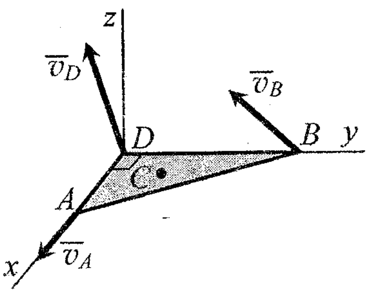
Замечание 2. Выражения v_C, a_C через φ по 1-му способу и через α по 2-му способу различны (хотя при подстановке конкретного значения $\varphi = \alpha = 60^o$ числовые значения совпадают) ! Это объясняется тем, что полученные геометрическим способом формулы (6) и (13) выведены лишь для конкретного положения AB, когда C находится в центре обода. Причем сравнивать формулы по двум способам корректно лишь при одном единственном значении $\varphi = \alpha = 60^o$ (в рамках модели 1-го способа лишь этот угол единственно возможен в момент, когда C в центре обода).

Ответ. $v_C = \sqrt{3}\, v$, $a_C = \dfrac{v^2}{R}$.



Задача К2 (7 баллов). Треугольная пластина ABD свободно движется в пространстве. Угол при вершине D прямой. Известно также, что $AD \le BD$ (величины AD, BD не заданы). В некоторый момент времени: $v_A = v$, вектор $\overline{v}_A$ сонаправлен оси x ; $v_B = v$, вектор $\overline{v}_B$ лежит в верхней полуплоскости yz; $v_D = \sqrt{2}\, v$, вектор $\overline{v}_D$ лежит в верхнем полупространстве xyz (оси координат указаны на рисунке). Найдите v_C – скорость центра тяжести пластины. Пластину считаем однородной.

Решение. Твердое тело ABD в пространстве имеет 6 степеней свободы. Имеем 6 условий для скоростей точек тела: три условия для A, два условия для B и одно условие для D:

$$v_{Ax} = v, \quad v_{Ay} = 0, \quad v_{Az} = 0. \quad (1)$$

$$v_{Bx} = 0, \quad v_{By}^2 + v_{Bz}^2 = v^2. \quad (2)$$

$$v_{Dx}^2 + v_{Dy}^2 + v_{Dz}^2 = 2v^2. \quad (3)$$

Кроме того, из условия следует, что $v_{Bz} \ge 0$, $v_{Dz} \ge 0$.

По теореме о проекциях скоростей для твердого тела в пространстве:

$$np_{AB}(\overline{v}_A) = np_{AB}(\overline{v}_B). \quad (4)$$

$$np_{AB}(\overline{v}_A) = v_A \cdot \cos D\hat{A}B = v \cdot (AD / AB),$$

$$np_{AB}(\overline{v}_B) = np_{AB}(\overline{v}_{By} + \overline{v}_{Bz}) = np_{AB}(\overline{v}_{By}) + np_{AB}(\overline{v}_{Bz}) = |v_{By}| \cdot \cos D\hat{B}A + 0 = -v_{By} \cdot (BD / AB).$$

(Знак «-» появляется, так как для удовлетворения (4) должно быть $v_{By} < 0$). Подставляем оба выражения в (4): $v \cdot AD = -v_{By} \cdot BD$, откуда

$$v_{By} = -\frac{AD}{BD} \cdot v. \quad (5)$$

Используя вторую часть условия (2) и условие $v_{Bz} \ge 0$, найдем:

$$v_{Bz} = \frac{\sqrt{BD^2 - AD^2}}{BD} \cdot v. \quad (6)$$

Здесь существенно, что по условию $BD \ge AD$, иначе задача не имела бы смысла.

Теорема о проекциях скоростей твердого тела, записанная последовательно для AD (проекции берутся на прямую x) и BD (на прямую y), дает соотношения:

$$v_{Dx} = v_{Ax} = v, \quad v_{Dy} = v_{By} = -\frac{AD}{BD} \cdot v. \quad (7)$$

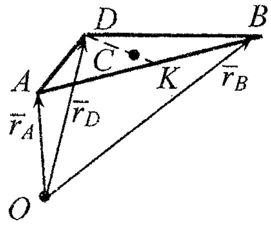
Из условия (3): $v^2 + \dfrac{AD^2}{BD^2} v^2 + v_{Dz}^2 = 2v^2$. Отсюда, с учетом $v_{Dz} \ge 0$:

$$v_{Dz} = \frac{\sqrt{BD^2 - AD^2}}{BD} \cdot v\,. \qquad (8)$$

Теперь легко выразить скорость $\bar{v}_C$ через скорости вершин треугольника ABD.

