів, надщільного запису інформації, біосенсорах та ін.

Наступним суттєвим поштовхом було відкриття ефекту передачі спінового крутильного моменту, який був передбачений Слонічевським (1989 р.) та Берже (1996 р.). Завдяки цьому стало можливим створення високошвидкісних спінтронних пристроїв.

Наразі в спінтроніці як основні матеріали використовують феромагнетики (ФМ). Теоретична база для опису їх поведінки була створена у 1935 році Л. Д. Ландау та Є. М. Ліфшицем. Вони фактично отримали рівняння балансу для магнітного моменту ФМ використовуючи методи статистичної фізики. Їх рівняння включає в себе зовнішні магнітні поля, проте завдяки його структурі, було можливим видозмінити його, додавши член, що відповідає спіновому струму. Це стало відправною точкою в роботах Берже та Слонічевського.

Варто зазначити, що ФМ майже не використовуються в електроніці як основні матеріали, оскільки велика кількість вільних електронів в них, практично виключає можливість зовнішнього регулювання розподілу заряду. Вплив зовнішнього магнітного поля на електрони ФМ є суттєвим лише при великих його значеннях. В спінтроніці ситуація зовсім змінюється. Завдяки наявності магнітного моменту, електричний струм в ФМ поляризований по спіну, це було показано експериментально в роботі Бабіча (Baibich) та Брото (Broto) у 1988 році. З'явилася можливість регулювати перенос спіну через ФМ, за допомогою зовнішніх магнітних полів.

Проте за останні кілька років почав зростати інтерес до нових матеріалів – антиферромагнетиків (АФ). В 2012 році була продемонстрована можливість кодування інформації на АФ наноструктурах з невеликої кількості атомів заліза, а також зчитування інформації за допомогою тунельного спінового струму. Чим зумовлений такий інтерес до цих матеріалів?

Виявилося, що АФ мають деякі суттєві переваги над ФМ. Це звичайно пов'язано з відмінностями в їх структурі. Як відомо, ФМ характеризуються певною намагніченністю, вона є сумою окремих магнітних моментів атомів. Але іноді у ФМ можуть утворюватися області з більш складною структурою магнітних підґраток. Для нас є суттєвим, що напрямки магнітних атомів можуть мати різні напрямки, таким чином намагніченність ФМ вже буде іншою. Такі матеріали називаються ферритами, а у випадку повної компенсації намагніченності – АФ. АФ мають чутливість лише до великих зовнішніх магнітних полів та на відміну від ФМ, характеризуються дуже малими (або зовсім відсутніми) значеннями намагніченності. Фактично вони не створюють магнітних полів, і, як наслідок, не взаємодіють між собою.

АФ мають стани стійкої рівноваги, частоти перемикання між якими набагато вищі за частоти перемикання ФМ. Це дозволяє покращити таку характеристику обчислювальних пристроїв, як тактова частота. Для сучасних обчислювальних пристроїв вона має порядки ГГц, а для пристроїв на основі АФ – ТГц. До того ж виявилося, що АФ можуть поводити себе як напівметали, для різних напрямків спінової поляризації.

Це все робить АФ привабливими матеріалами спінтроники. Дослідження в цій області мають велике практичне значення, оскільки їх застосування в спінтроніці дозволяє суттєво збільшити швидкості запису та зчитування інформації на електронних носіях. Тому практична цінність даної роботи полягає в можливості використання отриманих результатів при розробках запам'ятовуючих пристроїв. Наукова новизна одержаних результатів полягає в теоретичному підході до розгляду особливостей АФ в присутності спінового струму. Використовуючи основний математичний апарат дослідження динамічних систем (ДС), який достатньо розвинений. Як прийнято, будь-яка динаміка чого-небудь математично може бути описана в термінах ДС. В даному випадку, важливим є відшукування областей структурної або парметричної стійкості даної ДС. Структурна стійкість була введена в 1937 році Андроном і Понтрягіним, і з тих пір знайшла застосування в багатьох розділах науки. Доцільність такого підходу зумовлена в основному тим, що можна обійти безпосередній розв'язок рівнянь руху, які є складними. Використовуючи різні підходи до дослідження ДС, можна встановити фактично все необхідне для прогнозування детермінованої поведінки АФ.

Для розробок нових запам'ятовуючих пристроїв на основі АФ потрібно

спочатку переконатися в можливості та дацільності такого їх використання. Все це створює ставить певні вимоги до досліджуваного матеріалу. Перш за все повинні існувати різні стани у яких може перебувати АФ, ці стани мають бути стійкими довгий час (набагато більший за характерний час згасання), фізично різними та легко розпізнавальними. Тоді такі рівноважні стани можна пов'язати з логічними 0 та 1, що і є основною ідеєю для кодування та збереження інформації. Доцільність використання АФ в спінтроніці зумовлена по-перше їх високою стійкістю до зовнішніх магнітних полів, а по-друге їх швидкодією та малою енергозатратністю при переходах між станами.

На шляху мінімізації обчислювальних пристроїв виникають нові питання пов'язані з залежністю фізичних параметрів від розмірів. Так для нанорозмірних АФ структур виникає потреба враховувати магнітопружну (МП) взаємодію. Це суттєво змінює динамічні властивості таких АФ систем. Для прикладу розглядається АФ нанопроволока, з причин простоти рівнянь, що описують її поведінку.

В данній роботі проводиться дослідження динаміки двохпідграткового АФ під дією зовнішнього спінового струму. Використовується Лагранжев підхід для отримання рівнянь руху, які потім аналізуються. Задача полягає в отриманні значень основних зовнішніх параметрів, які відповідають різним типам динаміки системи. Для цього використовується перехід до ДС, яка повністю описує досліджувану модель реального АФ $KNiF_3$. Подальша робота виконується з даною ДС, використовуючи доцільні методи нелінійного аналізу.

Результати проведеної роботи представлено на науковій конференції фізико-технічного інституту при НТУУ КПІ.

Розділ 1

Огляд літератури

Вступ

Дослідження АФ на сьогоднішній день є актуальним як для фізиків-експериментаторів, так і для фізиків-теоретиків. Нижче представлені основні останні еспериментальні та теоретичні роботи, пов'язані з дослідженням АФ для застосувань у спінтроніці. Перші дають змогу відчувати основні особливості та проблеми при дослідженні АФ з точки зору есперименту, останні роботи присвячені теоретичному підходу до опису АФ і мають більшу вагу в даній роботі. Варто зауважити, що представлені роботи датуються останніми п'ятьма роками, що підтверджує високу зацікавленість наукового товариства до проблем АФ в спінтроніці зокрема.

Роботи присвячені магнітопружній взаємодії в АФ мають досить не нову історію. Розглянуто основні положення та роботи загального характеру по даній тематиці.

Вивчення поведінки розв'язків рівнянь руху є важливою частиною таких розділів фізики як дослідження динамічних систем, теорії біфуркацій, теорії катастроф і т.п. Тому також показані деякі основні методики роботи по дослідженню динаміки, які стосуються даної роботи.

Основні експериментальні дослідження АФ

В роботі [1], датованій 20 липня 2015 року, розповідається про результати експериментів над зразками з різних матеріалів з використанням тонкого АФ $IrMn_3$ (товщина порядку 1 нм). В спрощеній моделі було досліджено властивості трьохшарового (АФ/ФМ/НМ) і двохшарового (ФМ/НМ) зразків під дією змінного струму, при різних значеннях температури. В якості ФМ використовувався $CoFeB$, а в якості немагнітного матеріалу (НМ) – Ta . Для цих багатошарових структур, вимірювалися залежності опору в різних

напрямках в залежності від різних напрямків початкового змінного струму. Використання НМ перешкоджає безпосередньому протіканню струму і тому там відігравали суттєву роль інші ефекти, такі як спіновий ефект Хола (СЕХ) та спіновий ефект Заєбека. Ці ефекти пов'язані з виникненням та переносом спінового моменту внаслідок дії струму.

СЕХ є аналогом аномального ефекту Хола, тому що він також відбувається за відсутності зовнішнього магнітного поля. При проходженні електричного струму через зразок ФМ, за рахунок спин-орбітального зв'язку, виникає поперечний спінополяризований струм по відношенню до напрямку початкового струму. Появу спінового струму пов'язують з розштовхуванням електронів з антипаралельними спінами до протилежних сторін провідника рис.1.1 (а). СЕХ був передбачений Мураками в 2003 р. і незалежно від нього Сіной в 2004 р. Також суттєвим для нас є зворотній СЕХ – поява електрорушійної сили внаслідок просторового розділення електронів з різними напрямками спінів рис.1.1 (б).

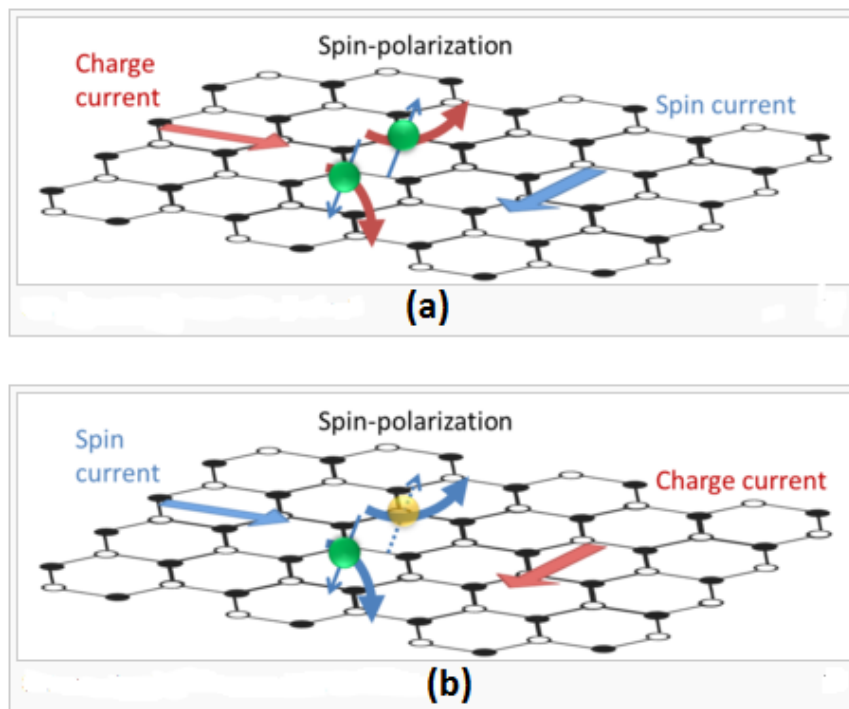


Рисунок 1.1 — Схематичне зображення прямого (а) та зворотнього (б) ефекту Хола.

В класичному ефекті Заєбека відбувається поява термоелектрорушійної сили зарахунок з'єднання різних матеріалів (різні коефіцієнти Заєбека), контакти яких знаходяться при різних температурах рис.1.2 (а). В ФМ носії заряду – вільні електрони мають різний спін ("вгору" або "вниз") і відповідно різну густину та швидкість розсіювання, тому можна зробити припущення, що вони мають і різні коефіцієнти Заєбека рис.1.2 (б).

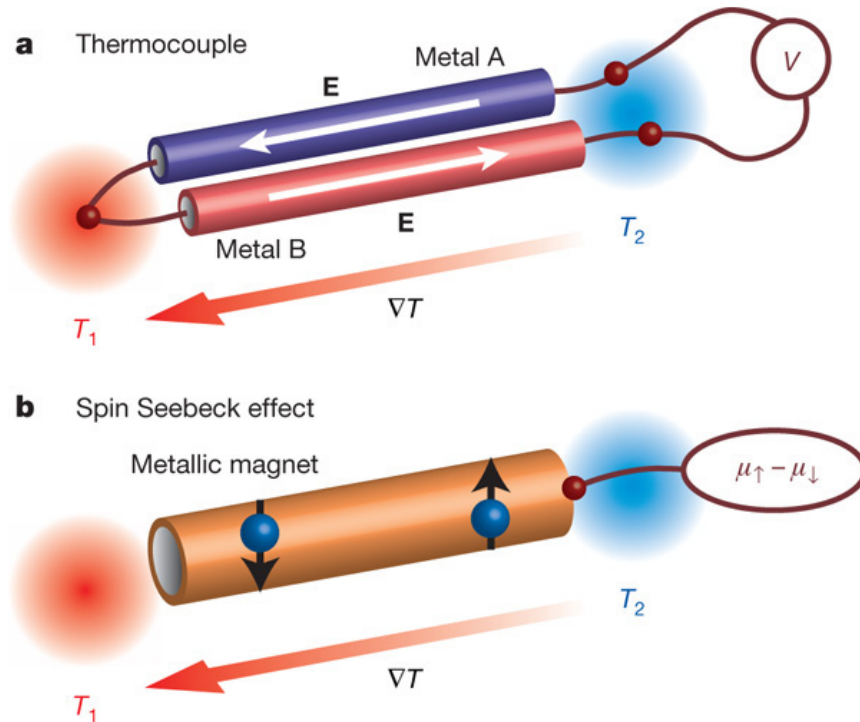


Рисунок 1.2 — (а) Класичний ефект Заєбека на прикладі термопар, поява електрорушійної сили за рахунок використання різних металів А і В та наявності градієнту температур; (б) спіновий ефект Заєбека (СЕЗ) в ФМ, поява спінового струму внаслідок наявності електронів з антипаралельними спінами та градієнту температур.

Основними результатами експерименту, описаному в [1], є підтвердження теоретичних розрахунків, що на генерацію других гармонік опорів впливають СЕХ та СЕЗ. Для трьохшарового зразка досліджено окремо парамагнітну та АФ фазу. Було підтверджено можливість використання АФ замість ФМ, тобто можливість створення магнітних резисторів на основі подвійних структур НМ/АФ, в данному випадку Та/IrMn, під дією струму, що викликає спіновий момент. Основна увага приділялась поверхневим ефектам. Переносу струму (звичайного та спінового) через поверхні розподілу АФ/ФМ, АФ/НМ та ФМ/НМ і пов'язані із цим ефекти СЕЗ та СЕХ (прямий та зворотній). Об'ємні ефекти в АФ пов'язані із симетріями самого кристалу, дослідження в цьому напрямку були зроблені в [2] для АФ CuMnAs і стосувалися електричного перемикачання між стійкими станами в ньому.

Метою експеримента була перевірка можливості використання АФ матеріалів з бістабільною магнітною анізотропією для створення пристроїв з АФ пам'яттю, в яких відбуваються електричні запис та зчитування інформації при кімнатній температурі. Ефектом, який відіграє при цьому головну роль є анізотропний магнетоопір – залежність електричного опору в ФМ (та АФ) від кута між напрямком струму та напрямком зовні-

пного магнітного поля. Досліди проводилися для двошарової структури АФ/ФМ, в якості ФМ використано GaP. Під час експерименту прикладали струм у певному напрямку і вимірювали сигнал у іншому напрямку (наприклад, перпендикулярному до початкового). Завдяки анізотропному магнетоопору, сигнал може проходити або не проходити. Якщо досягнуто певного стійкого розташування підґраток ФМ, при якому сигнал відсутній у даному напрямку, струм вимикали і потім проводили експеримент через деякий час (перерва до 24 годин). Виявилося, що отримана у такий спосіб структура, зберігає свій стан і стійка до зовнішніх збурень магнітними полями, тобто CuMnAs поводить себе як діамagnetик. У цьому полягає одна з переваг АФ над ФМ. Для переходу в інший стійкий стан струм прикладали до іншого каналу.

Друга частина досліджень була пов'язана з встановленням порогових значень густини спінового струму, який викликає перемикання між стійкими станами для зразків різної товщини ФМ. Для приладу товщиною 28 нм порогова густина становить приблизно 6 МА/см². Для двошарової структури з ФМ Pt/Co вона рівна 100 МА/см². В зменшенні порогового струму полягає інша перевага АФ. Оскільки температура Нееля для даного АФ становить 480 К, виявилося можливим використання пристроїв з досліджуваною структурою при кімнатній температурі. В роботі [3] описуються дослідження магнітного резистору, що може працювати при кімнатній температурі, в якості АФ було використано FeRh. Оскільки, на відміну від ФМ, власний АФ момент дорівнює нулю, пристрої на основі АФ не створюють зовнішніх паразитних магнітних полів, які можуть впливати на сусідні пристрої у разі їх достатньо близького розташування. Суттєвою тут є також інертність АФ до дії зовнішніх магнітних полів.

Зразок товщиною 100 нм було спочатку нагріто до 400 К, а потім у зовнішньому магнітному полі певному напрямку охолоджено до 200 К. Після цього при температурі 200 К, було проведено серію випробувань по вимірюванню опору в різних напрямках (опір різний). Тобто дві можливі конфігурації розташування магнітних моментів прямо пов'язані з двома різними станами опору (resistance states). Особливістю експерименту є "перехід" ФМ-АФ. Так як FeRh поводить себе як ФМ при достатньо великих (але менших температури Кюрі) температурах, і тому, власне, можна за допомогою зовнішнього магнітного поля зорієнтувати його магнітні моменти. При низьких температурах (кімнатні в даному експерименті) маємо АФ з усіма його властивостями. Взагалі можливість цього "переходу" пов'язана із товщинами Fe та Rh, які в свою чергу залежать від температури.

В роботі [4] було проведено дослідження двошарової структури ФМ/АФ на прикладі Fe/Rh на можливість застосування АФ для запису та зчиту-

вання інформації. Для будь-якого двошарового ФМ/АФМ визначальним є співвідношення d_{AF}/d_{FM} , де d_{AF}, d_{FM} – товщини слоїв АФ та ФМ відповідно. При $d_{AF}/d_{FM} \ll 1$ АФ вектор обертається так само, як і сусідній ФМ вектор, обертання якого, в свою чергу, викликано дією зовнішнього магнітного поля. Якщо ж $d_{AF}/d_{FM} \gg 1$, то АФ вектор стійкий до дії магнітного поля. Оскільки таке стійке положення залишається до полів порядку 9 Т, то поведінка АФ має гістерезисний характер. Автори [4] вводили до розгляду зовнішнє поле (H_c) та поле зміщення (H_{eb}), які є параметрами та описують поведінку даного пристрою для різних відношень d_{AF}/d_{FM} . Експеримент проводили для випадків Fe/Rh \sim 0.95 та Fe/Rh \sim 1. Запис інформації виконується за допомогою пониження температури під дією магнітного поля (heat-assisted magnetic recording) як і в [3]. Зчитування записаної інформації відбувалося за допомогою анізотропного магнетоопору.

Для повноти представлених робіт варто додати достатньо широкий огляд [5], в якому приведені найбільш важливі, з практичної точки зору, останні доробки в спінтроніці АФ. Особливої уваги заслуговують топологічні структури з магнітних атомів (наприклад скіrmіони), названі в честь Tony Hilton Royle Skyrme, який створив концепцію топологічних солітонів для опису протонів та нейтронів. Такі скіrmіони (їжакоподібні скіrmіони) є просторовими аналогами плоских доменів Блохівського та Неелівського типів рис.1.3.

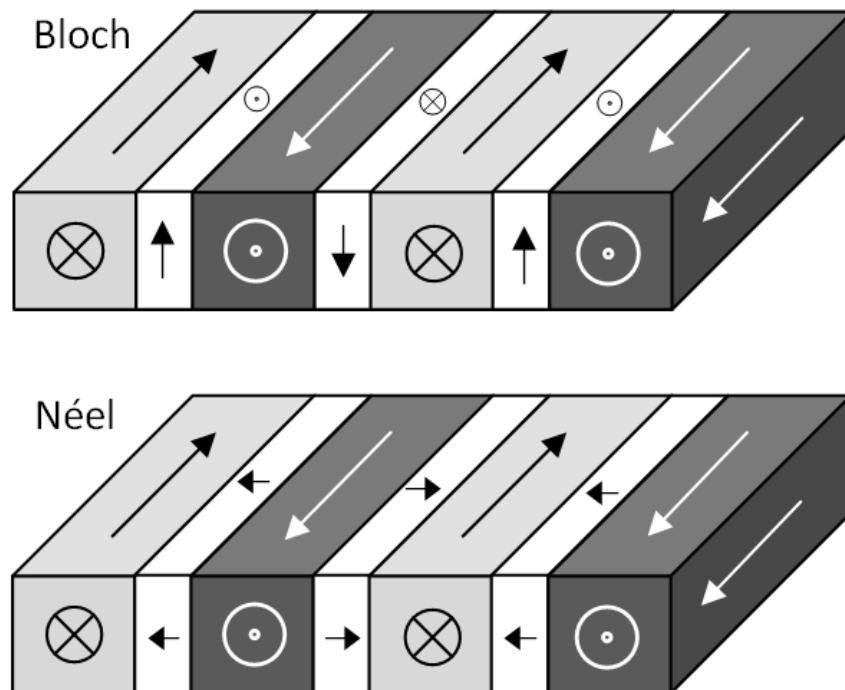


Рисунок 1.3 — Приклади доменних стінок Блохівського (зверху) та Неелівського (знизу) типів. Основна різниця полягає в розташування магнітних моментів в сусідніх шарах.

В завершенні огляду останніх експериментальних робіт, звернемо увагу на поєднання ефектів електронів та фотонів – ультрашвидка спінова фотоніка. Як показали результати експериментів по зміні АФ стану, ультракороткі світлові імпульси (тривалість $\sim 10^{-13} - 10^{-14}$ с) можуть призводити до перемикання АФ. Теоретичного обґрунтування цьому процесу наразі не має.

Теоретичний підхід до опису динаміки АФ

Одним із підходів до дослідження динаміки ФМ є використання узагальнених рівнянь Ландау-Ліфшиця, які є рівняннями балансу магнітного, спінового моментів та добре описують поведінку макроскопічної намагніченості. Використання цих рівнянь для опису АФ є також можливим, це спричинено особливою структурою АФ. Наявні так звані магнітні підґратки – сукупність атомів зі співнаправленими магнітними моментами.

В роботі [6] проведений детальний огляд особливостей динаміки АФ. В якості моделі, для якої проводять всі розрахунки використовують вентиль, який являє собою набір шарів різних матеріалів (АФ, ФМ, НМ). Основними ефектами з якими мають справу при теоретичному розгляді є ефекти переносу спінового моменту та гігантський магнетоопір рис.1.4. Спінову поляризацію струм отримує при протіканні через шар ФМ, по аналогії з поляризацією світла при проходженні через поляризатор. При цьому вирішальну роль відіграють процеси розсіяння електронів з різним спіном. Строго це можна показати при квантовому підході до опису цього явища, який не розглядається в даній роботі.

Ефект передачі крутильного спінового моменту, є суттєвим для вентилів з НМ шаром, що перешкоджає безпосередньому проходженню струму, та дозволяє передавати додатковий обертовий момент магнітним атомам АФ з метою переведення його в інший стан.

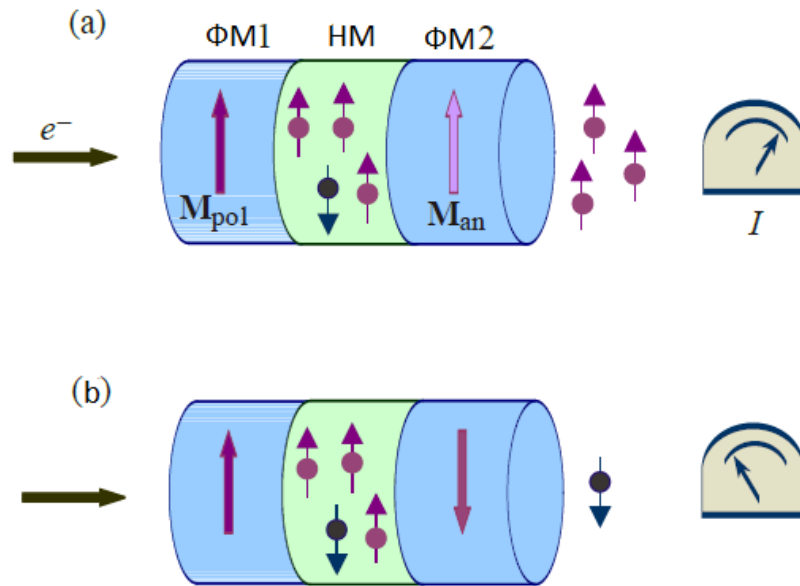


Рисунок 1.4 — Будова спінового вентиля та пояснення ефекту гігантського магнетопору. (а) співнаправлення векторів спінової поляризації M_{pol} в першому ФМ шарі та вектору намагнічення M_{an} в другому сприяє протіканню великих струмів; (б) протилежне направлення M_{pol} і M_{an} перешкоджає протіканню струму.

