

## Тема 8. Динаміка генерації лазера.

### Лекція 8.

Рівняння опису роботи лазера. Матеріальні рівняння. Дворівнева молекула. Трирівнева та чотирирівнева молекули. Рівняння багатомодового лазера. Стаціонарна генерація лазера. Вплив системи енергетичних рівнів. Вплив просторової неоднорідності поля мод на характеристики лазерного випромінювання. Вплив спектральної неоднорідності активного середовища.

### Рівняння опису роботи лазера.

Лазер є джерелом оптичного випромінювання генераторного типу і як будь-який генератор має три основні елементи (рис. 1).

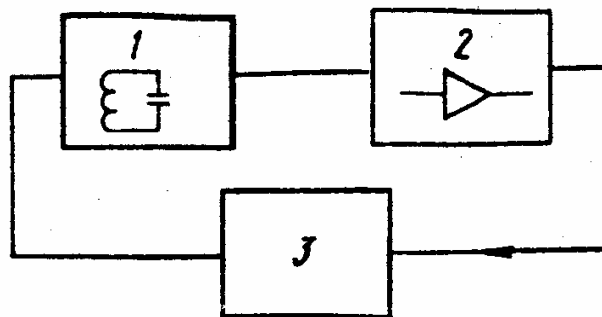


Рис. 1.

По-перше, резонансний елемент 1, який виділяє зі всієї сукупності можливих частот оптичного діапазону задані частоти; по-друге, підсилюючий елемент 2, який компенсує втрати енергії електромагнітного випромінювання в резонаторному елементі; і, по-третє, елемент зворотного зв'язку 3, який забезпечує зв'язок між випромінюванням, що потрапляє на вхід підсилюючого елемента і виходить з нього. Функції резонансного елемента і елемента зворотного зв'язку в лазерах виконує відкритий резонатор, який забезпечує разом з високою добротністю резонансних мод добре розрідження їх спектра. У вигляді підсилюючого елемента виступає квантова система з потрібною структурою енергетичних рівнів. Для опису роботи лазера необхідні рівняння квантової електродинаміки. Але оскільки лазер є системою з переважаючим індукційованим випромінюванням в моду, електромагнітне поле можна описати класичними рівняннями Максвела. В результаті – в переважній більшості випадків адекватним є, так званий напівкласичний опис, коли поле в лазері описується класично, а підсилююче середовище – квантово. Тому надалі

використовується саме такий підхід для аналізу роботи лазера. Вихідним будемо вважати напівкласичний опис і в кожному конкретному випадку вводитимемо допустимі додаткові спрощення.

### **Опис поля в резонаторі.**

Класичне поле в вакуумі, як відомо, описується рівняннями Максвела:

$$\begin{aligned} \text{а) } \operatorname{rot} \bar{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \\ \text{б) } \operatorname{rot} \bar{H} &= \frac{4\pi}{c} \bar{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{в) } \operatorname{div} \bar{D} = 0$$

$$\text{г) } \operatorname{div} \bar{B} = 0$$

Якщо ж простір зайнятий полем, заповнений середовищем, то до рівнянь (1) необхідно додавати матеріальні рівняння:

$$\begin{aligned} \text{а) } \bar{J} &= \gamma_0 \bar{E} \\ \text{б) } \bar{B} &= \bar{H} + 4\pi \bar{M} \\ \text{в) } \bar{D} &= \bar{E} + 4\pi \bar{P} \end{aligned} \quad (2)$$

які описують взаємодію поля з середовищем, зумовлену скінченною провідністю середовища  $\gamma_0$ , намагніченістю  $\bar{M}$  і поляризацією  $\bar{P}$ .  $\bar{M}$  і  $\bar{P}$  можна розділити на дві частини: нерезонансну, яка враховує вклад матриці (кристалічної ґратки):

$$M_0 = \frac{\mu_0 - 1}{4\pi} \bar{H}, \quad P_0 = \frac{\varepsilon_0 - 1}{4\pi} \bar{E}$$

і резонансну, за яку відповідають активні центри, що знаходяться в цій матриці і забезпечують підсилення електромагнітного поля. Далі будемо розглядати лише немагнітні середовища, у яких  $\mu_0 = 1$ .

Для опису поля в резонаторі перейдемо від рівнянь (1) до хвильового рівняння. Розглянемо детально випадок молекул з електродипольним переходом, тобто коли  $M = 0$ . Тоді, диференціюючи рівняння (1а) по

часові і підставляючи в нього  $\partial \bar{H} / \partial t$  з (1б) і  $j$  з (2а) і враховуючи  $\bar{B} = \bar{H}(\mu = 1)$ , отримуємо:

$$\text{rot rot } \bar{E} = -\frac{4\pi}{c} \gamma_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 D}{\partial t^2} \quad (3)$$

Отже, при  $\text{rot rot } \bar{E} = [\text{grad div} - \Delta] \bar{E}$  і з (2а) маємо  $\bar{D} = \bar{E} + 4\pi(\bar{P}_0 + \bar{P}) = \varepsilon_0 \left( E + \frac{4\pi \bar{P}}{\varepsilon_0} \right)$ , де  $\bar{P}$  - резонансна складова поляризації, а  $\varepsilon_0$  - діелектрична проникність матриці. Остаточню приходимо до хвильового рівняння:

$$\Delta \bar{E} - \text{grad div } \bar{E} - \frac{4\pi}{c^2} \gamma_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} - \frac{\varepsilon_0}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{P}}{\partial t^2} \quad (4)$$