Обозначим через K середину отрезка AB. Отложим радиус-вектора точек от некоторой неподвижной точки O:

$$\bar{r}_K = (\bar{r}_A + \bar{r}_B)/2\,. \qquad (9)$$



Центр тяжести однородного треугольника делит медиану DK в отношении $2:1$, т.е. $\overline{DC} = -2\,\overline{KC}$, $\bar{r}_C - \bar{r}_D = -2(\bar{r}_C - \bar{r}_K)$,

$$3\bar{r}_C = 2\bar{r}_K + \bar{r}_D\,. \qquad (10)$$

Из (9), (10): $\bar{r}_C = (\bar{r}_A + \bar{r}_B + \bar{r}_D)/3$. Дифференцируем по времени:

$$\bar{v}_C = \frac{\bar{v}_A + \bar{v}_B + \bar{v}_D}{3}\,. \qquad (11)$$

Проецируем (11) на оси координат, с учетом (1), (2), (5), (6), (7), (8):

$$v_{Cx} = \frac{2}{3}v\,, \qquad v_{Cy} = -\frac{2}{3}\frac{AD}{BD} \cdot v\,, \qquad v_{Cz} = \frac{2}{3}\frac{\sqrt{BD^2 - AD^2}}{BD} \cdot v\,.$$

$$v_C = \sqrt{v_{Cx}^2 + v_{Cy}^2 + v_{Cz}^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}v\,.$$

Замечание 1. Примечательно, что в итоге величина v_C не зависит от отношения AD/BD несмотря на то, что проекции $\bar{v}_B, \bar{v}_D, \bar{v}_C$ на оси координат зависят от AD/BD ! Такой эффект возникает за счет подбора величины v_D в условии задачи.

Замечание 2. Обосновать (5) можно иначе. Выберем точку A в качестве полюса: $\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{\omega} \times \overline{AB}$. Из $\bar{v}_B - \bar{v}_A = \bar{\omega} \times \overline{AB}$ следует:

$$(\bar{v}_B - \bar{v}_A) \perp \overline{AB}\,. \qquad (12)$$

(Отсюда, кстати говоря, следуют $пр_{AB}(\bar{v}_B - \bar{v}_A) = 0$ и теорема (4)). Из (12):

$$(\bar{v}_B - \bar{v}_A) \cdot \overline{AB} = 0\,, \qquad (v_{Bx} - v_{Ax}) \cdot AB_x + (v_{By} - v_{Ay}) \cdot AB_y + (v_{Bz} - v_{Bz}) \cdot AB_z = 0\,. \qquad (13)$$

Обозначим $AD = a$. Так как $\bar{v}_B - \bar{v}_A = (-v,\ v_{By},\ v_{Bz})$, $\overline{AB} = (-AD,\ BD,\ 0)$, то из (13): $v \cdot AD + v_{By} \cdot BD = 0$, т.е. $v_{By} = -\dfrac{AD}{BD} \cdot v$.

Замечание 3. Обосновать (11) можно иначе, геометрическим способом. $\bar{v}_K = \bar{v}_A + \bar{\omega} \times \overline{AK}$. С другой стороны, $\bar{v}_K = \bar{v}_B + \bar{\omega} \times \overline{BK}$. Складывая два равенства и учитывая, что $\overline{AK} = -\overline{BK}$, получим:

$$\bar{v}_K = (\bar{v}_A + \bar{v}_B)/2\,. \qquad (14)$$

$\bar{v}_C = \bar{v}_K + \bar{\omega} \times \overline{KC}$. С другой стороны, $\bar{v}_C = \bar{v}_D + \bar{\omega} \times \overline{DC}$. Так как $\overline{DC} = -2\,\overline{KC}$, то $3\bar{v}_C = 2\bar{v}_K + \bar{v}_D$. Подставляя сюда (14), получим (11): $\bar{v}_C = \dfrac{\bar{v}_A + \bar{v}_B + \bar{v}_D}{3}$.

Ответ. $v_C = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}v\,.$