Опис процесу передачі спінового моменту можна розглядати з квантово-механічної точки зору або використовуючи напівкласичне наближення. В першому варіанті розв'язують задачу розсіяння електронів на потенціалі магнітних атомів. В другому використовують УРЛЛ та рівняння балансу електричного заряду. При цьому РЛЛ записують окремо для кожної магнітної підґратки. За своєю будовою АФ бувають дуже різними, починаючи від найпростіших двохпідґраткових структур та закінчуючи багатогратковими неколінеарними та спіральними розташуваннями магнітних моментів атомів. Для подальшого опису роботи нас цікавитимуть в першу чергу двопідґраткові (колінеарні) АФ, тому питання стосовно їх основних характеристик висвітliamo більш детально.

Однією з таких характеристик, яка вводиться вперше для АФ є критичне магнітне поле H_{ex} , яке призводить до явища перекидання підґраток (spin flip). Для більшості АФ воно має порядки 10Т. При таких та більших магнітних полях відбувається переорієнтація магнітних ґраток і вони якби вирівнюються вздовж поля. При полях суттєво менших H_{ex} можна розглядати динаміку АФ, при якій власний макроскопічний момент все ще дуже малий. Наприклад, поля магнітної анізотропії, що зумовлені геометрією підґраток, мають порядки $\sim 10^{-4}$ Т. Загальний підхід до дослідження динамічної задачі АФ використовуючи УРЛЛ, полягає в отриманні рівнянь руху для макроскопічної намагніченості. Такі рівняння будуть аналогами

рівнянь Ньютона, оскільки наявність декількох підґраток, для кожної з яких записано УРЛЛ створює набір взаємопов'язаних рівнянь першого порядку, що в сукупності можна переписати як рівняння з другою похідною по часу.

Також дуже важливим є врахування дисипції, що наявна практично в усіх реальних системах. Для цього взагалі зручно ввести виходячи з рівнянь руху функцію Лагранжа, тоді затухання можна врахувати через дисипативну функцію Релея. УРЛЛ мають спеціальний доданок, введений Гільбертом, що враховує дисипацію в ФМ. Для АФ такий підхід не зовсім вдалий. Оскільки вже на цьому етапі проявляються певні складності спричинені структурою АФ. Не вдаючись в деталі, варто зауважити, що при врахуванні дисипації значну роль відграють флуктуаційні ефекти пов'язані з появою ненульової макроскопічної намагніченості, що не створена рухом АФ. Тому для повного опису динаміки вже потрібно виходити за рамки класичної теорії та вивчати процеси релаксації на мікроскопічному рівні.

Вивчення динаміки АФ в присутності струму є важливим, оскільки це перший крок до керування станами в ньому. Є два основні підходи до вивчення такого процесу. Мікроскопічний, що враховує особливості зонної структури матеріалу і тому є сильно прив'язаним до конкретного матеріалу. Другий більш загальний, оснований на магнітній гідродинаміці і є більш-менш матеріалонезалежним. В УРЛЛ зовнішній струм враховується в доданку Слонічевського. Суттєвим є те, що при описі динаміки за наявності струму, дуже сильно проявляються симетрії присутні даній кристалічній структурі. Тому дослідження основані на виявленні симетрій даного кристалу можуть сказати доволі багато про його динаміку, не вдаючись в квантово-механічні розрахунки.

Як висвітлено в [7], динаміка трьохпідґраткового АФ індукована спіновим струмом може бути описана УРЛЛ. Проведене там дослідження відноситься до кристалічних структур таких як, наприклад, $IrMn_3$. Відправною точкою була модель, в якій три різних магнітних моменти можуть рухатися лише в площині їх упорядкування. Показано, що в цьому випадку можна звести рівняння руху до одного скалярного рівняння відносно кута повороту навколо деякої фіксованої осі. Поляризація спінового струму також весь час є сталою, змінювалася лише величина струму (для постійних струмів) або амплітуда початкового імпульсу (для імпульсних струмів). Врахування дисипації призвело до появи певного діапазону початкових струмів, що можуть ефективно перемикає систему. Проте наявні два стани АФ, не розпізнаються просто у зв'язку з їх подібністю (магнітні моменти весь час залишаються в одній площині).

Аналогічним підходом до вивчення динаміки АФ є Лагранжевий під-

хід. Він оснований на встановленні деякої функції, що називається функцією Лагранжа [8]. Однією з важливих властивостей функції Лагранжа є її адитивність – Лагранжіан деякої системи рівний сумі Лагранжіанів (не взаємодіючих) підсистем. Особливо це зручно для вивчення АФ з МП взаємодією, оскільки УРЛЛ не враховують цю взаємодію. Вигляд функції Лагранжа залежить певним чином від симетрії задачі, явні вигляди необхідних далі Лагранжіанів наведені в [9, 10]. З принципу найменшої дії відповідного функціоналу можна отримати рівняння руху як показано в Додатку Б [11].

АФ з МП взаємодією

В середині минулого сторіччя почали з'являтися роботи, в яких передбачалося існування зв'язаних магнон-фононних хвиль в ФМ та АФ [12]. Одним з перших було відкрито ефект "магнітопружної щілини" або "замороженої ґратки" при якому коливання в намагніченостях відбуваються при постійних деформаціях матеріалу. В дослідженнях по АФ резонансу в гематиті $\alpha - \text{Fe}_2\text{O}_3$ було знайдено, що резонансна частота ω_0 складається з магнітної частоти ω_M та деякого доданку пов'язаного з МП взаємодією, ω_{ME}

$$\omega_0^2 = \omega_M^2 + \omega_{ME}^2, \quad (1.1)$$

Тут є суттєвим, що ω_{ME} не змінюється при зміні поля H , навпаки для чистоти експерименту потрібно спрямувати поле до нуля, тоді з (1.1) випливає $\omega_0 = \omega_{ME}$.

Пізніше було показано, що цей ефект є загальним для всіх ФМ та АФ і відрізняється лише своїм значенням. І "застиглі" деформації є не гіпотеза, а результат послідовного розв'язку зв'язаних рівнянь руху для намагніченості (РЛЛ) та деформацій.

Цікавим є те, що ефект утворення МП щілини має аналоги в інших розділах фізики, наприклад, в моделі Хіггса, що описує появу маси внаслідок спонтанного порушення симетрії. В даному випадку магнітну симетрію порушує врахування МП взаємодії. За відсутності магнітної анізотропії, зовнішнього магнітного поля та МП зв'язку енергія коливань намагніченості \mathbf{M} визначається обмінною взаємодією $(\nabla \mathbf{M})^2$, що пов'язана з просторовою неоднорідністю коливань. В цьому випадку отримується безщілинний спектр з частотою пропорційному квадрату хвильового вектора $\omega \sim k^2$. З врахуванням МП, в першому наближенні в енергію входить доданок $u^{(0)} (\nabla \mathbf{M})^2$, де $u^{(0)}$ – спонтанні деформації. Аналогічний доданок є і в моделі Хіггса $|\phi_0|^2 A_\mu^2$, де ϕ_0 – доданок на який перенормується комплексне

скалярне поле (заряджених бозонів), A_μ – векторне поле (електромагнітне) безмасових частинок.

Робота [13] присвячена дослідженню АФ наноосциляторів на основі СЕХ (AF-SHNO). Для структури $Pt/NiO/Pt$ рис.1.5 досліджувався АФ резонанс для різних значень спінового струму.

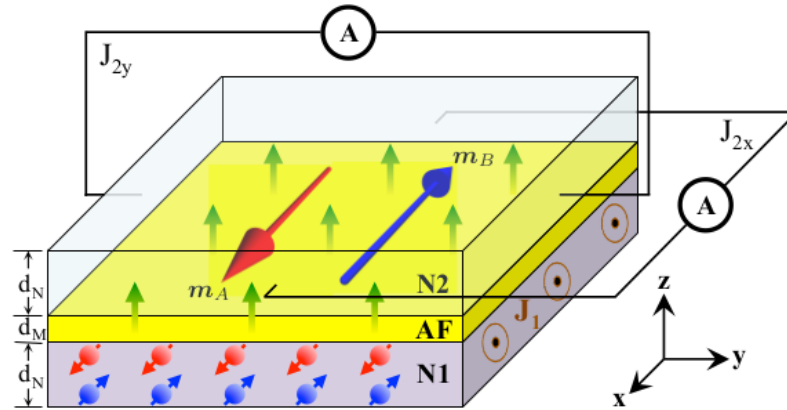


Рисунок 1.5 — Тонка АФ плівка з NiO (AF), оточена немагнітним провідним матеріалом Pt (N1, N2). Струм J_1 подається на нижню пластинку, внаслідок СЕХ в АФ генерується спіновий струм, який внаслідок зворотнього СЕХ у верхній пластині змінює провідність. В експерименті реєструються відповідні струми J_{2x} , J_{2y} . Намагніченості магнітних підґраток в АФ позначені m_A , m_B . Товщини магнітного та НМ d_M , d_N відповідно.

Розв'язуючи УРЛЛ, авторами роботи отримано дисперсійні співвідношення, які включають в себе згасання та спіновий струм. Оскільки розглянутий зворотній зв'язок в системі є лінійним, що відповідає малим відхиленням від рівноважного стану, автори можуть тільки встановити критичне значення спінового струму, при якому відбувається втрата стійкості. А поява стійкості обертових коливань лежить за межами теоретичної моделі і може бути отримана експериментально. Не дивлячись на те, що розміри АФ пластинки – 1 нм, а НМ пластинок – 50 нм, не було досліджено випадок квантування магнітних частот, основною метою авторів було вивчення втрати стійкості системи та чисельний аналіз рівнянь руху.

В результаті чисельних розрахунків отримано фазову діаграму рис. 1.6, на якій наведені можливі типи динаміки системи.

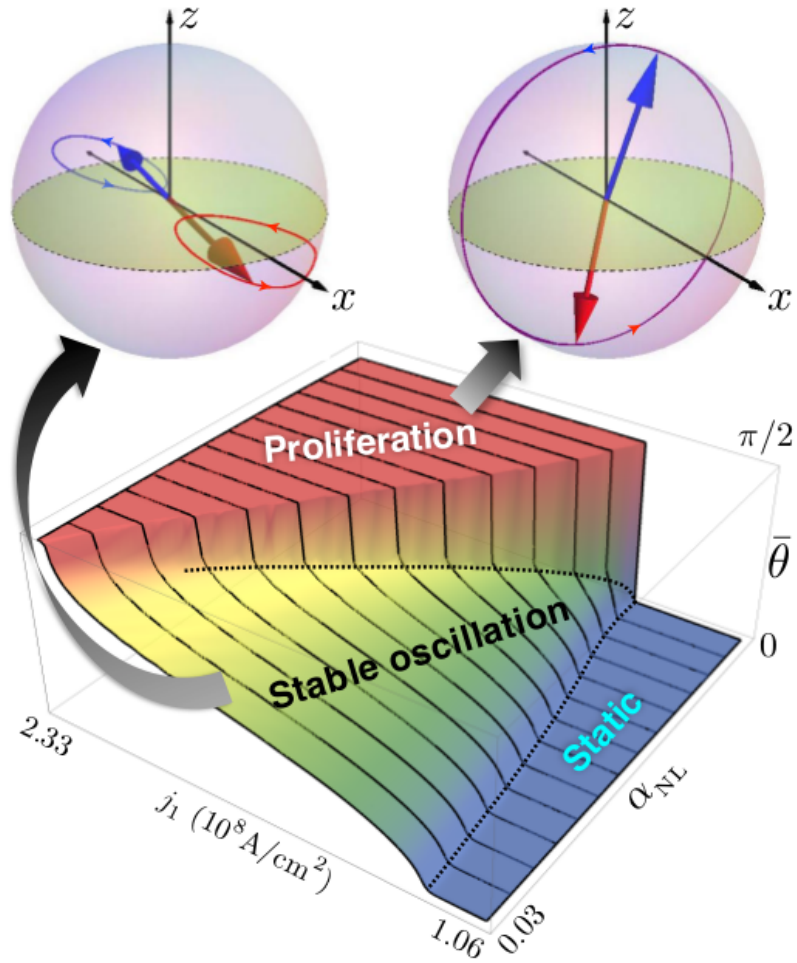


Рисунок 1.6 — Типи руху намагніченості викликані дією спінового струму j_1 при зворотньому зв'язку α_{NL} . Відхилення від положення рівноваги задано кутом $-\bar{\theta}$.

Таким чином в розглянутій моделі можлива відсутність коливань (статичний режим – струм менше критичного), стійкі автоосциляції та "стійкі" обертання. Підтвердження наявності останніх вже потребує розгляду нелінійної моделі.

З великої кількості АФ структур більше уваги приділемо матеріалам з кубічною симетрією, оскільки вони простіше описуються математично, і в той же час дозволяють показати ефекти пов'язані з МП взаємодією. В роботі [14] досліджено матеріали типу KMF_3 , де M означає елементи перехідної групи $3d$. Методами рентгенівської спектроскопії встановлено симетрію кристалічної ґратки та параметри ґраток (a) вище та нижче температури Нееля (T_N) Таблиця 1.1.

Таблиця 1.1 — Параметри кристалічних ґраток АФ типу KMF_3 .

	симетрія, $T = 298^\circ K$	a , $T = 298^\circ K$	симетрія, $T = 78^\circ K$	a , $T = 78^\circ K$	T_N , $^\circ K$
$KMnF_3$	кубічна	4.191 ± 10^{-3}	монок.	$4.168 \pm 2 \cdot 10^{-3}$	88
$KFeF_3$	кубічна	4.122 ± 10^{-3}	ромб.	$4.108 \pm 2 \cdot 10^{-3}$	121
$KCoF_3$	кубічна	4.069 ± 10^{-3}	тетраг.	$4.057 \pm 2 \cdot 10^{-3}$	136
$KNiF_3$	кубічна	4.015 ± 10^{-3}	кубічна	$4.002 \pm 2 \cdot 10^{-3}$	280
$KCuF_3$	тетраг.	4.140 ± 10^{-3}	тетраг.	$4.121 \pm 2 \cdot 10^{-3}$	243

Як можна бачити АФ $KNiF_3$ має досить високу температуру Нееля, $T_N = 280^\circ K$, і він має кубічну симетрію вище та нижче цієї температури.

Деякі параметри $KNiF_3$ обраховані експериментально в роботі [15]. Кожен з іонів Ni^{++} має спин $S = 1$ та g -фактор $g \cong 2.2$. Тому гіромагнітне співвідношення $\gamma = 2\pi g \frac{\mu_N}{h} \cong 0.1$ ТГц/Т, де μ_N – ядерний магнетон, h – постійна Планка. Ввеличина поля обміну при нульовій температурі $H_{ex} \cong 3.6 \cdot 10^3$ кЕр. За температури нижче T_N коли спіни впорядковані вздовж однієї з осей $\langle 100 \rangle$ поле анізотропії рівне $H_{an} \cong 0.27$ кЕр.

Один з пружних коефіцієнтів а саме c_{11} був обрахований в [16] в залежності від температури (нижче та порядку T_N) для АФ $KNiF_3$ рис.1.7.

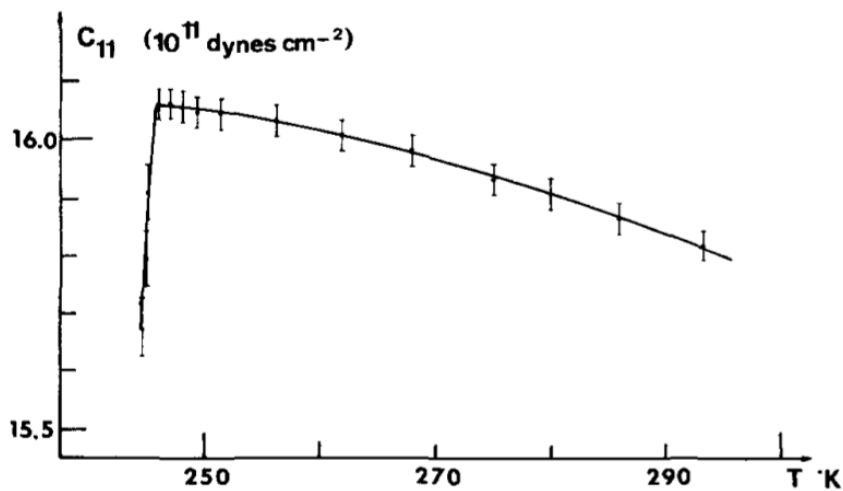


Рисунок 1.7 — Пружний коефіцієнт c_{11} в $KNiF_3$ при різних значеннях температури T .

МП коефіцієнти визначалися в роботі [17]. Вираз для відповідного чле-

ну, що враховує МП зв'язок, F_{ME} , у вільній енергії має вигляд

$$F_{ME} = B_1 \sum_{i=1,2, \alpha=x,y,z} S_i^{\alpha^2} e_{\alpha\alpha} + B_3 \sum_{\alpha=x,y,z} S_1^\alpha S_2^\alpha e_{\alpha\alpha} + B_2 \sum_{i=1,2} (S_i^x S_i^y e_{xy} + c.p.) + B_4 ((S_1^x S_2^y + S_1^y S_2^x) e_{xy} + c.p.), \quad (1.2)$$

де B_1, B_2, B_3, B_4 – МП константи, i – номер магнітної підґратки, \mathbf{S} – нормована намагніченість підґратки, e_{ij} – тензор деформацій.

Перейдемо в (1.2) до вектора Нееля $\mathbf{n} = \frac{1}{2}\mathbf{S}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{S}_2$, при АФ впорядкуванню $\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 = 0$ і тому $\mathbf{S}_1 = \mathbf{n}, \mathbf{S}_2 = -\mathbf{n}$. Вираз (1.2) набуде вигляду

$$F_{ME} = 2B_1 \sum_{\alpha=x,y,z} n_\alpha^2 e_{\alpha\alpha} - B_3 \sum_{\alpha=x,y,z} n_\alpha^2 e_{\alpha\alpha} + 2B_2 (n_x n_y e_{xy} + c.p.) - 2B_4 (n_x n_y e_{xy} + c.p.), \quad (1.3)$$

Порівнюючи вираз (1.3) з відповідним виразом в [10] для вільної енергії та враховуючи результати в [17], отримаємо

$$\begin{aligned} \lambda_{11} &= 4 \left(B_1 - \frac{B_3}{2} \right) = 5 \cdot 10^7 \frac{\text{ерг}}{\text{см}^3}, \\ \lambda_{44} &= B_2 - B_4 = 3.3 \cdot 10^7 \frac{\text{ерг}}{\text{см}^3}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

Таким чином МП коефіцієнти, що фігурують в потенціалі (2.1) для АФ $KNiF_3$ приймають значення (1.4). Для хвильового вектора вздовж $(1, 1, 0)$ авторами [17] знайдено залежність $c_L = \frac{1}{2}(c_{11} + c_{12} + 2c_{44})$ від температури для двох типів магнітних структур рис. 1.8.

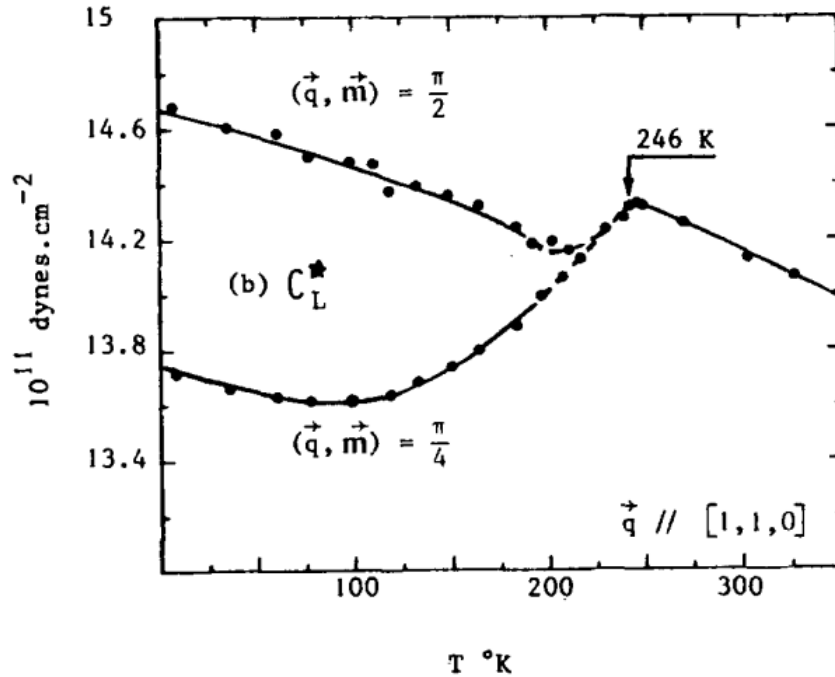


Рисунок 1.8 — Залежність c_L в $KNiF_3$ від температури T для випадків коли кути між вектором Нееля \mathbf{m} та хвильовим вектором \mathbf{q} рівні $\frac{\pi}{2}$ та $\frac{\pi}{4}$.

Вважаючи деформації ізотропними тобто $c_{11} - c_{12} = 2c_{44}$ можна знайти всі пружні коефіцієнти використовуючи рис.1.7, рис.1.8 для конкретної температури. Густина $KNiF_3$ можна обрахувати знаючи молярні маси K, Ni, F та використовуючи постійну ґратки з Таблиці 1.1, таким чином маємо $\rho \cong 4.09 \cdot 10^3 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$.

Основні методи дослідження ДС

У зв'язку з широкою різноманітністю динамічних процесів пов'язана і велика кількість, в загальні кажучі, різних ДС. Не має сенсу висвітлювати тут якісь загальні методи, тому виберемо напрямок серед наявних методів дослідження, що найбільше відповідає даній роботі.

Під динамічною системою розуміється набір інтегро-дифференціальних рівнянь з початковими та граничними умовами, що описують поведінку фізичного процесу, явища. Як склалося вже досить довгий час, графічно зручно представляти динаміку використовуючи поняття фазового простору. ФП – це $2N$ -мірний простір узагальнених координат та імпульсів, для фізичних систем з N степенями волі. На фазовому просторі можуть бути наявні особливі точки, фазові траєкторії, атрактори та ін. Будь-якій динаміці фізичної системи однозначно відповідає переміщення точки вздовж конкретної фазової лінії.

Основна зручність при використанні методу ФП полягає у тому, що іноді не потрібно розв'язувати складних рівнянь аби зрозуміти, що саме відбувається у системі та навіть отримати деякі кількісні оцінки. Важливим надалі є поняття структурної стійкості ДС. ДС є структурно стійкою, якщо при зміні будь-яких параметрів наявних в системі, її поведінка якісно не змінюється [18].

З іншого боку фізичний інтерес, як правило, мають саме критичні значення параметрів, при яких якісно змінюється динаміка системи. Методи їх отримання складають окрему науку – теорію біфуркацій. Тут також сильно допомагає метод ФП, оскільки особливі траєкторії – сепаратиси, що розділяють ФП на області з якісно різною поведінкою ДС, можуть бути досить просто визначені виходячи із самих загальних міркувань.