Якщо середовище просторово однорідне, то в силу рівняння (1в)  $\text{grad div } \bar{E} = 0$ . Але якщо поле взаємодіє з середовищем суттєвим чином, то внаслідок зміни резонансної частини поляризації при насичених активних молекул неоднорідним полем середовище стає неоднорідним. Лазерні пучки з добрим наближенням можна вважати параксіальними, тобто комплексна амплітуда повільно змінюється в просторі і часі у порівнянні з довжиною хвилі і періодом коливань. З врахуванням поперечності електромагнітної хвилі це приводить до наступної нерівності:

$$\text{grad div } \bar{E} \ll \Delta \bar{E}.$$

Використовуючи повільність зміни комплексної амплітуди:

$$\left| \frac{1}{\Sigma} \frac{\partial \Sigma}{\partial t} \right| \ll \omega; \quad \left| \frac{1}{\Sigma} \frac{\partial \Sigma}{\partial r} \right| \ll k$$

де  $\omega$  і  $k$  - частота і хвильове число, можна поле і поляризацію представити у вигляді:

$$\bar{E}(\bar{r}, t) = \bar{\Sigma}(\bar{r}, t) e^{i(\omega t - kz)}; \quad \bar{P}(\bar{r}, t) = \bar{\Psi}(\bar{r}, t) e^{i(\omega t - kz)} \quad (5)$$

тут  $\bar{\Sigma}(\bar{r}, t)$  і  $\bar{\Psi}(\bar{r}, t)$  - повільні комплексні амплітуди поля і поляризації. Тоді рівняння (4) приводиться до параболічного вигляду:

$$\Delta_{\perp} \bar{E} - 2ik \left( \frac{\partial \bar{\Sigma}}{\partial z} - \frac{\sqrt{\epsilon_0}}{c} \frac{\partial \bar{\Sigma}}{\partial t} \right) - 4\pi i \frac{\gamma_0 \omega}{c^2} \bar{\Sigma} = -\frac{4\pi}{c^2} \omega^2 \bar{\Psi} \quad (6)$$

де  $\Delta_{\perp}$  - лапласіан за поперечними координатами відносно напрямку розповсюдження лазерних пучків; при отриманні рівняння (6) допущено:

$$\Delta \bar{E} \approx \left( \Delta_{\perp} \bar{\Sigma} - k^2 \bar{\Sigma} + 2ik \frac{\partial \bar{\Sigma}}{\partial z} \right) e^{i(\omega t - kz)};$$

$$\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \approx -i\omega \bar{\Sigma} e^{i(\omega t - kz)};$$

$$\frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} \approx -\left( \omega^2 \bar{\Sigma} + 2i\omega \frac{\partial \bar{\Sigma}}{\partial t} \right) e^{i(\omega t - kz)};$$

$$\frac{\partial^2 \bar{P}}{\partial t^2} \approx -\omega^2 \bar{\Psi} e^{i(\omega t - kz)}$$

Рівняння (6) практично у всіх випадках добре описує розповсюдження лазерних пучків. Оскільки нас цікавить поле в резонаторі, то можна від хвильового рівняння в частинних похідних (4) перейти до рівнянь у звичайних похідних, що в багатьох випадках зручніше. Врахуємо, що в резонаторі поле може існувати лише у вигляді власних коливань з дискретним набором резонансних частот. Загалом, це твердження, застосовується тільки до резонаторів закритого типу. У випадку ж відкритих резонаторів ситуація складніша, бо такі резонатори поряд з дискретним спектром власних частот володіють і суцільним спектром, оскільки випромінюють через відсутні бокові стінки. Але моди суцільного спектра мають дуже малу добротність і їх можна не розглядати, а зупинитись лише на модах дискретного спектра про що говорилося у попередніх лекціях. Таким чином, поле резонатора можна представити у вигляді:

$$\bar{E} = \sum_m e_m(t) \bar{E}_m(\bar{r}) + \bar{E}_c \quad (7)$$

де  $\bar{E}_c$  - поле мод суцільного спектра. Залишаючи лише перший доданок в (7), отримаємо з (6) наступне рівняння для амплітуди мод:

$$\frac{\partial^2 \bar{E}_m}{\partial t^2} + \frac{\omega_m}{Q_m} \frac{\partial \bar{E}_m}{\partial t} + \omega_m^2 \bar{E}_m = - \int_V \frac{\partial^2 \bar{P}}{\partial t^2} \bar{E}_m dV \quad (8)$$

де  $\omega_m$  - дійсна частина власної частоти, уявна частина (дифракційні втрати) включена в добротність. Добротність складається з кількох складових:

$$Q = (Q_s^{-1} + Q_c^{-1} + Q_v^{-1} + Q_{dif}^{-1})^{-1} \quad (9)$$

де  $Q_s$  - добротність, обумовлена втратами на дзеркалах (поглинання і випромінювання з резонатора),  $Q_c$  - випромінювання через відкриті частоти резонатора),  $Q_v = \omega / 4\pi\gamma_0$  - об'ємні втрати,  $Q_{dif}$  - дифракційні втрати.

Добротність реальних резонаторів досить висока ( $Q \approx 10^7$ ), але джерела збудження не дуже інтенсивні. Це призводить до того, що розв'язки рівнянь (8) є квазігармонічні коливання з комплексною амплітудою, яка повільно змінюється. Використовуючи це, введено позначення:

$$\bar{E}_m = 1/2 [\Sigma_m(t) e^{-i\omega t} + \Sigma_m(t) e^{i\omega t}] \quad (10)$$

де  $\bar{E}_m$  - повільна функція часу в масштабі  $T = 2\pi / \omega$ . Використовуючи повільність функції і усереднюючи по періоду  $T$ , отримаємо вкорочені рівняння для комплексної амплітуди моди:

$$\frac{\partial \Sigma_m}{\partial t} + \left[ \frac{1}{2T_p} + i(\omega_m - \omega) \right] \Sigma_m = \frac{1}{2} i \omega P_m \quad (11)$$

де:

$$\frac{1}{2} [P_m(t)e^{-i\omega t} + P_m^*(t)e^{i\omega t}] = \int_v \bar{P} \bar{E}_m dV \quad (12)$$

а  $2T_p = 2Q/\omega$ . Рівняння (11) еквівалентне (8), якщо виконуються умови:

$$Q \gg 1; |\omega - \omega_m| \ll \omega.$$

Оцінімо виконання вказаних умов:

$$Q \approx 10^7 \gg 1; |\omega - \omega_m| < \Delta\omega,$$

де  $\Delta\omega$  - напівширина смуги підсилення активного середовища. В оптичному діапазоні,  $\Delta\omega \ll \omega$ , отже,  
 $|\omega - \omega_m| \ll \omega$ .

Таким чином, зміна інтенсивності мод лазерного резонатора описується рівнянням (111) в звичайних похідних першого порядку.

### **Матеріальні рівняння.**

З рівнянь які описують поле в резонаторі, випливає, що взаємодія з середовищем обумовлена резонансною частиною поляризації. Якщо в середовищі є активні молекули з об'ємною густиною  $N$ , то резонансна частина поляризації може бути представлена через матрицю густини  $\rho(t, \bar{r})$ , усереднену по нескінченно малому у порівнянні з  $\lambda^3$  об'єму:

$$\bar{P} = N S p(\bar{\mu} \rho) \quad (13)$$

де  $\bar{\mu}$  - оператор дипольного моменту молекули. Елементи матриці густини підкоряються наступним рівнянням:

$$а) \frac{\partial \rho_{mn}}{\partial t} = -i\omega_{mn}^0 \rho_{mn} + \frac{1}{\hbar} \bar{E} \sum_l (\bar{\mu}_{ml} \rho_{ln} - \bar{\mu}_{lm} \rho_{ml}) - \frac{\rho_{mn}}{T_2^{mn}} \quad (14)$$

$$б) \frac{\partial \rho_{mm}}{\partial t} = \sum_l (f_{ml} \rho_{mn} f_{lm} \rho_{ll} + \frac{1}{\hbar} \bar{E} \sum_l (\bar{\mu}_{ml} \rho_{ml} - \bar{\mu}_{lm} \rho_{ml})),$$

з врахуванням умови нормування:

$$\sum_m \rho_{mm} = 1 \quad (15)$$

(за законом збереження числа активних центрів), і співвідношення ермітовості матриці густини  $\rho_{mn} = \rho_{nm}^*$ . Відмітимо, що діагональні елементи матриці густини описують населеність відповідних рівнів, а недіагональні – поляризацію активного центру на переході  $m \rightarrow l$ . В наведених вище рівняннях введені наступні позначення:  $\rho_{mn}$  - елементи матриці густини,  $\bar{\mu}_{mn}$  - матричний елемент дипольного моменту молекули,  $T_2^{mn}$  - час релаксації недіагонального елемента матриці густини, що практично завжди є оберненою спектральною шириною переходу  $mn$ ,  $\omega_0$  - частота переходу між енергетичними рівнями, а  $f_{mn}$  - імовірність релаксаційного переходу між ними.

Для лазера характерний квазімонохроматичний характер поля, тобто:

$$\bar{E}(\bar{r}, t) = 1/2 \sum [\bar{\Sigma}_{mn}(\bar{r}, t) e^{-i\omega_{mn}t} + \text{к.с.}] \quad (16)$$

де  $\bar{\Sigma}_{mn}$  - амплітуда резонансного поля з переходом  $mn$ . В цьому випадку компоненти матриці густини молекул, які знаходяться в полі вигляду (16) можуть бути записані так:

$$\rho_{mn} = \sigma_{mn}(t) e^{i\omega_{mn}t} \quad (17)$$

Якщо енергія взаємодії поля з молекулою і ширина смуги переходу менше енергетичної щілини між рівнями молекули, то:

$$\frac{|\bar{\mu}\bar{E}|}{\hbar} \ll \omega_0, T_2^{-1} \ll \omega_0 \quad (18)$$