З точки зору теорії катастроф, катастрофа – це стрибкоподібна зміна типу динаміки, що відбувається при повільній зміні параметрів системи ("ворушіння" параметрів). Спочатку теорія катастроф народилася з дослідження відображень площини на площину [19] та встановленню деяких загальних типів особливостей (складка, збірка). Переживаючи досить стрімкий розвиток, теорії катастроф було знайдено застосування майже усюди (і не тільки в науці). В роботі використовуються деякі методи теорії ката-

строф.

Висновки

Проведений огляд останніх робіт по дослідженню властивостей деяких АФ, зокрема $KNiF_3$. Зрозуміло, що наразі вивчення АФ є гарячою темою в науковій спільноті, що підтверджується великою кількістю робіт вже за останні декілька років.

Експерименти вцілому направлені, на перевірку можливості використання у майбутньому АФ у електроніці. З цим пов'язані спін-орбітронні ефекти (СЕХ та зворотній СЕХ), спін-колаботронні ефекти (СЕЗ), ново-явлені ефекти взаємодії коротких імпульсів світла з магнітними спінами в АФ. Вивчаються особливості переходів між станами (запис інформації), поведінки АФ при різних температурах та магнітних полях (зберігання інформації), встановлюються властивості матеріалів, що змінюються в залежності від напрямку (зчитування, за допомогою ефектів анізотропного магнетоопору). Всі результати неоднозначно вказують на можливість подальших застосувань АФ.

Теоретичні роботи по вивченню АФ, мають вцілому два напрямки: мікроскопічний (квантовий) підхід та феноменологічний, використовуючи рівняння балансів. Динамічні рівняння для макроскопічних намагніченностей можуть бути отримані з варіаційного принципу для деякого функціоналу дії, який досить просто записується на основі функції Лагранжа.

Розглянуто особливості МП ефекту в АФ, в першу чергу він проявляється в зміні частоти магноної хвилі (МП щілина). Потім він впливає на динаміку системи – появу зв'язаних магнон-фоонних та зворотнім їм коливанням. Наведено числові значення основних МП та пружних коефіцієнтів для АФ $KNiF_3$, які будуть використовуватися далі. Додаткові ефекти пов'язані з МП стають важливими для нанорозмірних об'єктів, коли навіть малі МП коефіцієнти можуть призводити до якісно нових змін в системі.

Також приведені основні положення стосовно дослідження ДС, що використовуються в цій роботі при вивченні типів динаміки магнітних моментів в кубічних колінеарних АФ.

Розділ 2

Рівняння руху, дисперсійні співвідношення

Вступ

Для кубічного АФ з МП зв'язком проводиться дослідження потенціальної енергії. Розглядаються малі відхилення вектора Нееля від стійкого стаун $(0, 0, 1)$. Використовуючи Лагранжев підхід встановлюються основні рівняння, що описують динаміку АФ з МП зв'язком, враховуючи згасання та спіновий струм. Далі розглядається частковий випадок, який відповідає АФ нанопроволоці. Граничні умови отримуються прямим інтегруванням рівнянь руху без дисипації та струму по малому об'єму поблизу границі АФ-НМ. Для бездисипативного руху без струму отримуються дисперсійні співвідношення для МП та пружньомагнітної (ПМ) хвиль. Для магнонної моди визначається закон квантування частот, що отримується після врахування граничних умов.

Дослідження потенціалу

Стан АФ описується за допомогою вектора Нееля \mathbf{n} , який у випадку колінеарного АФ рівний різниці намагніченностей двох магнітних підґраток. Цей вектор є нормованим $|\mathbf{n}| = 1$. Положення рівноваги колінеарного АФ наведені у Додатку А. Для дослідження МП взаємодії у АФ, яка стає суттєвою при зменшенні розмірів матеріалу, потрібно вводити додактові змінні, що описують поведінку пружної підсистеми, а саме вектор зміщення \mathbf{u} . Взаємодія пружної та магнітної підсистем вважається слабкою, тому і деформації в АФ теж малі і відповідний тензор деформації задається виразом [10] $u_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)$. Для кубічного АФ густина потенціальної енергії АФ з урахуванням МП взаємодії \mathcal{W} складається з густин енергій еласти-

чної та магнітної підсистем і обмінної взаємодії між цими підсистемами та має вигляд

$$\begin{aligned}
\mathcal{W} = & \frac{1}{2}c_{11}(u_{xx}^2 + u_{yy}^2 + u_{zz}^2) + c_{12}(u_{xx}u_{yy} + u_{zz}u_{yy} + u_{xx}u_{zz}) + \\
& 2c_{44}(u_{xy}^2 + u_{yz}^2 + u_{zx}^2) + \frac{\lambda_{11}}{2}(n_x^2u_{xx} + n_y^2u_{yy} + n_z^2u_{zz}) + \\
& \lambda_{12}(n_x^2(u_{yy} + u_{zz}) + n_y^2(u_{xx} + u_{zz}) + n_z^2(u_{xx} + u_{yy})) + \\
& + 2\lambda_{44}(n_xn_yu_{xy} + n_zn_yu_{yz} + n_xn_zu_{xz}) - \frac{1}{4}M_{sat}H_{an}(n_x^4 + n_y^4 + n_z^4),
\end{aligned} \tag{2.1}$$

де c_{11}, c_{12}, c_{44} – компоненти тензора модулів пружності, $\lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{44}$ – компоненти тензора магнітопружної взаємодії, M_{sat} – намагніченність насичення, H_{an} – поле магнітної анізотропії. За відсутності МП зв'язку потенціал має вигляд як зображено на рис.2.1. А. Відповідний конфігураційний простір, ізоморфний сфері $S(2)$, показаний на рис.2.1. Б.

Згідно з загальних міркувань теорії симетрій, якісно вигляд потенціальної енергії та конфігураційного простору не мають змінюватися при додаванні МП взаємодії. Перевіримо це в явному вигляді. В подальшому дослідженні нас будуть цікавити коливання вектора Нееля навколо положення рівноваги, природнім для такого випадку є фіксація деформацій (модель "замороженої" ґратки). Нехай α це множник Лагранжа, тоді функція яку потрібно проаналізувати має вигляд $\tilde{\mathcal{W}} = \mathcal{W} + \alpha(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 - 1)$. Екстремуми (2.1) задовольняють рівнянням

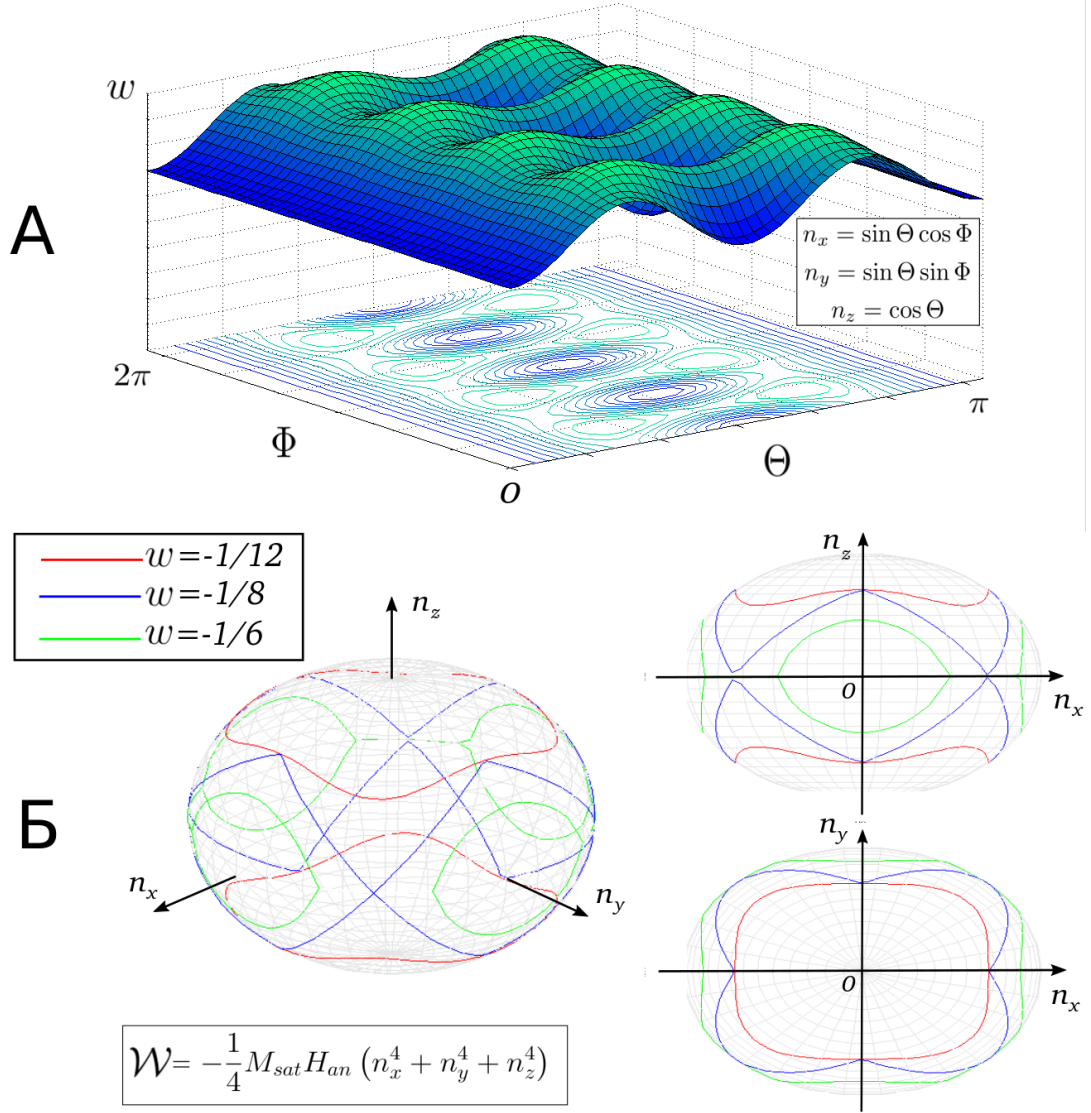


Рисунок 2.1 — А. Залежність нормованої густини потенціальної енергії від сферичних координат, $w = \mathcal{W}/M_{sat}H_{an}$. Показані лінії рівня (конфігураційний простір в змінних Θ, Φ). Б. Конфігураційний простір в термінах компонент вектора Нееля та дві його проекції на площини (n_x, n_z) і (n_x, n_y) . Три сепаратриси позначені червоним, синім та зеленим кольорами відповідають максимуму та двом сідловим точкам потенціалу (2.1) без МП взаємодії.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{\mathcal{W}}}{\partial n_x} &= \lambda_{11}n_x u_{xx} + 2\lambda_{12}n_x(u_{yy} + u_{zz}) + 2\lambda_{44}[n_y u_{xy} + n_z u_{xz}] - \\ &M_{sat}H_{an}n_x^3 + 2\alpha n_x = 0,\end{aligned}\quad (2.2)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{\mathcal{W}}}{\partial n_y} &= \lambda_{11}n_y u_{yy} + 2\lambda_{12}n_y(u_{xx} + u_{zz}) + 2\lambda_{44}[n_x u_{xy} + n_z u_{yz}] - \\ &M_{sat}H_{an}n_y^3 + 2\alpha n_y = 0,\end{aligned}\quad (2.3)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{\mathcal{W}}}{\partial n_z} &= \lambda_{11}n_z u_{zz} + 2\lambda_{12}n_z(u_{yy} + u_{xx}) + 2\lambda_{44}[n_y u_{zy} + n_x u_{xz}] - \\ &M_{sat}H_{an}n_z^3 + 2\alpha n_z = 0,\end{aligned}\quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{W}}}{\partial u_{xx}} = c_{11}u_{xx} + c_{12}[u_{yy} + u_{zz}] + \frac{\lambda_{11}}{2}n_x^2 + \lambda_{12}[n_y^2 + n_z^2] = 0, \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{W}}}{\partial u_{yy}} = c_{11}u_{yy} + c_{12}[u_{xx} + u_{zz}] + \frac{\lambda_{11}}{2}n_y^2 + \lambda_{12}[n_x^2 + n_z^2] = 0, \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{W}}}{\partial u_{zz}} = c_{11}u_{zz} + c_{12}[u_{yy} + u_{xx}] + \frac{\lambda_{11}}{2}n_z^2 + \lambda_{12}[n_y^2 + n_x^2] = 0, \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{W}}}{\partial u_{xy}} = 4c_{44}u_{xy} + 2\lambda_{44}n_x n_y = 0, \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{W}}}{\partial u_{xz}} = 4c_{44}u_{xz} + 2\lambda_{44}n_x n_z = 0, \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{W}}}{\partial u_{yz}} = 4c_{44}u_{yz} + 2\lambda_{44}n_z n_y = 0, \quad (2.10)$$

Рівняння (2.8),(2.9),(2.10) дають

$$u_{xy} = -\frac{\lambda_{44}}{2c_{44}}n_x n_y, u_{xz} = -\frac{\lambda_{44}}{2c_{44}}n_x n_z, u_{yz} = -\frac{\lambda_{44}}{2c_{44}}n_z n_y, \quad (2.11)$$

Нехай жодна з компонент вектора Нееля не рівна нулю тоді рівняння (2.2),(2.3),(2.4) можуть бути переписані як

$$n_x \left(\lambda_{11}u_{xx} + 2\lambda_{12}(u_{yy} + u_{zz}) - \frac{\lambda_{44}^2}{c_{44}}[n_y^2 + n_z^2] - M_{sat}H_{an}n_x^2 + 2\alpha \right) = 0,$$

$$n_y \left(\lambda_{11}u_{yy} + 2\lambda_{12}(u_{xx} + u_{zz}) - \frac{\lambda_{44}^2}{c_{44}}[n_x^2 + n_z^2] - M_{sat}H_{an}n_y^2 + 2\alpha \right) = 0,$$

$$n_z \left(\lambda_{11}u_{zz} + 2\lambda_{12}(u_{yy} + u_{xx}) - \frac{\lambda_{44}^2}{c_{44}}[n_y^2 + n_x^2] - M_{sat}H_{an}n_z^2 + 2\alpha \right) = 0,$$

Або ж у матричній формі

$$2 \begin{pmatrix} \frac{\lambda_{11}}{2} & \lambda_{12} & \lambda_{12} \\ \lambda_{12} & \frac{\lambda_{11}}{2} & \lambda_{12} \\ \lambda_{12} & \lambda_{12} & \frac{\lambda_{11}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{xx} \\ u_{yy} \\ u_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{sat}H_{an} & \frac{\lambda_{44}^2}{c_{44}} & \frac{\lambda_{44}^2}{c_{44}} \\ \frac{\lambda_{44}^2}{c_{44}} & M_{sat}H_{an} & \frac{\lambda_{44}^2}{c_{44}} \\ \frac{\lambda_{44}^2}{c_{44}} & \frac{\lambda_{44}^2}{c_{44}} & M_{sat}H_{an} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x^2 \\ n_y^2 \\ n_z^2 \end{pmatrix} - 2\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

Рівняння (2.5),(2.6),(2.7) також можуть бути записані в матричній формі

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{xx} \\ u_{yy} \\ u_{zz} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\lambda_{11}}{2} & \lambda_{12} & \lambda_{12} \\ \lambda_{12} & \frac{\lambda_{11}}{2} & \lambda_{12} \\ \lambda_{12} & \lambda_{12} & \frac{\lambda_{11}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x^2 \\ n_y^2 \\ n_z^2 \end{pmatrix}, \quad (2.13)$$

Залежність між n_x^2, n_y^2, n_z^2 та α може бути знайдена після виключення u_{ii} з (2.12) і (2.13).

$$\begin{pmatrix} u_{xx} \\ u_{yy} \\ u_{zz} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\lambda_{11}}{2} & \lambda_{12} & \lambda_{12} \\ \lambda_{12} & \frac{\lambda_{11}}{2} & \lambda_{12} \\ \lambda_{12} & \lambda_{12} & \frac{\lambda_{11}}{2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} M_{sat}H_{an} & \frac{\lambda_{44}^2}{c_{44}} & \frac{\lambda_{44}^2}{c_{44}} \\ \frac{\lambda_{44}^2}{c_{44}} & M_{sat}H_{an} & \frac{\lambda_{44}^2}{c_{44}} \\ \frac{\lambda_{44}^2}{c_{44}} & \frac{\lambda_{44}^2}{c_{44}} & M_{sat}H_{an} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x^2 \\ n_y^2 \\ n_z^2 \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} \frac{\lambda_{11}}{2} & \lambda_{12} & \lambda_{12} \\ \lambda_{12} & \frac{\lambda_{11}}{2} & \lambda_{12} \\ \lambda_{12} & \lambda_{12} & \frac{\lambda_{11}}{2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} u_{xx} \\ u_{yy} \\ u_{zz} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\lambda_{11}}{2} & \lambda_{12} & \lambda_{12} \\ \lambda_{12} & \frac{\lambda_{11}}{2} & \lambda_{12} \\ \lambda_{12} & \lambda_{12} & \frac{\lambda_{11}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x^2 \\ n_y^2 \\ n_z^2 \end{pmatrix},$$

Порівнюючи останні два рівняння, знайдемо рівняння для n^2

$$A \begin{pmatrix} n_x^2 \\ n_y^2 \\ n_z^2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \frac{\lambda_{11}}{2} & \lambda_{12} & \lambda_{12} \\ \lambda_{12} & \frac{\lambda_{11}}{2} & \lambda_{12} \\ \lambda_{12} & \lambda_{12} & \frac{\lambda_{11}}{2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$

де

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\lambda_{11}}{2} & \lambda_{12} & \lambda_{12} \\ \lambda_{12} & \frac{\lambda_{11}}{2} & \lambda_{12} \\ \lambda_{12} & \lambda_{12} & \frac{\lambda_{11}}{2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} M_{sat}H_{an} & \frac{\lambda_{44}^2}{c_{44}} & \frac{\lambda_{44}^2}{c_{44}} \\ \frac{\lambda_{44}^2}{c_{44}} & M_{sat}H_{an} & \frac{\lambda_{44}^2}{c_{44}} \\ \frac{\lambda_{44}^2}{c_{44}} & \frac{\lambda_{44}^2}{c_{44}} & M_{sat}H_{an} \end{pmatrix} \\ + \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\lambda_{11}}{2} & \lambda_{12} & \lambda_{12} \\ \lambda_{12} & \frac{\lambda_{11}}{2} & \lambda_{12} \\ \lambda_{12} & \lambda_{12} & \frac{\lambda_{11}}{2} \end{pmatrix}$$

Отримані вирази можуть бути спрощені наступним чином

$$\begin{pmatrix} \frac{\lambda_{11}}{2} & \lambda_{12} & \lambda_{12} \\ \lambda_{12} & \frac{\lambda_{11}}{2} & \lambda_{12} \\ \lambda_{12} & \lambda_{12} & \frac{\lambda_{11}}{2} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{4}{\lambda_{11}^2 + 2\lambda_{11}\lambda_{12} - 8\lambda_{12}^2} \begin{pmatrix} \frac{\lambda_{11}}{2} + \lambda_{12} & -\lambda_{12} & -\lambda_{12} \\ -\lambda_{12} & \frac{\lambda_{11}}{2} + \lambda_{12} & -\lambda_{12} \\ -\lambda_{12} & -\lambda_{12} & \frac{\lambda_{11}}{2} + \lambda_{12} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{c_{11}^2 + c_{11}c_{12} - 2c_{12}^2} \begin{pmatrix} c_{11} + c_{12} & -c_{12} & -c_{12} \\ -c_{12} & c_{11} + c_{12} & -c_{12} \\ -c_{12} & -c_{12} & c_{11} + c_{12} \end{pmatrix},$$

Тоді будемо мати

$$A \begin{pmatrix} n_x^2 \\ n_y^2 \\ n_z^2 \end{pmatrix} = \frac{2\alpha}{\lambda_{11} + 4\lambda_{12}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Матриця A є симетричною, нехай $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$.

Тоді обернена до неї матриця є $\frac{1}{a^2 + ab - 2b^2} \begin{pmatrix} a + b & -b & -b \\ -b & a + b & -b \\ -b & -b & a + b \end{pmatrix}$.

І розв'язком системи (2.14)

$$\begin{pmatrix} n_x^2 \\ n_y^2 \\ n_z^2 \end{pmatrix} = \frac{2\alpha}{\lambda_{11} + 4\lambda_{12}} \frac{1}{a + 2b} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Використовуючи умову нормування вектора Нееля можна визначити множник Лагранжа $\alpha = \frac{(a+2b)(\lambda_{11}+4\lambda_{12})}{6}$.