а комплексна амплітуда  $\sigma_{mn}(t)$  є повільною функцією часу. Підставивши (17) в (14) і усереднюючи по періоду, приходимо до вкорочених рівнянь:

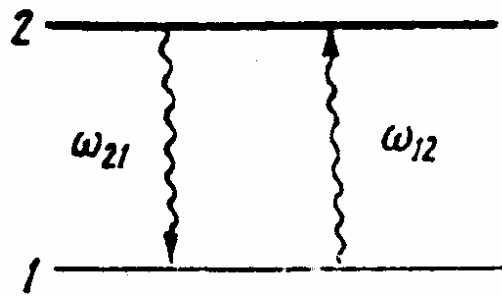
$$\frac{\partial \sigma_{mn}}{\partial t} = - \left[ \frac{1}{T_2^{mn}} + i(\omega_0^{mn} - \omega_{mn}) \right] \sigma_{mn} + \frac{i}{2\hbar} \sum_l (\bar{\mu}_{ml} \bar{\Sigma}_{ml} \sigma_{ln} - \bar{\mu}_{ln} \bar{\Sigma}_{ln} \sigma_{ml});$$

$$\frac{\partial \sigma_{mn}}{\partial t} = -\sum_l (f_{ml} \sigma_{ml} - f_{lm} \sigma_{ll} + \frac{1}{2\pi} \sum_l (\bar{\mu}_{ml} \bar{\Sigma}_{ml} \sigma_{lm} - \bar{\mu}_{lm} \bar{\Sigma}_{ml} \sigma_{ml})) \quad (19)$$

Рівняння (19) описують поведінку молекули при електродипольній взаємодії поля з середовищем з врахуванням всіх рівнів даної молекули. Але в реальній ситуації необхідності у врахуванні всіх рівнів немає. Звичайно досить врахувати максимум чотири рівні, так як населеність інших рівнів практично не є суттєвою. В результаті кількість рівнянь в системі (19) значно скорочується, що спрощує розв'язок задачі про роботу лазера. Зупинимось на найбільш важливих випадках, класифікуючи їх за числом рівнів, які вимагають їх врахування.

### *Дворівнева молекула.*

Зі всіх існуючих в молекулі рівнів вибираються лише два і враховуються переходи між ними (**рис. 2**)  $\omega_{ij} = (E_i - E_j) / \hbar$ .



**Рис. 2.**

Тоді отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial t} &= -[T_2^{-1} + i(\omega_0 - \omega)] \sigma_{21} - i(\bar{\mu}_{21} \bar{\Sigma}_{21} / 2\hbar)(\sigma_{22} - \sigma_{11}); \\ \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial t} &= -(f_{12} \sigma_{11} - f_{21} \sigma_{22}) + i(\bar{\mu}_{12} \bar{\Sigma}_{12} \sigma_{21} - \bar{\mu}_{21} \bar{\Sigma}_{21} \sigma_{21}^*) / 2\hbar; \\ \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial t} &= -(f_{21} \sigma_{22} - f_{12} \sigma_{11}) + i(\bar{\mu}_{21} \bar{\Sigma}_{21} \sigma_{21}^* - \bar{\mu}_{12} \bar{\Sigma}_{12} \sigma_{21}) / 2\hbar \end{aligned} \quad (20)$$

де врахована ермітовість матриці густини. Оскільки існує умова нормування (15), то система трьох рівнянь (20) зводиться до системи двох рівнянь. Введемо нові змінні:  $D = \sigma_{22} - \sigma_{11}$  і час релаксації  $T = f_{mn}^{-1}$  замість імовірності  $f_{mn}$ . Тоді позначивши  $D_0 = \sigma_{22}^0 - \sigma_{11}^0$ , де  $\sigma_{mn}^0$  -



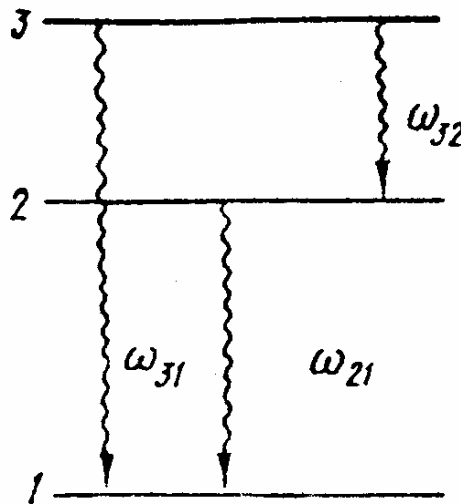
рівноважна матриця густини (при відсутності випромінювання), отримаємо

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial t} &= -\left[T_2^{-1} + i(\omega_0^{21} - \omega_{21})\right]\sigma_{21} - i(\bar{\mu}_{21}\bar{\Sigma}_{21}D / 2\hbar \\ \frac{\partial D}{\partial t} &= (D - D_0)T_1^{-1} - i(\bar{\mu}_{12}\bar{\Sigma}_{12}\sigma_{21} - \bar{\mu}_{21}\bar{\Sigma}_{21}\sigma_{21}^*) / 2\hbar\end{aligned}\quad (21)$$

$T_1 = f_{21}^{-1}; \omega_0^{21}$  - частоти максимуму смуги люмінесценції активного середовища.

### **Трирівнева молекула.**

Одне з широко використовуваних активних середовищ – рубін – працює (як ми розглядали в попередніх лекціях) за трирівневою схемою (рис. 3).



**Рис. 3.**

Щілини між цими рівнями суттєво перевищують енергію теплових квантів, тобто  $\hbar\omega_{in} \gg kT$ , що дозволяє знехтувати тепловими переходами знизу догори. Тоді рівняння представляються в наступному вигляді:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial t} &= -\left[T_2^{-1} + i(\omega_0^{21} - \omega_{21})\right]\sigma_{21} - i(\bar{\mu}_{21}\bar{\Sigma}_{21}(\sigma_{11} - \sigma_{22}) / 2\hbar; \\ \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial t} &= f_{13}(\sigma_{11} - \sigma_{33}) - (f_{31} + f_{32})\sigma_{33};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{22}}{\partial t} &= -f_{21}\sigma_{22} + f_{32}\sigma_{33} + (\bar{\mu}_{21}\bar{\Sigma}_{21}\sigma_{12} - \bar{\mu}_{12}\bar{\Sigma}_{12}\sigma_{21})/2\hbar \\ \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial t} &= f_{21}\sigma_{22} + f_{31}\sigma_{33} - f_{13}(\sigma_{11} - \sigma_{33}) + i(\bar{\mu}_{12}\bar{\Sigma}_{12}\sigma_{21} - \bar{\mu}_{21}\bar{\Sigma}_{21}\sigma_{12})/2\hbar\end{aligned}\quad (22)$$

де  $f_{13}$  - імовірність індукованих переходів під дією некогерентного випромінювання накачування. Для опису випромінювання в лазерній моді необхідно знати лише  $\sigma_{21}$ , тому спростимо систему рівнянь (22), переходячи до еквівалентної дворівневої схеми. Врахуємо, що імовірність релаксаційного переходу з рівня 3 на рівень 2 досить велика (порядку  $10^8$ ). Це дозволяє знехтувати похідною  $\partial \sigma_{33} / \partial t$  і отримати:

$$\sigma_{33} = \frac{f_{13}}{f_{32}f_{31}f_{13}}\sigma_{11} \quad (23)$$

За допомогою останнього співвідношення можна виключити  $\sigma_{33}$  з системи (22). Додатково врахуємо, що активні лазерні середовища мають високий квантовий вихід, тобто  $f_{32} \gg f_{31}, f_{32} \gg f_{21}$ . Тоді (23) переписеться як:

$$\sigma_{33} \approx (f_{13} / f_{32})\sigma_{11} \quad (24)$$

що означає слабке заповнення рівня 3, а отже  $\sigma_{11} + \sigma_{22} \approx 1$ . Тепер система (22) спрощується і стає аналогічною дворівневій:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial t} &= -[T_2^{-1} + i(\omega_0^{21} - \omega_{21})]\sigma_{21} - \bar{\mu}_{21}\bar{\Sigma}_{21}D/2\hbar \\ \frac{\partial D}{\partial t} &= (D - D_0)T_{1ef}^{-1} - (\bar{\mu}_{12}\bar{\Sigma}_{12}\sigma_{21} - \bar{\mu}_{21}\bar{\Sigma}_{21}\sigma_{12})/2\hbar\end{aligned}\quad (25)$$

В другому рівнянні ефективний час життя різниці заселеностей:

$$T_{1ef} = T_1 / (1 + f_{13}T) \quad (26)$$

Видно, що він визначається як часом життя верхнього рівня ( $T_1 = f_{21}^{-1}$ ), так і накачування ( $f_{13}$ ). Величина  $D_0$  у відсутність випромінювання частоти  $\omega_{21}$ , рівна:

$$D_0 = (f_{13}T_1 - 1)/(f_{13}T_1 + 1) \quad (27)$$

**Чотирирівнева молекула.** За такою схемою працюють найбільш поширені лазери на матрицях, активованих іонами  $Nd^{3+}$  (рис. 4).

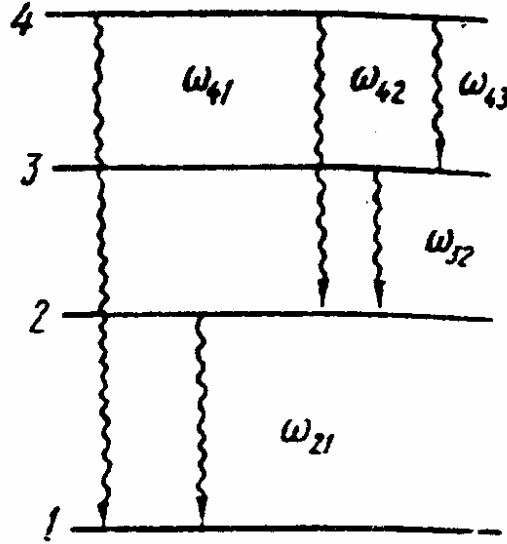


Рис. 4.