Тепер визначимо a і b .

$$a = \frac{1}{c_{11}^2 + c_{11}c_{12} - 2c_{12}^2} \left(\frac{1}{2}\lambda_{11}(c_{11} + c_{12}) - 2\lambda_{12}c_{12} \right) + \frac{1}{\lambda_{11}^2 + 2\lambda_{11}\lambda_{12} - 8\lambda_{12}^2} \left(-\frac{4\lambda_{12}\lambda_{44}^2}{c_{44}} + \frac{1}{2}(2\lambda_{11} + 4\lambda_{12})H_{an}M_{sat} \right),$$

$$b = \frac{1}{c_{11}^2 + c_{11}c_{12} - 2c_{12}^2} \left(\lambda_{12}c_{11} - \frac{1}{2}\lambda_{11}c_{12} \right) + \frac{1}{\lambda_{11}^2 + 2\lambda_{11}\lambda_{12} - 8\lambda_{12}^2} \left(-2\frac{\lambda_{44}^2}{c_{44}}\lambda_{12} + \frac{1}{2}\frac{\lambda_{44}^2}{c_{44}}(2\lambda_{11} + 4\lambda_{12}) - 2\lambda_{12}H_{an}M_{sat} \right),$$

$$a + 2b = \frac{\frac{1}{2}(\lambda_{11} + 4\lambda_{12})}{c_{11} + 2c_{12}} + \frac{H_{an}M_{sat} + 2\frac{\lambda_{44}^2}{c_{44}}}{\lambda_{11} + 4\lambda_{12}}.$$

Залежність множника Лагранжа від фізичних параметрів набуває вигляду

$$\alpha = \frac{1}{12} \frac{(\lambda_{11} + 4\lambda_{12})^2}{c_{11} + 2c_{12}} + \frac{H_{an}M_{sat} + 2\frac{\lambda_{44}^2}{c_{44}}}{6}, \quad (2.15)$$

Тоді (2.14) переписується як

$$\begin{pmatrix} n_x^2 \\ n_y^2 \\ n_z^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

І екстремумами потенціалу (2.1) є

$$\begin{aligned} n_i &= \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, i = x, y, z, \\ u_{jj} &= -\frac{1}{3} \frac{2\lambda_{12} + \frac{\lambda_{11}}{2}}{c_{11} + 2c_{12}}, j = x, y, z, \\ u_{ij} &= -\frac{\lambda_{44}}{6c_{44}} \text{sign}(n_i n_j), i \neq j, \end{aligned} \quad (2.16)$$

Тепер розглянемо випадок коли хоча б одна з компонент вектора Нееля рівна нулю. Покладемо $n_x = 0$, тоді умова нормування $n_y^2 + n_z^2 = 1$ дозволяє ввести нову змінну ϑ як $n_y = \sin \vartheta, n_z = \cos \vartheta$. Густина енергії (2.1) приймає вигляд

$$\begin{aligned}
\mathcal{W} = & \frac{1}{2}c_{11}(u_{xx}^2 + u_{yy}^2 + u_{zz}^2) + c_{12}(u_{xx}u_{yy} + u_{zz}u_{yy} + u_{xx}u_{zz}) + \\
& 2c_{44}(u_{xy}^2 + u_{yz}^2 + u_{zx}^2) + \frac{\lambda_{11}}{2}(u_{yy}\sin^2\vartheta + u_{zz}\cos^2\vartheta) + \quad (2.17) \\
& \lambda_{12}(\sin^2\vartheta(u_{xx} + u_{zz}) + \cos^2\vartheta(u_{xx} + u_{yy})) + \\
& \lambda_{44}u_{yz}\sin 2\vartheta + \frac{1}{8}M_{sat}H_{an}\sin^2 2\vartheta,
\end{aligned}$$

Точка екстремуму (2.17) задовольняє наступним рівнянням

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial u_{xx}} = c_{11}u_{xx} + c_{12}[u_{yy} + u_{zz}] + \lambda_{12} = 0, \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial u_{yy}} = c_{11}u_{yy} + c_{12}[u_{xx} + u_{zz}] + \frac{\lambda_{11}}{2}\sin^2\vartheta + \lambda_{12}\cos^2\vartheta = 0, \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial u_{zz}} = c_{11}u_{zz} + c_{12}[u_{yy} + u_{xx}] + \frac{\lambda_{11}}{2}\cos^2\vartheta + \lambda_{12}\sin^2\vartheta = 0, \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial u_{xy}} = 4c_{44}u_{xy} = 0, \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial u_{xz}} = 4c_{44}u_{xz} = 0, \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial u_{yz}} = 4c_{44}u_{yz} + \lambda_{44}\sin 2\vartheta = 0, \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \vartheta} = & \sin 2\vartheta(u_{yy} - u_{zz})\left(\frac{\lambda_{11}}{2} - \lambda_{12}\right) + 2\lambda_{44}u_{yz}\cos 2\vartheta + \\
& \frac{1}{4}M_{sat}H_{an}\sin 2\vartheta\cos 2\vartheta = 0, \quad (2.24)
\end{aligned}$$

З рівнянь (2.21),(2.22),(2.23) слідує

$$u_{xy} = u_{xz} = 0, u_{yz} = -\frac{\lambda_{44}}{4c_{44}}\sin 2\vartheta,$$

Рівняння (2.18)-(2.20) можуть бути записані у матричній формі

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{xx} \\ u_{yy} \\ u_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda_{12} \\ -\frac{\lambda_{11}}{2}\sin^2\vartheta - \lambda_{12}\cos^2\vartheta \\ -\frac{\lambda_{11}}{2}\cos^2\vartheta - \lambda_{12}\sin^2\vartheta \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} u_{xx} \\ u_{yy} \\ u_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -\lambda_{12} \\ -\frac{\lambda_{11}}{2} \sin^2 \vartheta - \lambda_{12} \cos^2 \vartheta \\ -\frac{\lambda_{11}}{2} \cos^2 \vartheta - \lambda_{12} \sin^2 \vartheta \end{pmatrix}, \quad (2.25)$$

З (2.25) можна отримати $u_{yy} - u_{zz} = \frac{\frac{\lambda_{11}}{2} - \lambda_{12}}{c_{11} - c_{12}} \cos 2\vartheta$ і тоді (2.24) набуде вигляду

$$\sin 4\vartheta \left(\frac{\left(\frac{\lambda_{11}}{2} - \lambda_{12}\right)^2}{c_{11} - c_{12}} - \frac{\lambda_{44}^2}{2c_{44}} + \frac{1}{4} M_{sat} H_{an} \right) = 0,$$

Оскільки $\vartheta \in [0, 2\pi)$ то маємо $\vartheta_{cr} = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}$, за умови $\left(\frac{\left(\frac{\lambda_{11}}{2} - \lambda_{12}\right)^2}{c_{11} - c_{12}} - \frac{\lambda_{44}^2}{2c_{44}} + \frac{1}{4} M_{sat} H_{an} \right) \neq 0$, яка виконується і у випадку пружної та МП ізотропій. Беручи до уваги розрахунки проведені для колінеарного АФ без урахувань пружності (Додаток А), можна бачити, що і у випадку сильного МП зв'язку екстремумам густини енергії (2.1) відповідають ті ж самі критичні значення вектора Нееля. Розглянемо екстремум $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ більш детально. Відповідні критичні значення компонент тензора деформації є

$$\begin{pmatrix} u_x^0 \\ u_{yy}^0 \\ u_{zz}^0 \end{pmatrix} = \frac{1}{c_{11}^2 + c_{11}c_{12} - 2c_{12}^2} \begin{pmatrix} -c_{11}\lambda_{12} + \frac{\lambda_{11}}{2}c_{12} \\ -c_{11}\lambda_{12} + \frac{\lambda_{11}}{2}c_{12} \\ 2c_{12}\lambda_{12} - \frac{\lambda_{11}}{2}(c_{11} + c_{12}) \end{pmatrix}, \quad u_{ij}^0 = 0, i \neq j,$$

Розкладемо потенціал (2.1) навколо цієї точки в ряд Телора з точністю до квадратичних відхилень і одразу перепозначимо ці відхилення як нові змінні

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_0 = & \frac{1}{2}c_{11} (u_{xx}^2 + u_{yy}^2 + u_{zz}^2) + c_{12} (u_{xx}u_{yy} + u_{xx}u_{zz} + u_{yy}u_{zz}) + \\ & 2c_{44} (u_{xy}^2 + u_{yz}^2 + u_{zx}^2) + 2\lambda_{44} (n_y u_{yz} + n_x u_{xz}) + \\ & \frac{1}{2} \left[\frac{2\left(\frac{\lambda_{11}}{2} - \lambda_{12}\right)^2}{c_{11} - c_{12}} + M_{sat} H_{an} \right] (n_x^2 + n_y^2), \end{aligned} \quad (2.26)$$

Як неважко бачити з (2.26), із додатності $c_{11}, c_{44}, \frac{2\left(\frac{\lambda_{11}}{2} - \lambda_{12}\right)^2}{c_{11} - c_{12}} + M_{sat} H_{an}$ випливає додатність даної квадратичної форми, тобто точка $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ є мінімумом (2.1).

Отримання рівнянь руху

Надалі розглянемо рух у потенціалі (2.26), густина функції Лагранжа задається як

$$\mathcal{L} = \frac{M_{sat}}{2\gamma^2 H_{ex}} \left((\dot{\mathbf{n}} \times \mathbf{n})^2 - c^2 (\partial_j \mathbf{n} \times \mathbf{n})^2 \right) + \frac{1}{2} \rho \dot{\mathbf{u}}^2 - \mathcal{W}, \quad (2.27)$$

де H_{ex} – обмінне поле, γ – гіромагнітне відношення, c – швидкість магنونів у АФ, ρ – густина АФ.

У випадку малих відхилень від стану рівноваги, Лагранжіан (2.27) запишеться як

$$\mathcal{L} = \frac{M_{sat}}{2\gamma^2 H_{ex}} \left(\dot{n}_x^2 + \dot{n}_y^2 - c^2 \left((\partial_j n_x)^2 + (\partial_j n_y)^2 \right) \right) + \frac{1}{2} \rho \dot{\mathbf{u}}^2 - \mathcal{W}_0, \quad (2.28)$$

Густина функції Релея має вигляд

$$\mathcal{R} = \frac{\alpha_G M_{sat}}{2\gamma} (\dot{\mathbf{n}} \times \mathbf{n})^2 - M_{sat} H_{curr} \mathbf{s} \cdot \dot{\mathbf{n}} \times \mathbf{n} + \gamma_{elas} \rho \dot{\mathbf{u}}^2 - \beta H_{curr} \mathbf{s} \cdot \dot{\mathbf{u}} \times \mathbf{u}, \quad (2.29)$$

де α_G – константа згасання Гільберта, H_{curr} – магнітне поле пов'язане з протіканням спінового струму, \mathbf{s} – одиничний вектор напрямку поляризації спінового струму, γ_{elas} – константа згасання в пружній підсистемі, β – константа, що характеризує частину спіну переданого ґратці.

У випадку малих відхилень маємо

$$\begin{aligned} \mathcal{R} = & \frac{\alpha_G M_{sat}}{2\gamma} (\dot{n}_x^2 + \dot{n}_y^2) + \gamma_{elas} \rho \dot{\mathbf{u}}^2 - \\ & M_{sat} H_{curr} (s_x \dot{n}_y - s_y \dot{n}_x + s_z \dot{n}_x n_y - s_z \dot{n}_y n_x) - \\ & \beta H_{curr} (s_x \dot{u}_y u_z - s_x \dot{u}_z u_y + s_y \dot{u}_z u_x - s_y \dot{u}_x u_z + s_z \dot{u}_x u_y - s_z \dot{u}_y u_x), \end{aligned} \quad (2.30)$$

В Додатку Б виводяться рівняння руху для випадку коли узагальнені координати залежать не тільки від часу, а й від просторових координат $q = q(t, \mathbf{r})$. Для μ -тої узагальненої координати динамічне рівняння має вигляд

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\mu} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_\mu} + \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu q_\mu)} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{q}_\mu} = 0, \quad (2.31)$$

Для простоти вважаємо, що спіновий струм додатково не розсіюється на ґратці, а повністю передається магнітній підсистемі, тобто $\beta = 0$. Тоді з

(2.30) маємо, що істотною є тільки z -ва компонента поляризації спінового струму, тому покладемо $s_z = 1$. Позначимо частоту коливань магнітної підсистеми як $\omega_0^2 = \frac{2\gamma^2 H_E (\frac{\lambda_{11}}{2} - \lambda_{12})^2}{M_{sat}(c_{11} - c_{12})} + \gamma^2 H_E H_{an}$, використовуючи (2.31) ми отримаємо наступні рівняння руху

$$\ddot{n}_x - c^2 \Delta n_x + \omega_0^2 n_x + \alpha_G \gamma H_E \dot{n}_x - \gamma^2 H_E H_{curr} n_y + \frac{\lambda_{44} \gamma^2 H_E}{M_{sat}} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = 0, \quad (2.32)$$

$$\ddot{n}_y - c^2 \Delta n_y + \omega_0^2 n_y + \alpha_G \gamma H_E \dot{n}_y + \gamma^2 H_E H_{curr} n_x + \frac{\lambda_{44} \gamma^2 H_E}{M_{sat}} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) = 0, \quad (2.33)$$

$$\ddot{u}_x - \frac{c_{11}}{\rho} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} - \frac{c_{12}}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z} \right) + 2\gamma_{elas} \dot{u}_x - \frac{c_{44}}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z} \right) - \frac{\lambda_{44}}{\rho} \frac{\partial n_x}{\partial z} = 0, \quad (2.34)$$

$$\ddot{u}_y - \frac{c_{11}}{\rho} \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} - \frac{c_{12}}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y \partial z} \right) + 2\gamma_{elas} \dot{u}_y - \frac{c_{44}}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y \partial z} \right) - \frac{\lambda_{44}}{\rho} \frac{\partial n_y}{\partial z} = 0, \quad (2.35)$$

$$\ddot{u}_z - \frac{c_{11}}{\rho} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - \frac{c_{12}}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial z} \right) + 2\gamma_{elas} \dot{u}_z - \frac{c_{44}}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial z} \right) - \frac{\lambda_{44}}{\rho} \left(\frac{\partial n_x}{\partial x} + \frac{\partial n_y}{\partial y} \right) = 0, \quad (2.36)$$

У загальному випадку рівняння руху (2.32)-(2.36) досить складні, тому розглянемо наступну модель. Тонка нанопроволока АФ товщиною d оточена з двох боків немагнітним матеріалом (НМ) рис. 2.2А. Перша і третя області відповідають НМ, їх стан описується векторами зміщення $\mathbf{u}^{(1)}$ та $\mathbf{u}^{(3)}$ відповідно. В другій області змінними є вектор Нееля \mathbf{n} і вектор зміщення $\mathbf{u}^{(2)}$.

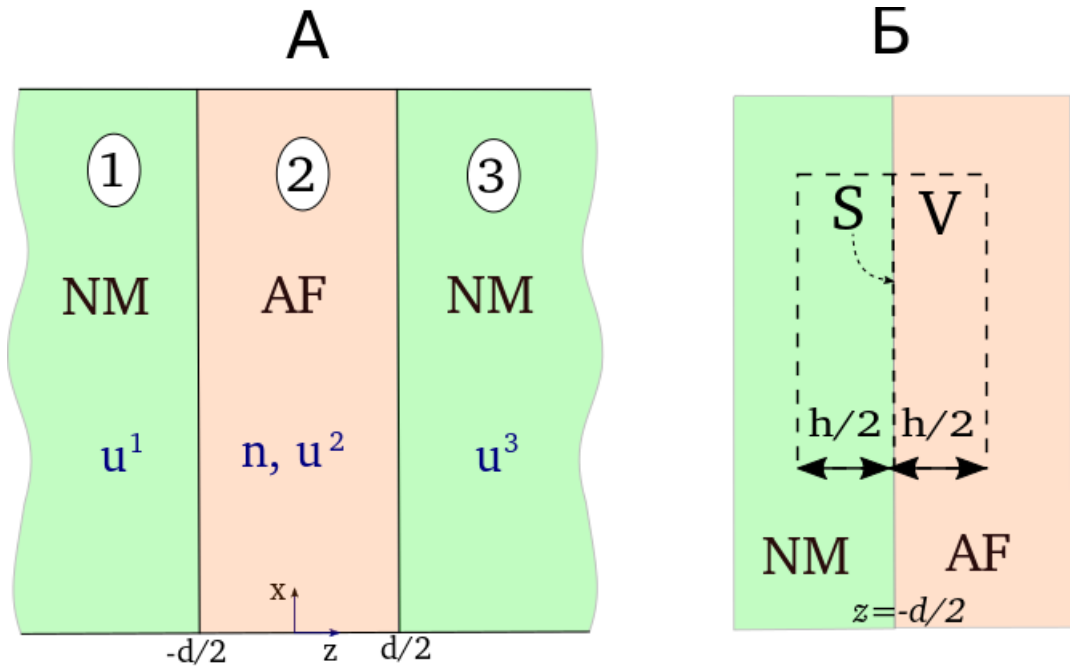


Рисунок 2.2 — А. Геометрія розташування зразку: тонка АФ плівка товщиною d оточена НМ матеріалом. Показані узагальнені координати для кожної з областей. Б. Показано об'єм інтегрування $V = Sh$ на межі АФ-НМ для отримання граничних умов. Для прикладу розглянуто $z = -d/2$.

Будемо розглядати хвилю, що розповсюджується перпендикулярно площині плівки, тобто з хвильовим вектором $\mathbf{k} = (0, 0, k)$. Тоді рівняння для областей 1,3 набудуть форми

$$\ddot{u}_x^{(1),(3)} + 2\gamma_{elas}^{(1),(3)}\dot{u}_x^{(1),(3)} - \frac{c_{44}^{(1),(3)}}{\rho^{(1),(3)}}\frac{\partial^2 u_x^{(1),(3)}}{\partial z^2} = 0, \quad (2.37)$$

$$\ddot{u}_y^{(1),(3)} + 2\gamma_{elas}^{(1),(3)}\dot{u}_y^{(1),(3)} - \frac{c_{44}^{(1),(3)}}{\rho^{(1),(3)}}\frac{\partial^2 u_y^{(1),(3)}}{\partial z^2} = 0, \quad (2.38)$$

$$\ddot{u}_z^{(1),(3)} + 2\gamma_{elas}^{(1),(3)}\dot{u}_z^{(1),(3)} - \frac{c_{11}^{(1),(3)}}{\rho^{(1),(3)}}\frac{\partial^2 u_z^{(1),(3)}}{\partial z^2} = 0, \quad (2.39)$$

Рівняння для області 2 набудуть форми

$$\ddot{n}_x - c^2 \frac{\partial^2 n_x}{\partial z^2} + \omega_0^2 n_x + \alpha_G \gamma H_E \dot{n}_x - \gamma^2 H_E H_{curr} n_y + \frac{\lambda_{44} \gamma^2 H_E}{M_{sat}} \frac{\partial u_x^{(2)}}{\partial z} = 0, \quad (2.40)$$

$$\ddot{n}_y - c^2 \frac{\partial^2 n_y}{\partial z^2} + \omega_0^2 n_y + \alpha_G \gamma H_E \dot{n}_y + \gamma^2 H_E H_{curr} n_x + \frac{\lambda_{44} \gamma^2 H_E}{M_{sat}} \frac{\partial u_y^{(2)}}{\partial z} = 0, \quad (2.41)$$

$$\ddot{u}_x^{(2)} + 2\gamma_{elas}^{(2)} \dot{u}_x^{(2)} - \frac{c_{44}^{(2)}}{\rho^{(2)}} \frac{\partial^2 u_x^{(2)}}{\partial z^2} - \frac{\lambda_{44}}{\rho^{(2)}} \frac{\partial n_x}{\partial z} = 0, \quad (2.42)$$

$$\ddot{u}_y^{(2)} + 2\gamma_{elas}^{(2)} \dot{u}_y^{(2)} - \frac{c_{44}^{(2)}}{\rho^{(2)}} \frac{\partial^2 u_y^{(2)}}{\partial z^2} - \frac{\lambda_{44}}{\rho^{(2)}} \frac{\partial n_y}{\partial z} = 0, \quad (2.43)$$

$$\ddot{u}_z^{(2)} - \frac{c_{11}^{(2)}}{\rho^{(2)}} \frac{\partial^2 u_z^{(2)}}{\partial z^2} + 2\gamma_{elas}^{(2)} \dot{u}_z^{(2)} = 0, \quad (2.44)$$

Розглянемо рівняння руху (2.37)-(2.44) за відсутності дисипацій та спінового струму: $\gamma_{elas}^{(1),(2),(3)} = 0$, $\alpha_G = 0$, $H_{curr} = 0$. Для отримання граничних умов з рівнянь (2.40), (2.41) проінтегруємо їх по об'єму, який вказан на рис. 2.2Б. В границі $h \rightarrow 0$ отримаємо наступні граничні умови

$$\left(c^2 \frac{\partial n_x}{\partial z} - \lambda u_x^{(2)} \right) \Big|_{z=\pm \frac{d}{2}} = 0, \quad (2.45)$$

$$\left(c^2 \frac{\partial n_y}{\partial z} - \lambda u_y^{(2)} \right) \Big|_{z=\pm \frac{d}{2}} = 0, \quad (2.46)$$

де $\lambda = \frac{\lambda_{44} \gamma^2 H_E}{M_{sat}}$.

В теорії поля широко відоме рівняння Коші, яке є загальною формою рівнянь руху та має вигляд [20]

$$\rho \dot{\mathbf{v}} = \rho \mathbf{F} + \nabla \cdot \hat{T}, \quad (2.47)$$

де ρ – густина речовини, \mathbf{v} – швидкість, \mathbf{F} – зовнішня сила на одиницю маси речовини, \hat{T} – тензор напружень. Отримані рівняння руху теж можна переписати в цій загальній формі, ввівши відповідним чином силу та тензор \hat{T} в кожній області

$$\mathbf{F}^{(1),(3)} = \mathbf{F}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{T}^{(1),(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ c_{44}^{(1),(3)} \frac{\partial u_x^{(1),(3)}}{\partial z} & c_{44}^{(1),(3)} \frac{\partial u_y^{(1),(3)}}{\partial z} & c_{11}^{(1),(3)} \frac{\partial u_z^{(1),(3)}}{\partial z} \end{pmatrix},$$

$$\hat{T}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ c_{44}^{(2)} \frac{\partial u_x^{(2)}}{\partial z} + \lambda_{44} n_x & c_{44}^{(2)} \frac{\partial u_y^{(2)}}{\partial z} + \lambda_{44} n_y & c_{11} \frac{\partial u_z^{(2)}}{\partial z} \end{pmatrix},$$

З умови неперервності тензора напружень на границях АФ, отримаємо граничні умови

$$\left(v^{(2)2} \frac{\partial u_x^{(2)}}{\partial z} - \frac{\lambda_{44}}{\rho^{(2)}} n_x \right) \Big|_{z=-\frac{d}{2}} = v^{(1)2} \frac{\partial u_x^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=-\frac{d}{2}}, \quad (2.48)$$

$$\left(v^{(2)2} \frac{\partial u_y^{(2)}}{\partial z} - \frac{\lambda_{44}}{\rho^{(2)}} n_y \right) \Big|_{z=-\frac{d}{2}} = v^{(1)2} \frac{\partial u_y^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=-\frac{d}{2}}, \quad (2.49)$$

$$\left(v^{(2)2} \frac{\partial u_x^{(2)}}{\partial z} - \frac{\lambda_{44}}{\rho^{(2)}} n_x \right) \Big|_{z=\frac{d}{2}} = v^{(3)2} \frac{\partial u_x^{(3)}}{\partial z} \Big|_{z=\frac{d}{2}}, \quad (2.50)$$

$$\left(v^{(2)2} \frac{\partial u_y^{(2)}}{\partial z} - \frac{\lambda_{44}}{\rho^{(2)}} n_y \right) \Big|_{z=\frac{d}{2}} = v^{(3)2} \frac{\partial u_y^{(3)}}{\partial z} \Big|_{z=\frac{d}{2}}, \quad (2.51)$$

$$\left(\frac{\partial u_z^{(2)}}{\partial z} \right) \Big|_{z=\pm\frac{d}{2}} = \left(\frac{\partial u_z^{(1),(3)}}{\partial z} \right) \Big|_{z=\pm\frac{d}{2}}, \quad (2.52)$$

де $v^{(1),(2),(3)} = \sqrt{\frac{c_{44}^{(1),(2),(3)}}{\rho^{(1),(2),(3)}}}$ – групова швидкість фононів. Рівняння руху (2.40)–(2.43) зв’язані між собою і тому вони представляють інтерес при дослідженні МП коливань. Поки що обчислимо рівняння (2.39), (2.44) та граничну умову для них (2.52). Для простоти запису введемо нові змінні $n = n_x + in_y$, $u^{(j)} = u_x^{(j)} + iu_y^{(j)}$, $j = 1, 2, 3$. Тоді рівняння руху для областей 1,3 перепишуться як

$$\ddot{u}^{(1),(3)} + 2\gamma_{elas}^{(1),(3)} \dot{u}^{(1),(3)} - v^{(1),(3)2} \frac{\partial^2 u^{(1),(3)}}{\partial z^2} = 0, \quad (2.53)$$

для області 2

$$\ddot{n} - c^2 \frac{\partial^2 n}{\partial z^2} + \omega_0^2 n + \alpha_G \gamma H_E \dot{n} + i \gamma^2 H_E H_{curr} n + \lambda \frac{\partial u^{(2)}}{\partial z} = 0, \quad (2.54)$$

$$\ddot{u}^{(2)} + 2\gamma_{elas}^{(2)} \dot{u}^{(2)} - v^{(2)2} \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial z^2} - \frac{\lambda_{44}}{\rho^{(2)}} \frac{\partial n}{\partial z} = 0, \quad (2.55)$$

Граничні умови (2.45),(2.46),(2.48)-(2.51) переписуться як

$$\left(c^2 \frac{\partial n}{\partial z} - \lambda u^{(2)} \right) \Big|_{z=\pm \frac{d}{2}} = 0, \quad (2.56)$$

$$\left(v^{(2)2} \frac{\partial u^{(2)}}{\partial z} - \frac{\lambda_{44}}{\rho^{(2)}} n \right) \Big|_{z=-\frac{d}{2}} = v^{(1)2} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial z} \Big|_{z=-\frac{d}{2}}, \quad (2.57)$$

$$\left(v^{(2)2} \frac{\partial u^{(2)}}{\partial z} - \frac{\lambda_{44}}{\rho^{(2)}} n \right) \Big|_{z=\frac{d}{2}} = v^{(3)2} \frac{\partial u^{(2)}}{\partial z} \Big|_{z=\frac{d}{2}}. \quad (2.58)$$