В цьому випадку:

$$\sigma_{14} \approx (f_{14} / f_{43})\sigma_{11};$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial t} &= f_{14}\sigma_{11} - (f_{32} - f_{31})\sigma_{33} + i(\bar{\mu}_{32}\bar{\Sigma}_{32}\sigma_{23} - \bar{\mu}_{23}\bar{\Sigma}_{23}\sigma_{32}) / 2\hbar \\ \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial t} &= \frac{f_{14}f_{42}}{f_{43}}\sigma_{11} + f_{32}\sigma_{33} - f_{21}\sigma_{22} - i(\bar{\mu}_{32}\bar{\Sigma}_{32}\sigma_{23} - \bar{\mu}_{23}\bar{\Sigma}_{23}\sigma_{32}) / 2\hbar \\ \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial t} &= -[T_2^{-1} + i(\omega_0^{32} - \omega_{32})]\sigma_{32} - i\bar{\mu}_{32}\bar{\Sigma}_{32}(\sigma_{33} - \sigma_{22}) / 2\hbar \end{aligned} \quad (28)$$

Оскільки практично завжди  $\sigma_{33} - \sigma_{22} = D \ll \sigma_{11}$  (швидкість розпаду рівня 2 перевищує швидкість всіх інших процесів), то:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial t} &= -[T_2^{-1} + i(\omega_0^{32} - \omega_{32})]\sigma_{32} - i\bar{\mu}_{32}\bar{\Sigma}_{32}D / 2\hbar \\ \frac{\partial D}{\partial t} &= \frac{D - D_0}{T_{1ef}} - (\bar{\mu}_{23}\bar{\Sigma}_{23}\sigma_{32} - \bar{\mu}_{32}\bar{\Sigma}_{32}\sigma_{23}) / 2\hbar \end{aligned} \quad (29)$$

В (29) ефективний час:

$$T_{1ef} = T_1 / (1 + f_{14}T_1) \quad (30)$$

( $T_1 = f_{32}^{-1}$ ), а різниця населеностей:

$$D_0 = f_{14}T_1 / (1 + f_{14}T_1) \quad (31)$$

Порівнюючи (27) і (31), можна прийти до висновку, що в трирівневій схемі для досягнення інверсної заселеності необхідно  $f_{13}T_1 > 1$ , що призводить до зменшення  $T_{1ef}$ . У випадку чотирирівневої схеми інверсія буде, якщо  $f_{14} > 0$  і у реальних випадках,  $f_{14}T_1 \ll 1$  тобто  $T_{1ef} = T_1$ .

Розглянуті три випадки показують, що в реальній ситуації завжди вдається перейти до деякої ефективної дворівневої схеми. Відмінність (29) від (25) полягає у співмножнику  $1/2$  перед останнім доданком в другому рівнянні системи (25). Це зумовлено тим, що в трирівневій схемі нижній робочий рівень заповнюється і випромінювання одного фотона приводить до зміни різниці населеностей на рівні 2.

Далі розглянемо системи з дійсними елементами матриці дипольного моменту:  $\bar{\mu}_{mn} = \bar{\mu}_{nm} = \bar{\mu}$ , вводячи коефіцієнт  $\beta = 2$ , якщо схема дво- чи трирівнева, і  $\beta = 1$  для чотирирівневої схеми, запишемо загальну систему рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial t} &= -[T_2^{-1} + i(\omega_0 - \omega)\sigma] - i\bar{\mu}\bar{\Sigma}D / 2\hbar; \\ \frac{\partial D}{\partial t} &= -\frac{D - D_0}{T_1} - \frac{i\beta\bar{\mu}}{2\hbar}(\bar{\Sigma}^* \sigma - \bar{\Sigma} \sigma^*) \end{aligned} \quad (32)$$

Ця система придатна для опису будь-якої з розглянутих вище схем енергетичних рівнів активного середовища.

Визначимо тепер таку систему рівнянь, яка описує роботу лазера, використавши наведені вище рівняння. Для цього врахуємо, що в випадку лінійно поляризованої хвилі і однорідно-уширеної смуги активного середовища для описаної вище дворівневої схеми матиме вигляд:

$$P_m = 2N\mu \int_{V_a} \sigma E_m d\vec{r} \quad (33)$$

де  $N$  - густина активних центрів;  $V_a$  - об'єм активного середовища, зайнятого полем. Нагадаємо, що  $\bar{E}_m(\bar{r})$  - функція, яка описує просторову структуру поля  $m$ -ої моди. Рівняння (11) і (32) складають єдину систему для опису роботи лазера:

$$\begin{aligned} \frac{d\Sigma_m}{dt} + \left[ \frac{1}{2T_p} + i(\omega_m - \omega) \right] \Sigma_m &= i\omega\mu N \int_{V_a} \bar{E}_m(\bar{r})\sigma(\bar{r})d\bar{r}; \\ \frac{\partial\sigma}{\partial t} + \left[ \frac{1}{T_2} + i(\omega_m - \omega) \right] \sigma &= -\frac{i\mu}{2\hbar} D \Sigma \Sigma_m E_m; \\ \frac{\partial D}{\partial t} + \frac{D - D_0}{T_1} &= -\frac{i\beta\bar{\mu}}{2\hbar} \sum_m (\bar{\Sigma}_m^* \sigma - \bar{\Sigma}_m \sigma^*) E_m \end{aligned} \quad (34)$$