Дисперсійні співвідношення

Вважатимемо НМ навколо АФ дроту однаковим. Для отримання дисперсійних співвідношень розв'язок рівнянь руху (2.53)-(2.55) шукаємо у вигляді монохроматичної хвилі

$$\begin{cases} n = A e^{-i\omega t} \cos(kz), \\ u^{(2)} = B e^{-i\omega t} \sin(kz), \\ u^{(1),(3)} = e^{-i\omega t} (C \cos(\kappa z) + D \sin(\kappa z)), \end{cases} \quad (2.59)$$

після підстановки анзацу (2.59) у відповідні рівняння руху отримаємо

$$-A\omega^2 + Ac^2 k^2 + \omega_0^2 A + B\lambda k = 0,$$

$$-B\omega^2 + Bv^{(2)2} k^2 + A \frac{\lambda_{44}}{\rho^{(2)}} k = 0,$$

$$-\omega^2 + v^{(1)2} \kappa^2 = 0,$$

Останнє рівняння дозволяє отримати дисперсійне співвідношення в НМ $\omega^2 = (v^{(1)})^2 \kappa^2$. В нетривіальному випадку $A \neq 0, B \neq 0$ маємо умову

$$\det \begin{pmatrix} -\omega^2 + c^2 k^2 + \omega_0^2 & \lambda k \\ \frac{\lambda_{44}}{\rho^{(2)}} k & -\omega^2 + v^{(2)2} k^2 \end{pmatrix} = 0,$$

Позначимо $\Omega = \omega^2$ і дисперсійне рівняння набуде вигляду

$$(-\Omega + c^2 k^2 + \omega_0^2) (-\Omega + v^{(2)2} k^2) - \frac{\lambda_{44}}{\rho^{(2)}} \lambda k^2 = 0,$$

$$\Omega^2 - \Omega (c^2 k^2 + \omega_0^2 + v^{(2)2} k^2) + v^{(2)2} k^2 (c^2 k^2 + \omega_0^2) - \frac{\lambda_{44}}{\rho^{(2)}} \lambda k^2 = 0, \quad (2.60)$$

Розв'язком дисперсійного рівняння (2.60) є дисперсійне співвідношення

$$\begin{aligned} \Omega_{\pm} = & \frac{1}{2} (c^2 k^2 + \omega_0^2 + v^{(2)2} k^2) \pm \\ & \frac{1}{2} \sqrt{(c^2 k^2 + \omega_0^2 + v^{(2)2} k^2)^2 - 4 \left(v^{(2)2} k^2 (c^2 k^2 + \omega_0^2) - \frac{\lambda_{44}}{\rho^{(2)}} \lambda k^2 \right)} \end{aligned} \quad (2.61)$$

Для розуміння фізики знаків “+” та “-” в (2.61) ми спростимо цю формулу вважаючи, що параметр λ_{44} малий.

$$\begin{aligned} \Omega_{\pm} = & \frac{1}{2} (c^2 k^2 + \omega_0^2 + v^{(2)2} k^2) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(c^2 k^2 + \omega_0^2 - v^{(2)2} k^2)^2 + 4 \frac{\lambda_{44}}{\rho^{(2)}} \lambda k^2} = \\ & \frac{1}{2} (c^2 k^2 + \omega_0^2 + v^{(2)2} k^2) \pm \\ & \frac{1}{2} (c^2 k^2 + \omega_0^2 - v^{(2)2} k^2) \sqrt{1 + 4 \frac{\lambda_{44}}{\rho^{(2)}} \lambda k^2 (c^2 k^2 + \omega_0^2 - v^{(2)2} k^2)^{-2}} \approx \\ & \frac{1}{2} (c^2 k^2 + \omega_0^2 + v^{(2)2} k^2) \pm \\ & \frac{1}{2} (c^2 k^2 + \omega_0^2 - v^{(2)2} k^2) \left(1 + 2 \frac{\lambda_{44}}{\rho^{(2)}} \lambda k^2 (c^2 k^2 + \omega_0^2 - v^{(2)2} k^2)^{-2} \right), \end{aligned}$$

Таким чином маємо

$$\Omega_+ = c^2 k^2 + \omega_0^2 + \frac{\lambda_{44}}{\rho^{(2)}} \lambda k^2 (c^2 k^2 + \omega_0^2 - v^{(2)2} k^2)^{-1}, \quad (2.62)$$

$$\Omega_- = v^{(2)2} k^2 - \frac{\lambda_{44}}{\rho^{(2)}} \lambda k^2 (c^2 k^2 + \omega_0^2 - v^{(2)2} k^2)^{-1}, \quad (2.63)$$

Дисперсійні співвідношення (2.62), (2.63) описують МП та ПМ хвилі в АФ при малому λ_{44} відповідно. Дисперсійні співвідношення (2.61) можна

переписати у більш компактному вигляді, яке легше проаналізувати

$$\left(\frac{\omega_{\pm}}{\omega_0}\right)^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \delta_{\pm} k^2 \pm \sqrt{(1 - \delta_{-} k^2)^2 + \zeta k^2}\right), \quad (2.64)$$

$$\text{де } \delta_{\pm} = \frac{v^{(2)^2}}{\omega_0^2} \left(1 \pm \left(\frac{c}{v}\right)^2\right), \zeta = \frac{4\lambda_{44}\lambda}{\rho^{(2)}\omega_0^4},.$$

Для випадку високотемпературного антиферромагнетизму ($v^{(2)} > c$), дисперсійні співвідношення (2.64) показані на рис. 2.3. Як можна бачити з рівняння (2.64) параметр, що враховує МП взаємодію ζ має однакову розмірність з δ_{\pm} , таким чином можна встановити наступний критерій мализни параметру λ_{44} , що набуває вигляду $\zeta < \delta_{-}$.

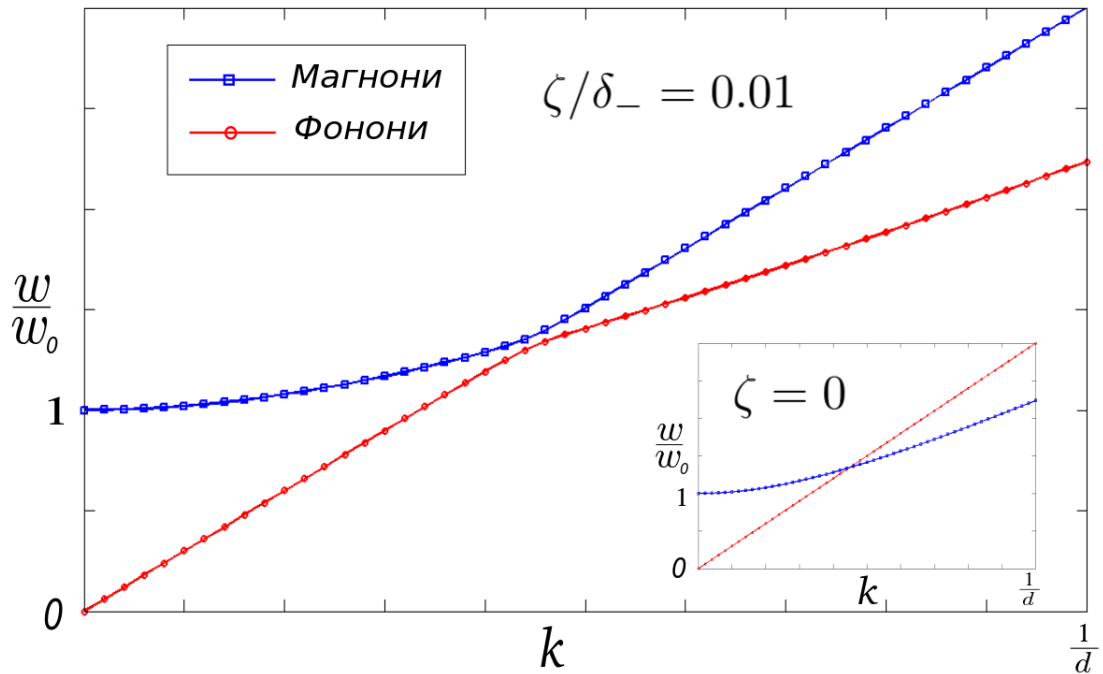


Рисунок 2.3 — Залежність нормованої частоти від хвильового вектора для МП (сині) та ПМ (червоні) коливань для малого параметру зв'язку. На вставці те ж саме при відсутності МП взаємодії. Для побудови взято $c/v^{(2)} = 2/3$.

Анзац (2.59) дозволяє отримати співвідношення між амплітудами магноної A_m, B_m та фононої A_{ph}, B_{ph} хвиль в АФ

$$\begin{cases} A_m = \frac{\lambda k}{\omega_+^2 - \omega_0^2 - c^2 k^2} B_m, \\ A_{ph} = \frac{\lambda k}{\omega_-^2 - \omega_0^2 - c^2 k^2} B_{ph}, \end{cases} \quad (2.65)$$

Оскільки надалі нас більше цікавлять МП коливання, розглядається магнонна мода, якій відповідає частота ω_+ . Граничні умови (2.56)-(2.58) та умови неперервності зміщень $u^{(1)}\left(-\frac{d}{2}\right) = u^{(2)}\left(-\frac{d}{2}\right)$, $u^{(2)}\left(\frac{d}{2}\right) = u^{(3)}\left(\frac{d}{2}\right)$ дозволяють отримати зв'язок між амплітудами хвиль в аназці (2.59) та закон квантування хвиль

$$\begin{aligned}
 C &= -B_m \frac{k^2 c^2}{\omega_+^2 - \omega_0^2 - c^2 k^2} \sin \frac{kd}{2} \cos \frac{\kappa d}{2} + \\
 &B_m \left(\frac{(v^{(2)})^2 k}{(v^{(1)})^2 \kappa} - \frac{\lambda_{44}}{\rho (v^{(1)})^2 \kappa} \frac{\lambda k}{\omega_+^2 - \omega_0^2 - c^2 k^2} \right) \cos \frac{kd}{2} \sin \frac{\kappa d}{2}, \\
 D &= B_m \left(\frac{(v^{(2)})^2 k}{(v^{(1)})^2 \kappa} - \frac{\lambda_{44}}{\rho (v^{(1)})^2 \kappa} \frac{\lambda k}{\omega_+^2 - \omega_0^2 - c^2 k^2} \right) \cos \frac{kd}{2} \cos \frac{\kappa d}{2} + \\
 &B_m \frac{k^2 c^2}{\omega_+^2 - \omega_0^2 - c^2 k^2} \sin \frac{kd}{2} \sin \frac{\kappa d}{2}, \\
 \left[1 + \frac{k^2 c^2}{\omega_+^2 - \omega_0^2 - c^2 k^2} \cos \left(\frac{k+\kappa}{2} d \right) \right] \tan \frac{kd}{2} &= \\
 \left[\frac{(v^{(2)})^2 k}{(v^{(1)})^2 \kappa} - \frac{\lambda_{44}}{\rho (v^{(1)})^2 \kappa} \frac{\lambda k}{\omega_+^2 - \omega_0^2 - c^2 k^2} \right] \sin \kappa d. & \quad (2.66)
 \end{aligned}$$

Висновки

Дослідження густини енергії кубічного колінеарного АФ з врахуванням МП взаємодії (деформації вважаються фіксованими) показало наявність шістьох стійких станів (математично які є рівноправними). В даному розділі більш детально розглянуто стан $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$. Для малих коливань навколо рівноважного стану на основі варіаційного методу отримано рівняння руху в АФ які включають в себе МП взаємодію, згасання енергії в магнітній і пружній підсистемах та накачку енергії в систему за допомогою спінового струму.

Для конкретної геометрії розташування АФ зразку (нанопроволоки) на основі рівнянь руху отримано дисперсійні співвідношення та граничні умови. Сумісне співставлення обох проміжних результатів дозвоило отримати закон квантування МП частот (2.66).

Для випадку коли найменша можлива частота коливань МП хвиль співпадає з частотою, що дається перетином фононної та магнонної гілок дисперсійних кривих (за відсутності МП зв'язку), отримано також закон квантування, який встановлює зв'язок між усіма параметрами системи (за виключенням дисипацій та спінового струму, які зараз тут не розглядалися). У подальшому дослідженні динаміки системи саме ця частота відповідатиме біфуркаційним значенням фізично важливих параметрів задачі.

Розділ 3

Дослідження динаміки в присутності спіна поляризованого струму

Вступ

В розділі досліджуються особливості динаміки кубічного АФ з урахуванням МП зв'язку. Лінійні динамічні рівняння (2.54), (2.55) розглядаються для різних граничних випадків. У випадку малих коефіцієнтів тертя та МП зв'язку обраховано мінімальний критичний спіновий струм який виводить систему із стану рівноваги. Згідно з загальною теорією при цьому значенні струму має народжуватись стійкий цикл (на фазовому просторі).

Всі результати в розділі стосуються АФ, тобто області (2), і тому індекс (2) в рівняннях для зручності не пишеться. Результати справедливі для нескінченного АФ зразку.

Аналітичні результати отримуються для випадку малого коефіцієнту МП зв'язку та малих згасаннях в магнітній та пружній підсистемах.

Граничні випадки

Дисперсійне рівняння в загальному випадку

Шукаючи розв'язок рівнянь руху (2.54), (2.55) у вигляді монохроматичних хвиль $n, u \sim e^{i(\omega t - kz)}$, можна отримати систему рівнянь

$$\begin{cases} (-\omega^2 + c^2 k^2 + \omega_0^2 + i\omega\alpha_G\gamma H_E + i\gamma^2 H_E H_{curr}) n_a - ik \frac{\lambda_{44}\gamma^2 H_E}{M_{sat}} u_a = 0, \\ \left(-\omega^2 + \frac{c_{44}}{\rho} k^2 + 2i\omega\gamma_{elas}\right) u_a + ik \frac{\lambda_{44}}{\rho} n_a = 0, \end{cases}$$

яка має нетривіальний розв'язок $n_a \neq 0$, $u_a \neq 0$ при умові

$$\begin{vmatrix} -\omega^2 + c^2 k^2 + \omega_0^2 + i\omega\alpha_G\gamma H_E + i\gamma^2 H_E H_{curr} & -ik\frac{\lambda_{44}\gamma^2 H_E}{M_{sat}} \\ ik\frac{\lambda_{44}}{\rho} & -\omega^2 + \frac{c_{44}}{\rho}k^2 + 2i\omega\gamma_{elas} \end{vmatrix} = 0 \quad (3.1)$$

МП зв'язок відсутній

У випадку відсутності МП зв'язку $\lambda_{44} = 0$ дисперсійне рівняння (3.1) дає

$$-\omega^2 + c^2 k^2 + \omega_0^2 + i\omega\alpha_G\gamma H_E + i\gamma^2 H_E H_{curr} = 0, \quad (3.2)$$

Розв'язки (3.2) знаходяться як для звичайного квадратного рівняння

$$\begin{aligned} \omega_{\pm} &= \frac{i\alpha_G\gamma H_E}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{4(c^2 k^2 + \omega_0^2 + i\gamma^2 H_E H_{curr}) - (\alpha_G\gamma H_E)^2} \\ &= i\gamma_{eff} \pm \sqrt{c^2 k^2 + \omega_0^2 + is - \gamma_{ef}^2} \\ &= i\gamma_{ef} \pm \sqrt{\left(c^2 k^2 + \omega_0^2 - \gamma_{ef}^2\right)^2 + s^2} e^{\frac{i}{2} \arctan \frac{s}{c^2 k^2 + \omega_0^2 - \gamma_{ef}^2}}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

де $\gamma_{ef} = \frac{1}{2}\alpha_G\gamma H_E$, $s = \gamma^2 H_E H_{curr}$.

Можна переписати (3.3) як

$$\begin{aligned} \omega_{\pm} &= \pm \sqrt{\left(c^2 k^2 + \omega_0^2 - \gamma_{ef}^2\right)^2 + s^2} \cos \left[\frac{1}{2} \arctan \frac{s}{c^2 k^2 + \omega_0^2 - \gamma_{ef}^2} \right] \\ &+ i \left(\gamma_{ef} \pm \sqrt{\left(c^2 k^2 + \omega_0^2 - \gamma_{ef}^2\right)^2 + s^2} \sin \left[\frac{1}{2} \arctan \frac{s}{c^2 k^2 + \omega_0^2 - \gamma_{ef}^2} \right] \right), \end{aligned}$$

Використовуючи формули

$$\sin \frac{\xi}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \xi}{2}}, \quad \cos \frac{\xi}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \xi}{2}}, \quad \cos [\arctan \zeta] = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta^2}},$$

отримаємо

$$\begin{aligned} \omega_{\pm} &= \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{\left(c^2 k^2 + \omega_0^2 - \gamma_{ef}^2\right)^2 + s^2} + c^2 k^2 + \omega_0^2 - \gamma_{ef}^2} \\ &+ i \left(\gamma_{ef} \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{\left(c^2 k^2 + \omega_0^2 - \gamma_{ef}^2\right)^2 + s^2} - \left(c^2 k^2 + \omega_0^2 - \gamma_{ef}^2\right)} \right), \end{aligned} \quad (3.4)$$

Знайдемо такий критичний струм s^{cr} , при якому уявна частина частоти (3.4) стає рівною нулеві, в цьому випадку змінюється тип коливань системи зі згасаючих на постійні (автоосциляції)

$$\begin{aligned} 2\gamma_{ef}^2 &= \sqrt{\left(c^2k^2 + \omega_0^2 - \gamma_{ef}^2\right)^2 + s^2} - \left(c^2k^2 + \omega_0^2 - \gamma_{ef}^2\right), \\ \sqrt{\left(c^2k^2 + \omega_0^2 - \gamma_{ef}^2\right)^2 + s^2} &= c^2k^2 + \omega_0^2 + \gamma_{ef}^2, \\ s^2 &= \left(c^2k^2 + \omega_0^2 + \gamma_{ef}^2\right)^2 - \left(c^2k^2 + \omega_0^2 - \gamma_{ef}^2\right)^2, \\ s^2 &= 4\gamma_{ef}^2 \left(c^2k^2 + \omega_0^2\right), \\ s^{cr} &= 2\gamma_{ef}\sqrt{c^2k^2 + \omega_0^2}, \end{aligned}$$

Як можна бачити критичний струм приймає значення $\alpha_G\gamma H_E\sqrt{c^2k^2 + \omega_0^2}$, для "м'якої" моди, $k = 0$, маємо $s_{k=0}^{cr} = \alpha_G\gamma H_E\omega_0$.

Згасання відсутні

Використаємо (3.1) для випадку коли дисипація відсутня, відповідне дисперсійне рівняння набуде вигляду

$$\omega^4 - c_2\omega^2 + c_0 = 0, \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \text{де } c_0 &= \frac{c_{44}}{\rho}k^2 \left(\omega_0^2 + c^2k^2\right) - k^2 \frac{\lambda_{44}^2\gamma^2 H_E}{\rho M_{sat}} + i\gamma^2 \frac{c_{44}}{\rho}k^2 H_E H_{curr}, \\ c_2 &= \omega_0^2 + c^2k^2 + \frac{c_{44}}{\rho}k^2 + i\gamma^2 H_E H_{curr}. \end{aligned}$$

Розв'язком (3.5) є дві пари МП (знак +) та ПМ (знак -) хвиль

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{c_2}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{c_2^2 - 4c_0},$$

Спростимо це

$$\begin{aligned} & c_2^2 - 4c_0 \\ &= \left(\omega_0^2 + c^2k^2 + \frac{c_{44}}{\rho}k^2 + is\right)^2 - 4\frac{c_{44}}{\rho}k^2 \left(\omega_0^2 + c^2k^2 + is\right) + k^2\Lambda \\ &= \left(\omega_0^2 + c^2k^2 - \frac{c_{44}}{\rho}k^2 + is\right)^2 + k^2\Lambda, \end{aligned}$$

$$\text{де } \Lambda = \frac{\lambda_{44}^2\gamma^2 H_E}{\rho M_{sat}}.$$

Частоти МП (ω_{ME}) та ПМ (ω_{EM}) хвиль записуються як

$$\omega_{ME}^2 = \frac{1}{2} \left(\omega_0^2 + c^2 k^2 + \frac{c_{44}}{\rho} k^2 + is \right) + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\omega_0^2 + c^2 k^2 - \frac{c_{44}}{\rho} k^2 + is \right)^2 + k^2 \Lambda},$$

$$\omega_{EM}^2 = \frac{1}{2} \left(\omega_0^2 + c^2 k^2 + \frac{c_{44}}{\rho} k^2 + is \right) - \frac{1}{2} \sqrt{\left(\omega_0^2 + c^2 k^2 - \frac{c_{44}}{\rho} k^2 + is \right)^2 + k^2 \Lambda},$$

Для нас представляє інтерес розгляд МП хвилі, тому далі працюємо з ω_{ME} . Для її знаходження, представимо ω_{ME}^2 в експоненційній формі

$$\begin{aligned} & \left(\omega_0^2 + c^2 k^2 - \frac{c_{44}}{\rho} k^2 + is \right)^2 + k^2 \Lambda = \\ & \left(\omega_0^2 + c^2 k^2 - \frac{c_{44}}{\rho} k^2 \right)^2 + k^2 \Lambda - s^2 + 2is \left(\omega_0^2 + c^2 k^2 - \frac{c_{44}}{\rho} k^2 \right) \\ & = a_1 e^{ib_1}, \end{aligned}$$

де

$$a_1 = \sqrt{\left[\left(\omega_0^2 + c^2 k^2 - \frac{c_{44}}{\rho} k^2 \right)^2 + k^2 \Lambda - s^2 \right]^2 + 4s^2 \left[\omega_0^2 + c^2 k^2 - \frac{c_{44}}{\rho} k^2 \right]^2},$$

$$b_1 = \arctan \frac{2s \left(\omega_0^2 + c^2 k^2 - \frac{c_{44}}{\rho} k^2 \right)}{\left(\omega_0^2 + c^2 k^2 - \frac{c_{44}}{\rho} k^2 \right)^2 + k^2 \Lambda - s^2}.$$

Таким чином

$$\sqrt{a_1 e^{ib_1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (c_{1+} + i c_{1-}),$$

де

$$\begin{aligned} (c_{1\pm})^2 = & \sqrt{\left(\left(\omega_0^2 + c^2 k^2 - \frac{c_{44}}{\rho} k^2 \right)^2 + k^2 \Lambda - s^2 \right)^2 + 4s^2 \left(\omega_0^2 + c^2 k^2 - \frac{c_{44}}{\rho} k^2 \right)^2} \\ & \pm \left(\left(\omega_0^2 + c^2 k^2 - \frac{c_{44}}{\rho} k^2 \right)^2 + k^2 \Lambda - s^2 \right), \end{aligned}$$

(при знаходженні $c_{1\pm}$ добувається арифметичний корінь). Відповідна частота набуває вигляду

$$\begin{aligned} \omega_{ME}^2 = & \frac{1}{2} \left(\omega_0^2 + c^2 k^2 + \frac{c_{44}}{\rho} k^2 + is \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} (c_{1+} + i c_{1-}) \\ = & \frac{1}{2} \left(\omega_0^2 + c^2 k^2 + \frac{c_{44}}{\rho} k^2 + \frac{c_{1+}}{\sqrt{2}} \right) + \frac{i}{2} \left(s + \frac{c_{1-}}{\sqrt{2}} \right) \\ = & a_2 e^{ib_2}, \end{aligned}$$

де

$$a_2 = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\omega_0^2 + c^2 k^2 + \frac{c_{44}}{\rho} k^2 + \frac{c_{1+}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(s + \frac{c_{1-}}{\sqrt{2}}\right)^2}, b_2 = \arctan \frac{s + \frac{c_{1-}}{\sqrt{2}}}{\omega_0^2 + c^2 k^2 + \frac{c_{44}}{\rho} k^2 + \frac{c_{1+}}{\sqrt{2}}}.$$

Беручи до уваги, що

$$e^{\frac{i}{2}b_2} = \frac{1}{\sqrt{a_2}} \left(\frac{c_{2+}}{\sqrt{2}} + i \frac{c_{2-}}{\sqrt{2}} \right),$$

де

$$(c_{2\pm})^2 = \sqrt{\left(\omega_0^2 + c^2 k^2 + \frac{c_{44}}{\rho} k^2 + \frac{c_{1+}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(s + \frac{c_{1-}}{\sqrt{2}}\right)^2} \pm \left(\omega_0^2 + c^2 k^2 + \frac{c_{44}}{\rho} k^2 + \frac{c_{1+}}{\sqrt{2}}\right),$$

(добувається арифметичний квадратний корінь).