Система рівнянь (34) описує роботу лазера з врахуванням багатомодовості його генерації. Дана система нелінійна і її аналітичний розв'язок в загальному вигляді відсутній. Необхідно звернути увагу на характерні часи, які є в системі рівнянь (34):  $T_1$  - ефективний час життя збуджених центрів на верхньому робочому рівні;  $T_p$  - час життя фотонів в резонаторі;  $T_2$  - час релаксації недіагональних елементів матриці густини або час релаксації резонансної поляризації активного середовища. Співвідношення для вказаних часів у випадку твердотільних середовищ:

$$T_1 \gg T_p \gg T_2 \quad (35)$$

Отже час релаксації резонансної поляризації середовища суттєво коротший інших характерних часів. Це дозволяє спростити схему рівнянь (34), поклавши  $\partial\sigma/\partial t = 0$ . Останнє означає, що поляризація середовища без інерційно відслідковує зміну електромагнітного поля, тобто:

$$\sigma(\bar{r}, t) = -\frac{i\mu}{2\hbar [T_2^{-1} + i(\omega_0 - \omega)]} D(\bar{r}) \sum_m \bar{E}_m(\bar{r}) \Sigma_m(t) \quad (36)$$

Розглянемо для початку випадок одномодової генерації. При цьому система рівнянь (34) з врахуванням (36) набуває вигляду:

$$\frac{d\Sigma_\mu}{dt} + \left[ \frac{1}{T_p} + i(\omega_m - \omega) \right] \Sigma_m = \frac{\omega \mu^2 N}{2\hbar [1/T_2 + i(\omega_0 - \omega)]} \Sigma_m \int_{V_a} D(\bar{r}) E_m^2(\bar{r}) d\bar{r};$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} + \frac{D - D_0}{T_1} = - \frac{2\mu^2 \beta}{4\hbar^2 [1/T_2 + i(\omega_0 - \omega)]} D E_m^2(\bar{r}) |\Sigma_m|^2 \quad (37)$$

Переходячи далі до інтенсивності  $I_m = |\Sigma_m|^2$  і інверсної заселеності  $N_a = ND$ , отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_m}{\partial t} + \frac{1}{T_p} I_m &= \frac{\omega \mu^2 T_2}{2\hbar(1 + \Delta^2)} I_m \int_{V_a} N_a(\bar{r}) E_m^2(\bar{r}) d\bar{r}; \\ \frac{\partial N_a}{\partial t} + \frac{N_a - N_0}{T_1} &= - \frac{\mu^2 \beta T_2}{2\hbar(1 + \Delta^2)} N_a E_m^2(\bar{r}) I_m \end{aligned} \quad (38)$$

де  $\Delta = T_2(\omega_0 - \omega)$  - безмежна відстань від частоти максимуму смуги підсилення. Введемо безрозмірні змінні і параметри:  $\tau = t/T_1$ ,  $G = T_1/T_p$ ,  $m = (\beta I_m / \hbar \omega) B T_1$ ,  $n = N_a T_p B$ ,  $B = \mu^2 T_2 / 2\hbar$ ,  $\omega = N_0 T_p B$ ,  $\varphi(\bar{r}) = E_m^2(\bar{r})$ ,  $W$  - безрозмірне накачування, яке є відношенням реального накачування до порогової величини і вимірюється у кількості разів перевищення над порогом.

В цих змінних система рівнянь (38) має вигляд:

$$\frac{\partial m}{\partial \tau} = m \left[ \frac{1}{1 + \Delta^2} \int_{V_a} n \varphi d\bar{r} \right]; \quad \frac{dn}{d\tau} = - \left( \frac{m \varphi}{1 + \Delta^2} + 1 \right) + W \quad (39)$$

(39) є системою рівнянь балансного типу. При її виведенні було використано співвідношення (35) між характерними часами  $T_1, T_2, T_p$ . З цього співвідношення випливає, що величина  $G \gg 1$ .

Застосування наближення без інерційного стеження поляризацією середовища за полем (36), вимагає, щоб її зміна під дією поля була значно меншою, ніж час  $T_2$ . Це накладає обмеження зверху на величину інтенсивності випромінювання, при якій ще можна застосовувати балансний опис (39). Вказана умова означає, що імовірність переходів

значно менша ніж  $1/T_2$ . Окрім того, детальніший аналіз доводить, що є ще одне обмеження на величину інверсної населеності:

$$n \ll 2T_p / T_2 = Q / \omega T_2 \quad (40)$$

Для реальних твердотільних середовищ умова (40) означає:  $|n| \ll 10^2 \dots 10^3$ , що практично завжди виконується. Таким чином, динамічні процеси в лазерах на твердому тілі при кімнатній температурі можна описувати рівняннями балансного типу (39).