Остаточно маємо

$$\omega_{ME\pm} = \pm \left(\frac{c_{2+}}{\sqrt{2}} + i \frac{c_{2-}}{\sqrt{2}} \right), \quad (3.6)$$

Частота МП хвилі у випадку відсутності згасання та за наявності спінового струму дається виразом (3.6).

Спіновий струм відсутній

У відсутності спінового струму, умова (3.1) дає дисперсійне рівняння

$$\omega^4 - i c_3 \omega^3 - c_2 \omega^2 + i c_1 \omega + c_0 = 0, \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \text{де } c_0 &= \frac{c_{44}}{\rho} k^2 (\omega_0^2 + c^2 k^2) - k^2 \frac{\lambda_{44}^2 \gamma^2 H_E}{\rho M_{sat}}, \\ c_1 &= \alpha_G \gamma H_E \frac{c_{44}}{\rho} k^2 + 2\gamma_{elas} [c^2 k^2 + \omega_0^2], \\ c_2 &= 2\gamma_{elas} \gamma \alpha_G H_E + \omega_0^2 + c^2 k^2 + \frac{c_{44}}{\rho} k^2, \\ c_3 &= \gamma \alpha_G H_E + 2\gamma_{elas}. \end{aligned}$$

Розв'язок (3.7) будемо шукати у вигляді $i\gamma_{1ef} \pm \omega_1, i\gamma_{2ef} \pm \omega_2$, вони задовольняють рівняння

$$\begin{aligned} &(\omega - i\gamma_{1ef} - \omega_1)(\omega - i\gamma_{1ef} + \omega_1)(\omega - i\gamma_{2ef} - \omega_2)(\omega - i\gamma_{2ef} + \omega_2) \\ &= \left((\omega - i\gamma_{1ef})^2 - \omega_1^2\right) \left((\omega - i\gamma_{2ef})^2 - \omega_2^2\right) \\ &= (\omega^2 - 2i\omega\gamma_{1ef} - \gamma_{1ef}^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - 2i\omega\gamma_{2ef} - \gamma_{2ef}^2 - \omega_2^2) \\ &\quad \omega^4 - 2i(\gamma_{1ef} + \gamma_{2ef})\omega^3 - \left((\gamma_{1ef} + \gamma_{2ef})^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2\right)\omega^2 \\ &\quad + 2i[\gamma_{1ef}(\gamma_{2ef}^2 + \omega_2^2) + \gamma_{2ef}(\gamma_{1ef}^2 + \omega_1^2)]\omega + (\gamma_{1ef}^2 + \omega_1^2)(\gamma_{2ef}^2 + \omega_2^2), \end{aligned} \quad (3.8)$$

Порівнюючи (3.8) з (3.7) та прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях ω ми отримаємо

$$\gamma_{1ef} + \gamma_{2ef} = \frac{1}{2}\gamma\alpha_G H_E + \gamma_{elas}, \quad (3.9)$$

$$(\gamma_{1ef} + \gamma_{2ef})^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2 = 2\gamma_{elas}\gamma\alpha_G H_E + \omega_0^2 + c^2 k^2 + \frac{c_{44}}{\rho} k^2, \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} & 2 [\gamma_{1ef} (\gamma_{2ef}^2 + \omega_2^2) + \gamma_{2ef} (\gamma_{1ef}^2 + \omega_1^2)] \\ &= \alpha_G \gamma H_E \frac{c_{44}}{\rho} k^2 + 2\gamma_{elas} [c^2 k^2 + \omega_0^2], \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$(\gamma_{1ef}^2 + \omega_1^2) (\gamma_{2ef}^2 + \omega_2^2) = \frac{c_{44}}{\rho} k^2 (\omega_0^2 + c^2 k^2) - k^2 \frac{\lambda_{44}^2 \gamma^2 H_E}{\rho M_{sat}}, \quad (3.12)$$

Вважаємо, що коефіцієнт МП зв'язку малий порівняно з дисипаціями, тобто $k \frac{\lambda_{44}}{\rho} < \gamma_{elas}^2$, $k \frac{\lambda_{44}\gamma}{M_{sat}} < \frac{1}{2}\alpha_G^2$ (хвильовий вектор k тут вважається фіксованим, він квантується як показано в попередньому розділі). Подальший розв'язок рівнянь (3.9)-(3.12) будемо проводити методом послідовних наближень. У нульовому наближенні $\lambda_{44} = 0$ маємо

$$\gamma_{1ef}^{(0)} = \frac{1}{2}\gamma\alpha_G H_E, \quad (3.13)$$

$$\gamma_{2ef}^{(0)} = \gamma_{elas}, \quad (3.14)$$

$$\left(\omega_1^{(0)}\right)^2 = \omega_0^2 + c^2 k^2, \quad (3.15)$$

$$\left(\omega_2^{(0)}\right)^2 = \frac{c_{44}}{\rho} k^2, \quad (3.16)$$

Аналізуючи (3.9), (3.10), не важко здогадатися, що в першому наближенні розв'язок (3.7) має вигляд

$$\gamma_{1ef}^{(1)} = \gamma_{1ef}^{(0)} - a\lambda_{44}^2, \quad (3.17)$$

$$\gamma_{2ef}^{(1)} = \gamma_{2ef}^{(0)} + a\lambda_{44}^2, \quad (3.18)$$

$$\omega_{1\pm}^{(1)} = \pm \left(\omega_1^{(0)} + b\lambda_{44}^2\right), \quad (3.19)$$

$$\omega_{2\pm}^{(1)} = \pm \left(\omega_2^{(0)} - b\lambda_{44}^2\right), \quad (3.20)$$

де a, b – деякі константи. Підстановка (3.17)-(3.20) в (3.11) дає

$$\begin{aligned}
& \gamma_{1ef}^{(1)} \left(\left(\gamma_{2ef}^{(1)} \right)^2 + \left(\omega_2^{(1)} \right)^2 \right) + \gamma_{2ef}^{(1)} \left(\left(\gamma_{1ef}^{(1)} \right)^2 + \left(\omega_1^{(1)} \right)^2 \right) \\
&= \left(\gamma_{1ef}^{(0)} - a\lambda_{44}^2 \right) \left(\left(\gamma_{2ef}^{(0)} + a\lambda_{44}^2 \right)^2 + \left(\omega_2^{(0)} - b\lambda_{44}^2 \right)^2 \right) \\
&\quad + \left(\gamma_{2ef}^{(0)} + a\lambda_{44}^2 \right) \left(\left(\gamma_{1ef}^{(0)} - a\lambda_{44}^2 \right)^2 + \left(\omega_1^{(0)} + b\lambda_{44}^2 \right)^2 \right) \\
&= \left(\gamma_{1ef}^{(0)} - a\lambda_{44}^2 \right) \left(\left(\gamma_{2ef}^{(0)} \right)^2 + 2a\gamma_{2ef}^{(0)}\lambda_{44}^2 + \left(\omega_2^{(0)} \right)^2 - 2b\omega_2^{(0)}\lambda_{44}^2 \right) \\
&\quad + \left(\gamma_{2ef}^{(0)} + a\lambda_{44}^2 \right) \left(\left(\gamma_{1ef}^{(0)} \right)^2 - 2a\gamma_{1ef}^{(0)}\lambda_{44}^2 + \left(\omega_1^{(0)} \right)^2 + 2b\omega_1^{(0)}\lambda_{44}^2 \right) \\
&\quad = \gamma_{1ef}^{(0)} \left(\omega_2^{(0)} \right)^2 + \gamma_{2ef}^{(0)} \left(\omega_1^{(0)} \right)^2 \\
&\quad + \left(a \left(\omega_1^{(0)} \right)^2 - a \left(\omega_2^{(0)} \right)^2 - 2b\gamma_{1ef}^{(0)}\omega_2^{(0)} + 2b\gamma_{2ef}^{(0)}\omega_1^{(0)} \right) \lambda_{44}^2 \\
&\quad = \gamma_{1ef}^{(0)} \left(\omega_2^{(0)} \right)^2 + \gamma_{2ef}^{(0)} \left(\omega_1^{(0)} \right)^2,
\end{aligned}$$

Таким чином отримаємо зв'язок між коефіцієнтами a та b

$$b = \frac{a \left(\omega_1^{(0)} \right)^2 - \left(\omega_2^{(0)} \right)^2}{2 \gamma_{1ef}^{(0)} \omega_2^{(0)} - \gamma_{2ef}^{(0)} \omega_1^{(0)}}, \quad (3.21)$$

Підстановка (3.17)-(3.20) в (3.12) дає

$$\begin{aligned}
& (\gamma_{1ef}^2 + \omega_1^2) (\gamma_{2ef}^2 + \omega_2^2) \\
&= \left(\left(\gamma_{1ef}^{(1)} \right)^2 + \left(\omega_1^{(1)} \right)^2 \right) \left(\left(\gamma_{2ef}^{(1)} \right)^2 + \left(\omega_2^{(1)} \right)^2 \right) \\
&= \left(\left(\gamma_{1ef}^{(0)} - a\lambda_{44}^2 \right)^2 + \left(\omega_1^{(0)} + b\lambda_{44}^2 \right)^2 \right) \\
&\quad \times \left(\left(\gamma_{2ef}^{(0)} + a\lambda_{44}^2 \right)^2 + \left(\omega_2^{(0)} - b\lambda_{44}^2 \right)^2 \right) \\
&\quad = \left(\omega_1^{(0)} \right)^2 + \left(\omega_2^{(0)} \right)^2 \\
&\quad + \left(-2a\gamma_{1ef}^{(0)}\omega_2^{(0)} + 2a\gamma_{2ef}^{(0)}\omega_1^{(0)} + 2b\omega_1^{(0)} \left(\omega_2^{(0)} \right)^2 - 2b \left(\omega_1^{(0)} \right)^2 \omega_2^{(0)} \right) \lambda_{44}^2 \\
&\quad = \frac{c_{44}}{\rho} k^2 \left(\omega_0^2 + c^2 k^2 \right) - k^2 \frac{\lambda_{44}^2 \gamma^2 H_E}{\rho M_{sat}},
\end{aligned}$$

Тобто

$$\begin{aligned}
2a \left(\gamma_{2ef}^{(0)} \omega_1^{(0)} - \gamma_{1ef}^{(0)} \omega_2^{(0)} \right) + 2b \left(\omega_1^{(0)} \left(\omega_2^{(0)} \right)^2 - \left(\omega_1^{(0)} \right)^2 \omega_2^{(0)} \right) &= -k^2 \frac{\gamma^2 H_E}{\rho M_{sat}}, \\
2a \left(\gamma_{2ef}^{(0)} \omega_1^{(0)} - \gamma_{1ef}^{(0)} \omega_2^{(0)} \right)^2 - a \omega_1^{(0)} \omega_2^{(0)} \left(\omega_2^{(0)} - \omega_1^{(0)} \right) \left(\left(\omega_1^{(0)} \right)^2 - \left(\omega_2^{(0)} \right)^2 \right) \\
&= -k^2 \frac{\gamma^2 H_E}{\rho M_{sat}} \left(\gamma_{2ef}^{(0)} \omega_1^{(0)} - \gamma_{1ef}^{(0)} \omega_2^{(0)} \right), \\
a &= -k^2 \frac{\gamma^2 H_E}{\rho M_{sat}} \frac{\gamma_{2ef}^{(0)} \omega_1^{(0)} - \gamma_{1ef}^{(0)} \omega_2^{(0)}}{2 \left(\gamma_{2ef}^{(0)} \omega_1^{(0)} - \gamma_{1ef}^{(0)} \omega_2^{(0)} \right)^2 - \omega_1^{(0)} \omega_2^{(0)} \left(\omega_2^{(0)} - \omega_1^{(0)} \right) \left(\left(\omega_1^{(0)} \right)^2 - \left(\omega_2^{(0)} \right)^2 \right)}, \quad (3.22)
\end{aligned}$$

Беручи до уваги (3.21) маємо

$$b = k^2 \frac{\gamma^2 H_E}{2 \rho M_{sat}} \left(2 \frac{\left(\gamma_{2ef}^{(0)} \omega_1^{(0)} - \gamma_{1ef}^{(0)} \omega_2^{(0)} \right)^2}{\left(\omega_1^{(0)} \right)^2 - \left(\omega_2^{(0)} \right)^2} - \omega_1^{(0)} \omega_2^{(0)} \left(\omega_2^{(0)} - \omega_1^{(0)} \right) \right)^{-1}, \quad (3.23)$$

У першому наближенні вирази для МП (індекс 1) та ПМ (індекс 2) хвиль даються формулами (3.17)-(3.20), (3.22), (3.23).

Порівняння граничних випадків

Для випадку $\gamma_{ef} = 0$ формула (3.4) дозволяє отримати

$$\begin{aligned}
Im \{ \omega_- \} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{(c^2 k^2 + \omega_0^2)^2 + s^2} - c^2 k^2 - \omega_0^2} \\
&\approx -\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(c^2 k^2 + \omega_0^2) \left(1 + \frac{s^2}{2(c^2 k^2 + \omega_0^2)^2} \right) - c^2 k^2 - \omega_0^2} \\
&\approx -\frac{1}{2} \frac{s}{\sqrt{c^2 k^2 + \omega_0^2}}, \quad (3.24)
\end{aligned}$$

Для випадку $s = 0, \gamma_{1ef} \neq 0, \gamma_{2ef} \neq 0, \lambda_{44} \neq 0$ з (3.17) ми маємо

$$Im \{ \omega_{1-} \} = \gamma_{1ef}^{(0)} - a \lambda_{44}^2, \quad (3.25)$$

де a дається формулою (3.22). Порівнюючи (3.24) та (3.25) ми можемо написати загальний розв'язок як суперпозицію отриманих розв'язків (це вірно для лінійного наближення)

$$Im \{\omega_{1-}\} = -\frac{1}{2} \frac{s}{\sqrt{c^2 k^2 + \omega_0^2}} + \gamma_{1ef}^{(0)} - a\lambda_{44}^2, \quad (3.26)$$

Критичне значення спінового струму s^{cr} знаходиться з умови $Im \{\omega_{1-}\} = 0$, з (3.26) отримаємо

$$s^{cr} = 2\sqrt{c^2 k^2 + \omega_0^2} \left(\gamma_{1ef}^{(0)} - a\lambda_{44}^2 \right), \quad (3.27)$$

Знайдемо відповідну частоту автоосциляцій $Re \{\omega_{-}\}$

$$\begin{aligned} Re \{\omega_{-}\} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{(c^2 k^2 + \omega_0^2)^2 + s^2} + c^2 k^2 + \omega_0^2} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(c^2 k^2 + \omega_0^2) \left(1 + \frac{s^2}{2(c^2 k^2 + \omega_0^2)^2} \right) + c^2 k^2 + \omega_0^2} \\ &= -\sqrt{c^2 k^2 + \omega_0^2 + \frac{s^2}{4(c^2 k^2 + \omega_0^2)}} \\ &= -\sqrt{c^2 k^2 + \omega_0^2} \left(1 + \frac{s^2}{8(c^2 k^2 + \omega_0^2)^2} \right) = \omega_{1-}^{(0)} + \frac{s^2}{8(\omega_{1-}^{(0)})^3} \end{aligned}$$

Відповідна частота рівна

$$\omega_{1-}^{cr} = - \left(\sqrt{c^2 k^2 + \omega_0^2} + \frac{(s^{cr})^2}{8(c^2 k^2 + \omega_0^2)^3} - b\lambda_{44}^2 \right), \quad (3.28)$$

Решта розв'язків дисперсійного рівняння (3.1) в лінійному наближенні знаходяться аналогічним чином, використовуючи (3.13)-(3.20) та розв'язок (3.5). Більш точні розв'язки, що враховують нелінійні доданки, можна знаходити у вигляді ряду по ступеням λ_{44}^2 проте при цьому виникають більш складно аналітично розв'язувані рівняння, і точний результат може бути отриманий лише чисельно.

Висновки

Для малих відхилень вектора Нееля від положення рівноваги $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ досліджено випадок виводу його із цього стану. Для спрощеного випадку (Розділ 2), при якому система описується за допомогою двох узагальнених координат та чотирьох параметрів, досліджено можливі граничні випадки і у кожному отримано розв'язок відповідного дисперсійного рівняння. Показана наявність такого значення спінового струму – критичне значення, при якому уявна частина однієї з частот стає рівною нулеві. При цьому відбувається зміна типу коливань: зі згасаючих на постійні.

Вважаючи МП зв'язок, згасання, а тому і критичний спіновий струм малим, знайдено лінійні по всім цим параметрам розв'язки дисперсійних рівнянь. Визначено критичний струм та відповідну частоту коливань при цьому значенні струму.

Суттєвим спрощенням є те, що для малих параметрів системи критичний струм теж є малим і він може бути знайдений з лінійного рівняння. При збільшенні значень цих параметрів, рівняння для струму вже буде нелінійним і може бути розв'язаним лише чисельно. Проте варто зауважити, що розглядаються лише малі відхилення від рівноважного стану і тому отриманий критичний струм носить характер мінімально можливого, який виводить систему із рівноваги. Для більш точного аналізу динаміки системи для $s > s^{cr}$ варто розглядати повний Лагранжіан (2.27) та відповідні йому рівняння.

Розділ 4

Динаміка поблизу атрактора

Вступ

Розглядається одновимірний випадок (нанопроволока) для повного Лагранжіану (2.27). Для випадку відсутності МП зв'язку показано, що на фазовому просторі існує граничний цикл, визначено розмір циклу. Чисельні розрахунки підтвердили це. При врахуванні МП зв'язку у системі можуть відбуватися коливання навколо граничного циклу (нутація), якщо МП хвиля представляє собою біжучу хвилю. Чисельний розрахунок проводився тільки в цьому випадку.

Всі результати в розділі стосуються АФ, тобто області (2), і тому індекс (2) в рівняннях для зручності не пишеться. Результати справедливі для нескінченного АФ зразку.

Вивід рівнянь руху

Для тієї ж самої геометрії розташування нанопроволоки (Розділ 2) запишемо повну густину потенціальної енергії (2.1)

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_n = & \frac{1}{2}c_{11} \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2}c_{44} \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} \right)^2 \right] + \\ & + \frac{1}{2}\lambda_{11}n_z^2 \frac{\partial u_z}{\partial z} + \lambda_{12} (n_x^2 + n_y^2) \frac{\partial u_z}{\partial z} + \\ & + \lambda_{44}n_z \left(n_x \frac{\partial u_x}{\partial z} + n_y \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) - \frac{1}{4}M_{sat}H_{an} (n_x^4 + n_y^4 + n_z^4) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Аби задовольнити умову нормування вектора Нееля $|\mathbf{n}| = 1$ перейдемо до змінних Θ, Φ за формулами

$$\begin{cases} n_x = \sin \Theta \cos \Phi \\ n_y = \sin \Theta \sin \Phi \\ n_z = \cos \Theta \end{cases} \quad (4.2)$$

Враховуючи (4.2) потенціал (4.1) набуде вигляду

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_n = & \frac{1}{2}c_{11} \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2}c_{44} \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} \right)^2 \right] \\ & + \frac{1}{2}\lambda_{11} \cos^2 \Theta \frac{\partial u_z}{\partial z} + \lambda_{12} \sin^2 \Theta \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ & + \frac{1}{2}\lambda_{44} \sin 2\Theta \left(\cos \Phi \frac{\partial u_x}{\partial z} + \sin \Phi \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \\ & - \frac{1}{4}M_{sat}H_{an} \left(\sin^4 \Theta \left[1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\Phi \right] + \cos^4 \Theta \right), \end{aligned} \quad (4.3)$$

Тепер працюємо з Лагранжіаном (2.27), і також перепишемо все в термінах Θ, Φ

$$\begin{aligned} \dot{n}_x &= \dot{\Theta} \cos \Theta \cos \Phi - \dot{\Phi} \sin \Theta \sin \Phi, \\ \dot{n}_y &= \dot{\Theta} \cos \Theta \sin \Phi + \dot{\Phi} \sin \Theta \cos \Phi, \\ \dot{n}_z &= -\dot{\Theta} \sin \Theta, \end{aligned}$$

$$\dot{\mathbf{n}} \times \mathbf{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dot{n}_x & \dot{n}_y & \dot{n}_z \\ n_x & n_y & n_z \end{vmatrix} = (\dot{n}_y n_z - \dot{n}_z n_y, \dot{n}_z n_x - \dot{n}_x n_z, \dot{n}_x n_y - \dot{n}_y n_x),$$

Заишемо останній вираз покомпонентно

$$\begin{aligned} & \dot{n}_y n_z - \dot{n}_z n_y \\ &= \cos \Theta \left(\dot{\Theta} \cos \Theta \sin \Phi + \dot{\Phi} \sin \Theta \cos \Phi \right) + \dot{\Theta} \sin \Theta \sin \Theta \sin \Phi \\ &= \dot{\Theta} \sin \Phi + \dot{\Phi} \sin \Theta \cos \Theta \cos \Phi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \dot{n}_z n_x - \dot{n}_x n_z \\ &= -\dot{\Theta} \sin \Theta \sin \Theta \cos \Phi - \cos \Theta \left(\dot{\Theta} \cos \Theta \cos \Phi - \dot{\Phi} \sin \Theta \sin \Phi \right) \\ &= -\dot{\Theta} \cos \Phi + \dot{\Phi} \sin \Theta \cos \Theta \sin \Phi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \dot{n}_x n_y - \dot{n}_y n_x \\
&= \sin \Theta \sin \Phi \left(\dot{\Theta} \cos \Theta \cos \Phi - \dot{\Phi} \sin \Theta \sin \Phi \right) \\
&- \sin \Theta \cos \Phi \left(\dot{\Theta} \cos \Theta \sin \Phi + \dot{\Phi} \sin \Theta \cos \Phi \right) \\
&= -\dot{\Phi} \sin^2 \Theta,
\end{aligned}$$

ТАКИМ ЧИНОМ

$$\begin{aligned}
& (\dot{\mathbf{n}} \times \mathbf{n})^2 \\
& \left(\dot{\Theta} \sin \Phi + \dot{\Phi} \sin \Theta \cos \Theta \cos \Phi \right)^2 \\
& + \left(-\dot{\Theta} \cos \Phi + \dot{\Phi} \sin \Theta \cos \Theta \sin \Phi \right)^2 + \left(-\dot{\Phi} \sin^2 \Theta \right)^2 \\
&= \dot{\Theta}^2 + \dot{\Phi}^2 \sin^2 \Theta,
\end{aligned}$$

Аналогічно отримаємо

$$\left(\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial z} \times \mathbf{n} \right)^2 = \left(\frac{\partial \Theta}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \sin^2 \Theta,$$

Тоді густина функції Лагранжа (2.27) набуде вигляду

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = \frac{M_{sat}}{2\gamma^2 H_{ex}} & \left(\dot{\Theta}^2 + \dot{\Phi}^2 \sin^2 \Theta - c^2 \left(\left(\frac{\partial \Theta}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \sin^2 \Theta \right) \right) \\
& + \frac{1}{2} \rho \dot{\mathbf{u}}^2 - \mathcal{W}_n,
\end{aligned} \tag{4.4}$$

А густина функції Релея (2.29) перепишеться як

$$\begin{aligned}
\mathcal{R} = \frac{\alpha_G M_{sat}}{2\gamma} & \left(\dot{\Theta}^2 + \dot{\Phi}^2 \sin^2 \Theta \right) \\
& - M_{sat} H_{curr} s_x \left(\dot{\Theta} \sin \Phi + \dot{\Phi} \sin \Theta \cos \Theta \cos \Phi \right) \\
& - M_{sat} H_{curr} s_y \left(-\dot{\Theta} \cos \Phi + \dot{\Phi} \sin \Theta \cos \Theta \sin \Phi \right) \\
& + M_{sat} H_{curr} s_z \dot{\Phi} \sin^2 \Theta + \gamma_{elas} \rho \dot{\mathbf{u}}^2,
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Знайдемо необхідні похідні, що фігурують в (2.31)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Theta} &= \frac{M_{sat}}{2\gamma^2 H_{ex}} \left(\dot{\Phi}^2 - c^2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right) \sin 2\Theta \\
&\quad + \frac{1}{2} \lambda_{11} \sin 2\Theta \frac{\partial u_z}{\partial z} - \lambda_{12} \sin 2\Theta \frac{\partial u_z}{\partial z} \\
&\quad - \lambda_{44} \cos 2\Theta \left(\cos \Phi \frac{\partial u_x}{\partial z} + \sin \Phi \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} M_{sat} H_{an} \left(\sin^2 \Theta \left[1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\Phi \right] - \cos^2 \Theta \right) \sin 2\Theta,
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Theta}} = \frac{M_{sat}}{\gamma^2 H_{ex}} \dot{\Theta},$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \Theta / \partial z)} = - \frac{M_{sat} c^2}{\gamma^2 H_{ex}} \frac{\partial \Theta}{\partial z},$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} &= -\frac{1}{2} \lambda_{44} \sin 2\Theta \left(-\sin \Phi \frac{\partial u_x}{\partial z} + \cos \Phi \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \\
&\quad - \frac{1}{4} M_{sat} H_{an} \sin^4 \Theta \sin 4\Phi,
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}} = \frac{M_{sat}}{\gamma^2 H_{ex}} \dot{\Phi} \sin^2 \Theta,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \Phi / \partial z)} = - \frac{M_{sat} c^2}{\gamma^2 H_{ex}} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \sin^2 \Theta,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_i} = \rho \dot{u}_i,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial u_x / \partial z)} = -c_{44} \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{1}{2} \lambda_{44} \sin 2\Theta \cos \Phi,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial u_y / \partial z)} = -c_{44} \frac{\partial u_y}{\partial z} - \frac{1}{2} \lambda_{44} \sin 2\Theta \sin \Phi,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial u_z / \partial z)} = -c_{11} \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{1}{2} \lambda_{11} \cos^2 \Theta - \lambda_{12} \sin^2 \Theta,$$

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{\Theta}} = \frac{\alpha_G M_{sat}}{\gamma} \dot{\Theta} - M_{sat} H_{curr} (s_x \sin \Phi - s_y \cos \Phi),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{\Phi}} = & \frac{\alpha_G M_{sat}}{\gamma} \dot{\Phi} \sin^2 \Theta - \frac{1}{2} M_{sat} H_{curr} (s_x \cos \Phi - s_y \sin \Phi) \sin 2\Theta \\ & + M_{sat} H_{curr} s_z \sin^2 \Theta, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{u}_i} = 2\gamma_{elas} \rho \dot{u}_i,$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Theta}} \right) = \frac{M_{sat}}{\gamma^2 H_{ex}} \ddot{\Theta},$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}} \right) = \frac{M_{sat}}{\gamma^2 H_{ex}} \left(\ddot{\Phi} \sin^2 \Theta + \dot{\Phi} \dot{\Theta} \sin 2\Theta \right),$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_i} \right) = \rho \ddot{u}_i,$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \Theta / \partial z)} \right) = -\frac{M_{sat} c^2}{\gamma^2 H_{ex}} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial \Phi / \partial z)} \right) = -\frac{M_{sat} c^2}{\gamma^2 H_{ex}} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \sin^2 \Theta + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial \Theta}{\partial z} \sin 2\Theta \right),$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial u_x / \partial z)} \right) = -c_{44} \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} - \lambda_{44} \frac{\partial \Theta}{\partial z} \cos 2\Theta \cos \Phi + \frac{1}{2} \lambda_{44} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \sin 2\Theta \sin \Phi,$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial u_y / \partial z)} \right) = -c_{44} \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} - \lambda_{44} \frac{\partial \Theta}{\partial z} \cos 2\Theta \sin \Phi - \frac{1}{2} \lambda_{44} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \sin 2\Theta \cos \Phi,$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial u_z / \partial z)} \right) = -c_{11} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \frac{1}{2} \lambda_{11} \frac{\partial \Theta}{\partial z} \sin 2\Theta - \lambda_{12} \frac{\partial \Theta}{\partial z} \sin 2\Theta,$$

Тоді рівняння руху мають форму

$$\begin{aligned}
& \ddot{\Theta} - \frac{1}{2} \left(\dot{\Phi}^2 - c^2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right) \sin 2\Theta \\
& - \frac{\gamma^2 H_{ex}}{M_{sat}} \left(\frac{1}{2} \lambda_{11} - \lambda_{12} \right) \sin 2\Theta \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\gamma^2 H_{ex}}{M_{sat}} \lambda_{44} \cos 2\Theta \left(\cos \Phi \frac{\partial u_x}{\partial z} + \sin \Phi \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \\
& - \frac{1}{2} \gamma^2 H_{ex} H_{an} \left(\sin^2 \Theta \left[1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\Phi \right] - \cos^2 \Theta \right) \sin 2\Theta - c^2 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} \\
& = -\gamma \alpha_G H_{ex} \dot{\Theta} + \gamma^2 H_{ex} H_{curr} (s_x \sin \Phi - s_y \cos \Phi),
\end{aligned} \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned}
& \ddot{\Phi} \sin^2 \Theta + \dot{\Phi} \dot{\Theta} \sin 2\Theta + \frac{1}{2} \lambda_{44} \frac{\gamma^2 H_{ex}}{M_{sat}} \sin 2\Theta \left(-\sin \Phi \frac{\partial u_x}{\partial z} + \cos \Phi \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \\
& + \frac{1}{4} \gamma^2 H_{ex} H_{an} \sin^4 \Theta \sin 4\Phi - c^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \sin^2 \Theta + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial \Theta}{\partial z} \sin 2\Theta \right) \\
& = -\gamma \alpha_G H_{ex} \dot{\Phi} \sin^2 \Theta + \frac{1}{2} \gamma^2 H_{ex} H_{curr} (s_x \cos \Phi - s_y \sin \Phi) \sin 2\Theta, \\
& -\gamma^2 H_{ex} H_{curr} s_z \sin^2 \Theta,
\end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\ddot{u}_x - \frac{c_{44}}{\rho} \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} - \frac{\lambda_{44}}{\rho} \frac{\partial \Theta}{\partial z} \cos 2\Theta \cos \Phi + \frac{\lambda_{44}}{2\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \sin 2\Theta \sin \Phi = -2\gamma_{elas} \dot{u}_x, \tag{4.8}$$

$$\ddot{u}_y - \frac{c_{44}}{\rho} \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} - \frac{\lambda_{44}}{\rho} \frac{\partial \Theta}{\partial z} \cos 2\Theta \sin \Phi - \frac{\lambda_{44}}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \sin 2\Theta \cos \Phi = -2\gamma_{elas} \dot{u}_y, \tag{4.9}$$

$$\ddot{u}_z - \frac{c_{11}}{\rho} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{1}{2} \lambda_{11} - \lambda_{12} \right) \frac{\partial \Theta}{\partial z} \sin 2\Theta = -2\gamma_{elas} \dot{u}_z, \tag{4.10}$$

МП зв'язок відсутній

Розглянемо випадок відсутності МП зв'язку, як і в лінійному наближенні зафіксуємо поляризацію спінового струму у напрямку $(0, 0, 1)$. Поки що не розглядаємо залежність від z , що відповідає "м'якій" моді. В цьому випадку рівняння (4.6), (4.7) матимуть вигляд

$$\begin{aligned}
& \ddot{\Theta} - \frac{1}{2} \dot{\Phi}^2 \sin 2\Theta + 2\gamma_{ef} \dot{\Theta} \\
& - \frac{1}{2} \omega_m^2 \left(\sin^2 \Theta \left[1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\Phi \right] - \cos^2 \Theta \right) \sin 2\Theta = 0,
\end{aligned} \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned}
& \ddot{\Phi} \sin^2 \Theta + \dot{\Phi} \dot{\Theta} \sin 2\Theta + \frac{1}{4} \omega_m^2 \sin^4 \Theta \sin 4\Phi \\
& + 2\gamma_{ef} \dot{\Phi} \sin^2 \Theta + \omega_s^2 \sin^2 \Theta = 0,
\end{aligned} \tag{4.12}$$

де $\omega_s^2 = \gamma^2 H_{ex} H_{curr}$, $\gamma_{ef} = \frac{1}{2} \gamma \alpha_G H_{ex}$, $\omega_m^2 = \gamma^2 H_{ex} H_{an}$. Як було показано раніше (Розділ 3) для струму $s^{cr} = 2\gamma_{ef}\omega_m$ точка $(\Theta, \Phi) = (0, 0)$ стає нестійкою і згідно з загальною теорією народжується стійкий цикл [19]. Щоб це перевірити шукаємо розв'язок рівнянь руху у вигляді $\Theta = \Theta_c$, $\Phi = \Phi(t)$ (з асимптотичних міркувань), де Θ_c деякий постійний кут. Використаємо (4.12)

$$\ddot{\Phi} + 2\gamma_{ef}\dot{\Phi} + \frac{1}{4}\omega_m^2 \sin^2 \Theta_c \sin 4\Phi + \omega_s^2 = 0,$$

позначивши $\delta = \frac{\gamma_{ef}}{\omega_m}$, $s = \frac{\omega_s^2}{\omega_m^2}$ та перейшовши до безрозмірного часу τ по формулі $\tau = \omega_m t$, отримаємо

$$\ddot{\Phi} + 2\delta\dot{\Phi} + \frac{1}{4}\sin^2 \Theta_c \sin 4\Phi + s = 0, \quad (4.13)$$

Для великих τ можна знайти асимптотичний розв'язок поклавши $\Theta_c = 0$ (як ліміт для циклу нульового радіусу), таким чином

$$\ddot{\Phi} + 2\delta\dot{\Phi} + s = 0, \quad (4.14)$$

нехай $\Phi = \chi - \frac{s}{2\delta}\tau$, тоді

$$\ddot{\chi} + 2\delta\dot{\chi} = 0 \Rightarrow \chi(\tau) = c_1 + c_2 e^{-2\delta\tau},$$

І загальний розв'язок має вигляд $\Phi(\tau) = c_1 + c_2 e^{-2\delta\tau} - \frac{s}{2\delta}\tau$. Константи c_1, c_2 знайдемо для початкових умов $\Phi(0) = \dot{\Phi}(0) = 0$, таким чином

$$c_1 = -c_2, \quad c_2 = -\frac{s}{4\delta^2},$$

Асимптотика $\Phi_\infty(\tau)$ для великих τ є

$$\Phi_\infty(\tau) = \frac{s}{4\delta^2} (1 - e^{-2\delta\tau}) - \frac{s}{2\delta}\tau, \quad (4.15)$$

Для малих τ , маємо, що Φ також мале і (4.13) перепишеться як

$$\ddot{\Phi} + 2\delta\dot{\Phi} + \sin^2 \Theta_c \Phi + s = 0, \quad (4.16)$$

Аналізуючи потенціал (Додаток А) можна зробити висновок, що $\sin^2 \Theta_c \in (0, \frac{1}{2}]$. Тобто мають місце три випадки $\sin^2 \Theta_c < \delta^2$, $\sin^2 \Theta_c = \delta^2$, $\sin^2 \Theta_c > \delta^2$. Позначимо $\Phi = \chi - \frac{s}{\sin^2 \Theta_c}$, і з (4.16) отримаємо

$$\ddot{\chi} + 2\delta\dot{\chi} + \sin^2 \Theta_c \chi = 0,$$

Це рівняння має розв'язок

$$\chi(\tau) = \begin{cases} c_1 \cos\left(\sqrt{\sin^2 \Theta_c - \delta^2} \tau\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\sin^2 \Theta_c - \delta^2} \tau\right), \sin^2 \Theta_c > \delta^2, \\ (c_1 + c_2 \tau) e^{-\delta \tau}, \sin^2 \Theta_c = \delta^2, \\ c_1 \cosh\left(\sqrt{\delta^2 - \sin^2 \Theta_c} \tau\right) + c_2 \sinh\left(\sqrt{\delta^2 - \sin^2 \Theta_c} \tau\right), \sin^2 \Theta_c < \delta^2, \end{cases}$$

Для початкової умови $\Phi(0) = \dot{\Phi}(0) = 0$ визначимо

$$\Phi_0(\tau) = \frac{s}{\sin^2 \Theta_c} \begin{cases} \cos\left(\sqrt{\sin^2 \Theta_c - \delta^2} \tau\right) - 1, \sin^2 \Theta_c > \delta^2, \\ (1 + \delta \tau) e^{-\delta \tau} - 1, \sin^2 \Theta_c = \delta^2, \\ \cosh\left(\sqrt{\delta^2 - \sin^2 \Theta_c} \tau\right) - 1, \sin^2 \Theta_c < \delta^2, \end{cases}$$

Як можна бачити $\Phi(\tau)$ є монотонною функцією. Тому для деякого s , на фазовому просторі може існувати граничний цикл. Покажемо це чисельно. Рівняння руху (4.11), (4.12) приймають вигляд

$$\begin{aligned} \ddot{\Theta} - \frac{1}{2} \dot{\Phi}^2 \sin 2\Theta + 2\delta \dot{\Theta} \\ - \frac{1}{2} (\sin^2 \Theta [1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\Phi] - \cos^2 \Theta) \sin 2\Theta = 0, \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\Phi} \sin^2 \Theta + \dot{\Phi} \dot{\Theta} \sin 2\Theta \\ + \frac{1}{4} \sin^4 \Theta \sin 4\Phi + 2\delta \dot{\Phi} \sin^2 \Theta + s \sin^2 \Theta = 0, \end{aligned} \quad (4.18)$$

Розв'язуючи ці рівняння чисельно (Додаток В) для початкової умови $[\Theta, \dot{\Theta}, \Phi, \dot{\Phi}] = [\frac{\pi}{8}, 0, 0, 0]$, отримано критичне значення струму, яке відповідає обертальному руху вектора Нееля навколо положення $(0, 0, 1)$ рис.4.1(г).

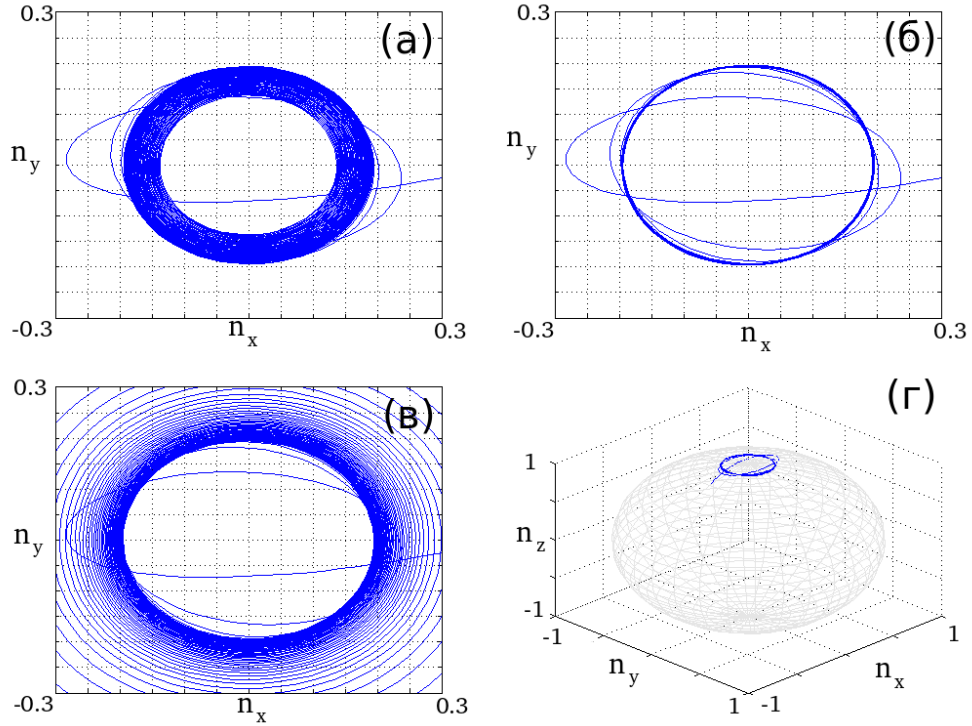


Рисунок 4.1 — Типи динаміки поблизу циклу для $\delta = 0.1$, МП відсутній. (а),(в) — частина фазового простору (n_x, n_y) для значень спінового струму $s^* (1 - 10^{-3})$ (стійкий фокус), $s^* (1 + 10^{-3})$ (репелер) відповідно; (б) — теж саме для струму $s^* \approx 0.19328$ (граничний цикл); (г) — конфігураційний простір для для струму s^* , видна наявність граничного циклу.

Вибір початкової умови — це фактично задання початкової енергії системи, якщо потім відповідна енергія за рахунок спінової накачки буде трохи більша цього значення, так щоб різниця енергій компенсувала тертя, то в системі будуть наявні стійкі обертання (прецесія) вектора Нееля рис. 4.1(в). Якщо ж енергії спінового струму не досить для подолання втрат через тертя, то система буде прямувати до рівноважного стану $(0, 0, 1)$ (стійкий фокус) рис. 4.1(а). Для великих енергій накачки система буде весь час якось рухатися по фазовому простору і навколо стіких станів АФ потенціалу (4.1) будуть утворюватися відштовхуючі області — репелери рис. 4.1(в).

Використовуючи (4.15) та рівняння руху (4.17) неважко знайти радіус граничного циклу

$$R_{cycle} = \frac{1}{2\delta} \sqrt{\frac{4}{7} (4\delta^2 - s^2)}, \quad (4.19)$$

Як було отримано раніше для малих коливань критичний струм становить $s_{min}^{cr} = 2\delta$, вираз (4.19) показує, що у випадку будь-яких коливань критичний струм $s^{cr} \in [0, 2\delta]$, що відповідає різним початковим умовам $\Theta(0) \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

Ненульовий МП зв'язок

Рівняння руху (4.6)-(4.10) для напрямку спінової поляризації $(0, 0, 1)$ мають вигляд

$$\begin{aligned} & \ddot{\Theta} - \kappa_{AF}^2 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2} - \frac{1}{2} \left(\dot{\Phi}^2 - \kappa_{AF}^2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right)^2 \right) \sin 2\Theta \\ & - \lambda_1^{AF} \sin 2\Theta \frac{\partial u_z}{\partial \xi} + \lambda_2^{AF} \cos 2\Theta \left(\cos \Phi \frac{\partial u_x}{\partial \xi} + \sin \Phi \frac{\partial u_y}{\partial \xi} \right) \\ & - \frac{1}{2} \left(\sin^2 \Theta \left[1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\Phi \right] - \cos^2 \Theta \right) \sin 2\Theta = -2\delta_{AF} \dot{\Theta}, \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} & \ddot{\Phi} \sin^2 \Theta + \dot{\Phi} \dot{\Theta} \sin 2\Theta + \frac{1}{2} \lambda_2^{AF} \sin 2\Theta \left(-\sin \Phi \frac{\partial u_x}{\partial \xi} + \cos \Phi \frac{\partial u_y}{\partial \xi} \right) \\ & + \frac{1}{4} \sin^4 \Theta \sin 4\Phi - \kappa_{AF}^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} \sin^2 \Theta + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} \sin 2\Theta \right) \\ & = -2\delta_{AF} \dot{\Phi} \sin^2 \Theta - s \sin^2 \Theta, \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\ddot{u}_x - \kappa_{2el}^2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial \xi^2} - \lambda_2^{el} \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} \cos 2\Theta \cos \Phi + \frac{1}{2} \lambda_2^{el} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \sin 2\Theta \sin \Phi = -2\delta_{el} \dot{u}_x, \quad (4.22)$$

$$\ddot{u}_y - \kappa_{2el}^2 \frac{\partial^2 u_y}{\partial \xi^2} - \lambda_2^{el} \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} \cos 2\Theta \sin \Phi - \frac{1}{2} \lambda_2^{el} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \sin 2\Theta \cos \Phi = -2\delta_{el} \dot{u}_y, \quad (4.23)$$

$$\ddot{u}_z - \kappa_{1el}^2 \frac{\partial^2 u_z}{\partial \xi^2} + \lambda_1^{el} \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} \sin 2\Theta = -2\delta_{el} \dot{u}_z, \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} \text{де } \omega_m^2 &= \gamma^2 H_{ex} H_{an}, \omega_s^2 = \gamma^2 H_{ex} H_{curr}, \delta_{AF} = \frac{\gamma_{AF}}{\omega_m} = \frac{1}{2} \alpha_G \sqrt{\frac{H_{ex}}{H_{an}}}, \delta_{el} = \\ & \frac{\gamma_{elas}}{\omega_m}, \tau = \omega_m t, \xi = kz, s = \frac{\omega_s^2}{\omega_m^2}, \kappa_{AF}^2 = \frac{c^2 k^2}{\omega_m^2}, \kappa_{2el}^2 = \frac{c_{44}}{\rho} \frac{k^2}{\omega_m^2}, \kappa_{1el}^2 = \frac{c_{11}}{\rho} \frac{k^2}{\omega_m^2}, \lambda_1^{AF} = \\ & \frac{\gamma^2 H_{ex} k}{M_{sat} \omega_m^2} \left(\frac{1}{2} \lambda_{11} - \lambda_{12} \right), \lambda_2^{AF} = \frac{\gamma^2 H_{ex} k}{M_{sat} \omega_m^2} \lambda_{44}, \lambda_1^{el} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{1}{2} \lambda_{11} - \lambda_{12} \right) \frac{k}{\omega_m^2}, \lambda_2^{el} = \frac{\lambda_{44}}{\rho} \frac{k}{\omega_m^2} \end{aligned}$$

Будемо шукати розв'язок (4.17), (4.18) у вигляді

$$\Theta(\tau, \xi) = \Theta_c + f(\xi - a\tau), \quad \Phi(\tau, \xi) = -\frac{s\tau}{2\delta_{AF}},$$

де $f(\xi - a\tau) \ll \Theta_c$, a – деяка константа. Розкладаючи в ряд Тейлора

$$\begin{aligned} \sin \Theta &\approx \sin \Theta_c + f \cos \Theta_c \\ \cos \Theta &\approx \cos \Theta_c - f \sin \Theta_c \\ \sin^2 \Theta &\approx \sin^2 \Theta_c + f \sin 2\Theta_c \\ \cos^2 \Theta &\approx \cos^2 \Theta_c - f \sin 2\Theta_c, \end{aligned}$$

З (4.20) отримаємо

$$(a^2 - \kappa_{AF}^2) f'' - \frac{1}{2} \frac{s^2}{4\delta_{AF}^2} \sin 2\Theta_c - \lambda_1^{AF} (\sin 2\Theta_c + 2f \cos 2\Theta_c) \frac{\partial u_z}{\partial \xi} - \frac{1}{2} \left(-\frac{s^2}{4\delta_{AF}^2} + \frac{7}{4} f \sin 2\Theta_c \right) (\sin 2\Theta_c + 2f \cos 2\Theta_c) = 2a\delta_{AF} f' \Rightarrow$$

$$(a^2 - \kappa_{AF}^2) f'' - \lambda_1^{AF} (\sin 2\Theta_c + 2f \cos 2\Theta_c) \frac{\partial u_z}{\partial \xi} - \frac{f}{2} \left(\frac{7}{4} \sin 2\Theta_c - \frac{s^2}{2\delta_{AF}^2} \cos 2\Theta_c \right) = 2a\delta_{AF} f',$$

У випадку $f = 0$ маємо

$$\frac{\partial u_z}{\partial \xi} = 0 \Rightarrow u_z = 0,$$

тобто у першому наближенні $u_z \approx bf$ і отримується

$$(a^2 - \kappa_{AF}^2) f'' - \lambda_1^{AF} \sin 2\Theta_c b f' - \frac{f}{2} \left(\frac{7}{4} \sin 2\Theta_c - \frac{s^2}{2\delta_{AF}^2} \cos 2\Theta_c \right) = 2a\delta_{AF} f' \Rightarrow$$

$$f'' + \frac{\lambda_1^{AF} \sin 2\Theta_c b + 2a\delta_{AF}}{\kappa_{AF}^2 - a^2} f' + \frac{\frac{7}{8} \sin 2\Theta_c - \frac{s^2}{4\delta_{AF}^2} \cos 2\Theta_c}{\kappa_{AF}^2 - a^2} f = 0, \quad (4.25)$$

Дисипативний коефіцієнт нуль якщо $\lambda_1^{AF} \sin 2\Theta_c b + 2a\delta_{AF} = 0$. Рівняння (4.24) дає

$$f'' - \frac{\frac{1}{b} \lambda_1^{el} \sin 2\Theta + 2\delta_{el} a}{\kappa_{1el}^2 - a^2} f' = 0, \quad (4.26)$$

Дисипативний коефіцієнт нуль якщо $\frac{1}{b} \lambda_1^{el} \sin 2\Theta + 2\delta_{el} a = 0$. Порівнюючи ці два рівняння для a, b можна знайти

$$b = -\frac{\lambda_1^{el} \sin 2\Theta}{2\delta_{el}} \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{\lambda_1^{AF} \lambda_1^{el} \sin^2 2\Theta}{4\delta_{el} \delta_{AF}} = a^2 \Rightarrow a = \frac{\sin 2\Theta_c}{2} \sqrt{\frac{\lambda_1^{AF} \lambda_1^{el}}{\delta_{el} \delta_{AF}}}$$

і розв'язок (4.25) є

$$f = A \sin \left[(\xi - a\tau) \sqrt{\frac{\frac{7}{8} \sin 2\Theta_c - \frac{s^2}{4\delta_{AF}^2} \cos 2\Theta_c}{\kappa_{AF}^2 - a^2}} + \phi \right],$$

для деяких констант A, ϕ , які можуть бути знайдені з початкових умов.

Перевіримо цей результат чисельно, для великих τ будемо шукати розв'язки у вигляді $\Theta(\xi, \tau) = F(\xi - a\tau)$, $u_z(\xi, \tau) = G(\xi - a\tau)$. Тоді рівняння (4.20), (4.24) дадуть

$$F'' + \frac{2a\delta_{AF}}{\kappa_{AF}^2 - a^2} F' + \frac{1}{\kappa_{AF}^2 - a^2} \left[\frac{s^2}{8\delta_{AF}^2} + \lambda_1^{AF} G' + \frac{3}{8} \sin^2 F - \frac{1}{2} \cos^2 F \right] \sin 2F = 0, \quad (4.27)$$

$$G'' + \frac{2\delta_{el}}{\kappa_{1el}^2 - a^2} G' - \frac{\lambda_1^{el}}{\kappa_{1el}^2 - a^2} F' \sin 2F = 0, \quad (4.28)$$

Відповідні програми в Додатку Г розв'язують ці рівняння та будують конфігураційні підпростори рис. 4.2.

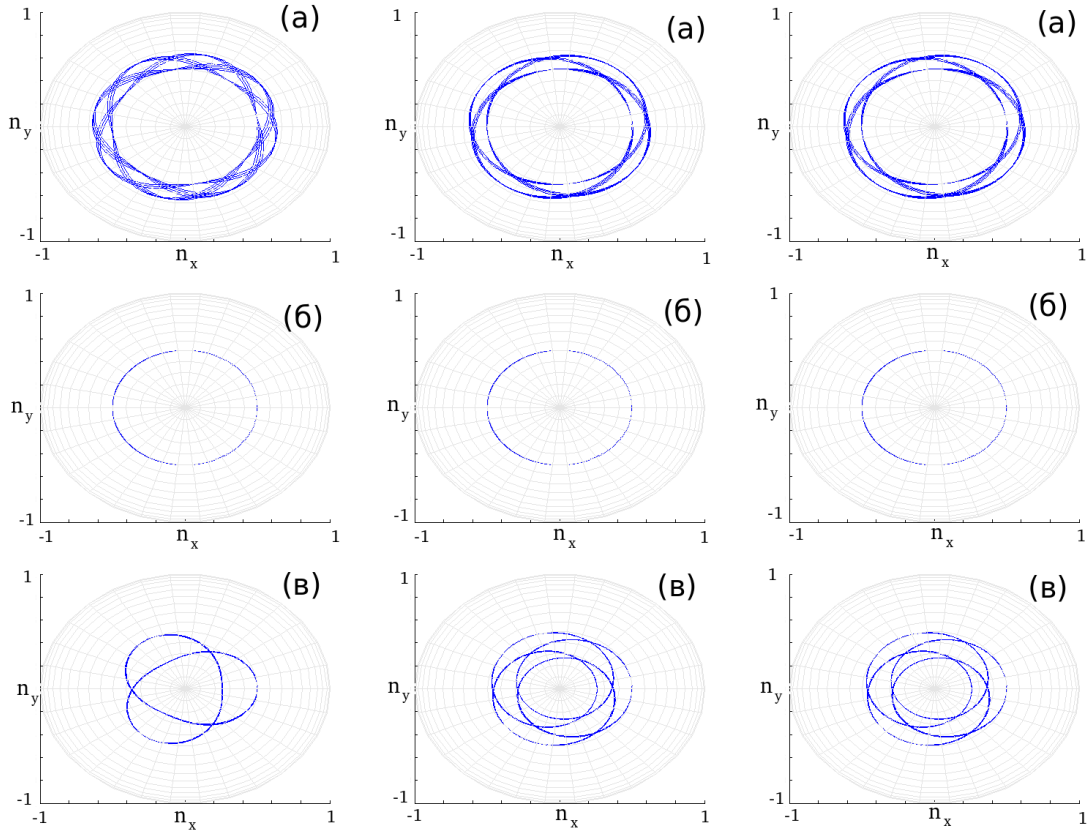


Рисунок 4.2 — Конфігураційний підпростір (n_x, n_y) . (а), (б), (в) — спіновий струм рівний 0.13, 0.15, 0.17 відповідно. Відношення κ_{AF}/κ_{el} (швидкості магнонів до швидкості фононів) для лівих, середніх та правих рисунків становлять 0.5, 1, 2 відповідно. Для побудови взято $\delta_{AF} = \delta_{el} = 0.1$, $\lambda_1^{AF} = \lambda_1^{el} = 10^{-5}$, $F(0) = \frac{\pi}{6}$, $F'(0) = G(0) = G'(0) = 0$.

Як можна бачити з рис. 4.2(а), (в), навіть при малих МП коефіцієнтах динаміка якісно змінюється: вектор Нееля здійснює нутаційний рух — коливання навколо циклу радіусу (4.19). У випадку 4.2(б) початковою точкою системи є положення на граничному циклі, оскільки він стійкий вона на ньому і залишається весь час. Отримані результати носять асимптотичний характер, тільки в цьому випадку вдалося спростити рівняння руху, фактично при великих τ МП зв'язок проявляється лише в залежності між Θ та u_z . Результати справедливі для невеликих відхилень від граничного циклу, цим і зумовлений вибір значень спінового струму поблизу $s = 0.15$, що відповідає руху по колу.

Висновки

Для одновимірного випадку, який може відповідати МП хвилі, що розповсюджується перпендикулярно нанопроволоці, досліджено динаміку при врахуванні спінового струму та згасання.

При відсутності МП зв'язку система може або притягуватися до стікого положення (цикл або одна з точок мінімуму потенціалу), або відштовхуватися від всіх положень рівноваги, в залежності від значень спінового струму. Отриманий радіус граничного циклу співпадає з загальною теорією [19]. Чисельний експеримент це також підтверджує.

При ненульових МП коефіцієнтах динаміка системи якісно змінюється, з'являються додаткові коливання вектора Нееля навколо граничного цикла. Для випадку коли ці відхилення малі та розв'язок рівнянь руху представляє собою біжучу хвилю, чисельно досліджено частину фазового простору системи.

ВИСНОВКИ

В роботі досліджено динаміку кубічного колінеарного АФ з МП зв'язком викликану спінполяризованим струмом. Розглядався найпростіший випадок АФ нанопроволоки. З огляду останніх теоретичних робіт по спінтроніці, дана робота є їх логічним продовженням.

В першому розділі проведений аналіз основних робіт, які мають безпосереднє відношення до даного дослідження. Як видно, вивчення АФ наноструктур є нетривіальною та важливою проблемою як теоретичної так і експериментальної фізики.

В другому розділі отримано рівняння руху для випадку коли вектор Нееля рухається поблизу положення рівноваги $(0, 0, 1)$, для моделі "замороженої" ґратки. Визначено відповідні дисперсійні співвідношення для МП та ПМ хвиль та як вони розмірно квантуються.

В третьому розділі для різних можливих граничних випадків (відсутність струму, МП коефіцієнтів або згасання) отримано критичні значення спінового струму, при якому змінюється тип динаміки системи.

В четвертому розділі вивчається динаміка поблизу граничного циклу. У випадку відсутності МП, показана наявність граничного циклу на фазовому просторі системи, радіус циклу знайдено аналітично з асимптотичних міркувань. При врахуванні МП зв'язку виникають додаткові коливання поблизу цього циклу (нутація), їх вивчено для випадку малих коливань. Аналітично отримані результати співпадають з чисельним розрахунком.

Дана робота показує нові особливості спін індукованої динаміки АФ з МП зв'язком, які можуть мати практичне застосування в спінтроніці при розробці нових елементів магнітної пам'яті.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. H. Reichlova, D. Kriegner, et al., Current-induced torques in structures with ultrathin IrMn antiferromagnets, *Phys. Rev. B.*, Vol. 92, 165424 (2015).
2. Peter Wadley, Bryn Howells, et al., Electrical switching of an antiferromagnet, Vol. 351, 6273, pp. 587-590, (2015).
3. X. Marti, I. Fina, et al., Room-temperature antiferromagnetic memory resistor, *Nature Materials*, Vol. 13, pp. 367–374 (2014).
4. X. Marti, I. Fina, T. Jungwirth, Prospect for Antiferromagnetic Spintronics, *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 51, 4, (2015).
5. Axel Hoffmann and Sam D. Bader, Opportunities at the Frontiers of Spintronics *Phys. Rev. Appl.*, 4, 047001 (2015).
6. Гомонай Е. В., Локтев В. М., Спинтроника антиферромагнитных систем (обзор) *Low Temp. Phys.*, 40, 1, (2014).
7. Гомонай Е. В., Локтев В. М., Использование обобщенных уравнений Ландау-Лифшица для описания динамики многоподрешеточного антиферромагнетика в присутствии спин-поляризованного тока *Low Temp. Phys.*, 41, 9, (2015).
8. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., *Механика*, М.: Физматлит, 2001.
9. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., *Электродинамика сплошных сред*, М.: Физматлит, 2005.
10. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., *Теория упругости*, М.: Физматлит, 2007.
11. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., *Введение в теорию квантованных полей*, М.: Наука, 1984.
12. Туров Е. А., Шавров В. Г., Нарушенная симметрия и магнитоакустические эффекты в ферро- и антиферромагнетиках, *УФН*, т.140, вып. 3, 1983.
13. Cheng, R., J. Xiao, and Brataas, A., Terahertz Antiferromagnetic Spin-Hall Nano-Oscillator, *Phys. Rev. Lett.*, 116, 207603 (2016).
14. Okazaki, A., Suemune, Y., Fushikami, T., The crystal structures of $KMnF_3$, $KFeF_3$, $KCoF_3$, $KNiF_3$, $KCuF_3$, *J. Phys. Soc. Japan.*, 14, 1823-1824 (1959).
15. Becerra, C. C., Shapira, J., Oliveira, N. F., Crossover behavior of the magnetic phase boundary of the low-anisotropy antiferromagnet $KNiF_3$, *Phys. Rev. B*, Vol. 14, 9, 4 (1978).

16. Nouet, F., Zarembowitch A., et al., Determination of T_N for $KNiF_3$ through elastic, magneto-optical and heat capacity measurements Appl. Phys. Lett., Vol. 21, 4 (1972).
17. Ganot, F., Dugautier, S., Moch, P., Nouet, F., Brillouin study of phonons, magnons and magnetoelastic coupling in the antiferromagnet $KNiF_3$, J. Appl. Phys., 52 (3), (1981).
18. Заславский Г. М., Стохастичность динамических систем М.: Наука, 1984
19. Арнольд В. И., Теория катастроф, М.: Наука, 1990.
20. Дьярмати И., Неравновесная термодинамика: Теория поля и вариационные принципы, М.: Мир, 1974.

ДОДАТОК А

Густина енергії колінеарного АФ дається виразом

$$\mathcal{W} = -\frac{1}{4}M_{sat}H_{an} (n_x^4 + n_y^4 + n_z^4),$$

Нормованість вектора Нееля $|\mathbf{n}| = 1$ дає можливість перейти до нових змінних Θ, Φ як

$$\begin{aligned} n_x &= \sin \Theta \cos \Phi, \\ n_y &= \sin \Theta \sin \Phi, \\ n_z &= \cos \Theta, \end{aligned}$$

Враховуючи це, густина енергії записується як

$$\mathcal{W} = -\frac{1}{4}M_{sat}H_{an} \left(\sin^4 \Theta \left[1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\Phi \right] + \cos^4 \Theta \right),$$

Її екстремуми задовольняють рівнянням

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \Theta} = \frac{1}{2}M_{sat}H_{an} \sin 2\Theta \left(\cos 2\Theta + \frac{1-\cos 2\Theta}{4} \sin^2 2\Phi \right) = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \Phi} = \frac{1}{4}M_{sat}H_{an} \sin^4 \Theta \sin 4\Phi = 0, \end{cases}$$

Матриця Гессе має вигляд

$$\hat{H} = M_{sat}H_{an} \begin{pmatrix} \cos 4\Theta + \frac{\sin 2\Phi}{4} (\cos 2\Theta - \cos 4\Theta) & \frac{1}{2} \sin^2 \Theta \sin 2\Theta \sin 4\Phi \\ \frac{1}{2} \sin^2 \Theta \sin 2\Theta \sin 4\Phi & \sin^4 \Theta \cos 4\Phi \end{pmatrix},$$

Розв'язуючи систему рівнянь, ми отримаємо критичні точки, які для зручності представлені у наступній таблиці

$\Phi \backslash \Theta$	0 та π	$\pi/4$ та $3\pi/4$	$\pm \arcsin \sqrt{2/3}$	$\pi/2$
$0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$	$-1/4$		$-1/12$	$-1/4$
$\pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4$	$-1/4$	$-1/8$		$-1/6$

Мінімумом $\mathcal{W}/M_{sat}H_{an} \in -1/4$, максимуму відповідає $-1/12$, значення в сідлових точках $-1/6, -1/8$.

ДОДАТОК Б

Розглянемо густину функції Лагранжа $\mathcal{L}(q, \dot{q}, \nabla q)$, для якої узагальнена координата є функцією часу та просторових координат. Зафіксуємо деякі моменти часу t_1, t_2 та об'єм простору V . Оскільки задача механіки полягає в отриманні закону руху в момент часу t_2 якщо відоме положення системи в початковий момент часу t_1 , то варіація координати δq має бути рівна нулю в ці моменти часу. На поверхні фіксованого об'єму V узагальнена координата задовольняє граничним умовам, які також повинні бути задані додатково, оскільки залежать від окремо досліджуваної задачі. В силу цих умов варіація узагальненої координати на поверхні, що оточує об'єм, S також рівна нулю. Маємо наступні умови, що їх мають задовольняти варіації

$$\begin{cases} \delta q(t_1, \mathbf{r}) = \delta q(t_2, \mathbf{r}) = 0, \\ \delta q(t, \mathbf{r})|_{\mathbf{r} \in S} = 0, \end{cases}$$

Рівняння руху може бути отримане з варіаційного принципу для функціоналу дії

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V dV \mathcal{L}(q, \dot{q}, \nabla q),$$

Умова мінімальності функціоналу є $\delta S = 0$. Варіація лагранжіану записується як

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} + \partial_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i q)} \delta (\partial_i q),$$

Це може бути переписано у вигляді

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} = & \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \partial_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i q)} \right) \delta q \\ & + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta q \right) + \partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i q)} \delta q \right) \end{aligned}$$

Враховуючи початкові та граничні умови маємо

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} + \partial_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i q)} = 0$$

За наявності дисипації (і/або накачки енергії), вираз справа вже не рівний нулю, а дорівнює похідній від функції Релея \mathcal{R} по узагальненій швидкості

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} + \partial_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i q)} = - \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{q}}$$

Отримане рівняння руху для однієї узагальненої координати легко узагальнюються на випадок системи, що описується деяким набором цих координат

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\mu} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_\mu} + \partial_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i q_\mu)} = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{q}_\mu}, \mu = \overline{1, n},$$

де n — число узагальнених координат.

ДОДАТОК В

Рівняння руху (4.17), (4.18) переписуються у вигляді

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, \\ \dot{y}_2 = \frac{1}{2}y_4^2 \sin 2y_1 - 2\delta y_2 + \frac{1}{2}(\sin^2 y_1 [1 - \frac{1}{2}\sin^2 2y_3] - \cos^2 y_1) \sin 2y_1, \\ \dot{y}_3 = y_4, \\ \dot{y}_4 = -2y_2y_4 \cot y_1 - \frac{1}{4}\sin^2 y_1 \sin 4y_3 - 2\delta y_4 - \frac{\omega_s^2}{\omega_m^2}, \end{cases}$$

де $y_2 = \Theta$, $y_4 = \Phi$.

Функція, що задає систему диференціальних рівнянь

```
function dy = ode_mag_total(t,y,d,s)
% задання ДР
dy = zeros(4,1);
global d; global s;
dy(1) = y(2); %\dot Theta
dy(2) = 0.5*(y(4)^2)*sin(2*y(1)) - 2*d*y(2) +...
    0.5*((sin(y(1)))^2)*(1-0.5*sin(2*y(3))^2) - cos(y(1))^2)...
    *sin(2*y(1)); % \ddot Theta
dy(3) = y(4); %\dot Phi
dy(4) = -2*y(2)*y(4)/tan(y(1)) - 0.25*(sin(y(1))^2)*sin(4*y(3))-...
    2*d*y(4) - s; %\ddot Phi
end
```

Функція, що розв'язує цю систему

```
function Solver_mag_tot()
% Розв'язок ДР ode_mag.m та його графічна побудова
global d; d = 0.1; % відношення коефіцієнту згасання до частоти
global s; s = 0.19347328; % спіновий струм !!! s=0.19328;
%s_min=0.19308672; s_max = 0.19347328 % = s+-10^(-3)s
Tn=500; % час інтегрування
N=5*10^3; % кількість інтервалів розбиття часу
tau = linspace(0, Tn,N); % дискретизація часу
To = pi/8; % початкове значення тета
[T,Y] = ode45(@ode_mag_total,tau,[To 0 0 0]); % розв'язок ДР
plot(sin(Y(:,1).*cos(Y(:,3))),sin(Y(:,1).*sin(Y(:,3))));
hold on; grid on;
R = sqrt((4/7)*(1-0.25*s^2/d^2)); % радіус граничного циклу
axis([-0.3 0.3 -0.3 0.3]);
end
```

ДОДАТОК Г

Рівняння (4.27), (4.28) записуються як

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -\frac{2a\delta_{AF}}{\kappa_{AF}^2 - a^2}y_2 - \frac{1}{\kappa_{AF}^2 - a^2} \left[\frac{s^2}{8\delta_{AF}^2} + \lambda_1^{AF}y_4 + \frac{3}{8}\sin^2 y_1 - \frac{1}{2}\cos^2 y_1 \right] \sin 2y_1, \\ y_3' = y_4, \\ y_4' = -\frac{2\delta_{el}}{\kappa_{1el}^2 - a^2}y_4 + \frac{\lambda_1^{el}}{\kappa_{1el}^2 - a^2}y_2 \sin 2y_1 \end{cases}$$

де $y_2 = F$, $y_4 = G$.

Функція, що задає систему рівнянь

```
function dy = ME_ode(t,y,dAF,del,l1AF,l1el,kAF,k1el,s)
```

```
% функція, що задає ДР
```

```
global dAF; global del;
```

```
global l1AF; global l1el;
```

```
global kAF; global k1el;
```

```
global s;
```

```
R = sqrt((4/7)*(1-0.25*s^2/dAF^2));
```

```
a = R*sqrt(1-R^2)*sqrt(l1AF*l1el/(dAF*del));
```

```
dy = zeros(4,1);
```

```
dy(1) = y(2); %\dot Theta
```

```
dy(2) = - (2*a*dAF/(kAF^2-a^2))*y(2) - sin(2*y(1))*(s^2/(8*dAF^2) + ...  
l1AF*y(4)+(3/8)*sin(y(1))^2 - ...
```

```
0.5*cos(y(1))^2)/(kAF^2-a^2); % \ddot Theta
```

```
dy(3) = y(4); %\dot Uz
```

```
dy(4) = -(2*del/(k1el^2-a^2))*y(4) + ...
```

```
l1el*y(2)*sin(y(1))/(k1el^2-a^2); % \ddot Uz
```

```
end
```

Функція, що розв'язує цю систему

```
function solver_ME_ode()
```

```
%функція для розв'язку ME_ode.m
```

```
global dAF; dAF = 0.1;%коефіцієнт згасання в магнітній системі
```

```
global del; del = 0.1;%коефіцієнт згасання в пружній системі
```

```
global l1AF; l1AF = 10^-5;%коефіцієнт  $\lambda_1^{AF}$ 
```

```
global l1el; l1el = 10^-5;%коефіцієнт  $\lambda_1^{el}$ 
```

```
global kAF; kAF = 1;%відносний хвильовий вектор магнонів
```

```
global k1el; k1el = 1/2;%відносний хвильовий вектор фононів
```

```
global s; s = 0.15;%відносне значення спінового струму
```

```

R = sqrt((4/7)*(1-0.25*s^2/dAF^2)); %радіус граничного циклу
a = R*sqrt(1-R^2)*sqrt(l1AF*l1el/(dAF*del)); %параметр а
Tn=10^2; %час інтегрування
N=5*10^3;% кількість інтервалів розбиття часу
tau = linspace(0, Tn,N); %дискретизація часу
To =pi/6; %початкове значення тета
[T,Y] = ode45(@ME_ode,tau,[To 0 0 0]); % розв'язок ДР
Phi = -s*T/(2*dAF);%асимптотика кута Φi
plot(sin(Y(:,1)).*cos(Phi),sin(Y(:,1)).*sin(Phi));
hold on; grid on;
end

```