Розглянемо *рівняння багатомодового лазера*. Рівняння (34) може бути перетворене також в систему рівнянь балансного типу, які мають складові відповідальних за взаємодію мод через неоднорідне насичувань активне середовище. Окрім того, різниця частот мод приводить до появи в рівнянні для поляризації вимушеної сили з досить коротким періодом, що може зробити неможливим перехід до виразу типу (36). Як показують дослідження, можливий перехід до рівнянь балансного типу і в цьому випадку, але без опису низки тонких ефектів. Разом з тим, такий підхід виправданий, отже дозволяє описати багато характеристик реальних лазерів, які працюють в багатомодовому нестационарному режимі.

Коли інтервал між модами не дуже малий і можна знехтувати нелінійною частиною резонансної сприйнятливості, система рівнянь (34) перетворюється в наступну систему балансного типу:

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_k}{\partial t} &= G m_k \left[ \frac{1}{1 + \Delta_k^2} \int_{V_a} n \varphi_k d\bar{r} - G_k \right]; \\ \frac{dn_i}{dt} &= -n_i \left( \sum_k \frac{\varphi_k}{1 + \Delta_k^2} m_k + 1 \right) + W \end{aligned} \quad (41)$$

де  $G_k^{-1} = T_p^{(k)} / T_p^{\max}$  ( $T_p^{\max}$  - час життя найбільш добротної моди).

За допомогою системи рівнянь (41) вдається дослідити основні особливості роботи багатомодових лазерів.

Розглянемо придатність цієї чи іншої системи рівнянь для конкретних лазерних середовищ.

У випадку твердотільних активних середовищ смуги люмінесценції в нормальних умовах (при кімнатній температурі) мають

ширини в межах одиниць, десятків і навіть сотень обернених сантиметрів. Отже, час релаксації поляризації активного середовища не перевищує  $10^{-11}$  с. Типові ж тривалості імпульсів, які можуть бути отримані на таких активних середовищах на порядок – два більші оберненої ширини смуги. Лазери на подібних активних середовищах у більшості випадків описуються балансними рівняннями. Аналогічна ситуація реалізується і з лазерами на розчинах фарбників,  $F$ -центрах і газах високого тиску.

Зворотна картина відбувається з лазерами на газах низького тиску, наприклад, у  $He-Ne$  - лазері. В цьому випадку обернена ширина смуги люмінесценції окремого атома близька до часу життя фотонів в резонаторі. При цьому потрібно використати повну систему рівнянь для матриці густини. Проте більшість таких лазерів працює в стаціонарних режимах генерації, коли автоматично використовується умова стеження поляризації активного середовища з полем. Але перехідні режими в таких лазерах короточасні і не представляють інтересу. Використання кінетичних рівнянь для стаціонарного режиму в такого роду лазерах виправдане, якщо не цікавитись тонкими ефектами взаємодії мод, які вийшли в генерацію. Тому далі зупинимось на динамічних процесах лише в твердотільних лазерах, оскільки з однієї сторони, ці процеси визначають основні характеристики такого типу, а з іншої – саме нестаціонарні режими генерації цих лазерів дозволяють отримати рекордні за потужністю і тривалістю оптичні імпульси.

### ***Стаціонарна генерація лазера.***

Стаціонарний режим генерації лазера є одним з найпростіших, що дозволяє використати отримані вище рівняння для дослідження впливу на характеристики випромінювання лазера схеми енергетичних рівнів активного елемента, неоднорідного характеру поля в резонаторі і неоднорідного спектрального уширення активного середовища.

#### ***Вплив схеми енергетичних рівнів.***

Почнемо з ординарного випадку, коли поле однорідно заповнює резонатор, а середовище спектрально-однорідно уширене і генерація іде на частоті максимуму смуги люмінесценції, тобто:

$$\Delta = 0; \int_{V_a} n \varphi d\vec{r} = n$$

Цей приклад дозволяє з'ясувати вплив на параметри лазерного випромінювання схем енергетичних рівнів активного середовища.



Розглянемо твердотільні лазери, для яких можна застосовувати балансні рівняння. В стаціонарному режимі параметри випромінювання не змінюються в часові, тобто  $m = 0, n = 0$ . Отже система рівнянь (39) набуває вигляду:

$$Gm(n-1) = 0; -nm - n + W = 0 \quad (42)$$

де  $W = const.$  - накачування. Система рівнянь (42) має два розв'язки

$$m = 0, \quad n = W \quad (43)$$

$$m = W - 1, \quad n = 1 \quad (44)$$

Перше з них відповідає випадку відсутності випромінювання, а друге – генерації лазера.

Оскільки величина  $m \geq 0$ , з другого розв'язку випливає умова генерації:

$$W > 1 \quad (45)$$

що означає перевищення накачуванням деякої порогової величини ( $W^n = 1$ ). При цьому коефіцієнт підсилення активного середовища рівний втратам резонатора ( $\gamma_p = 1$ ) і інтенсивність випромінювання рівна інтенсивності накачування за відрахуванням її порогового рівня. Це співвідношення має простий фізичний зміст, який випливає з закону збереження енергії. Відомо, що енергія накачування витрачається на лазерне випромінювання і підтримання в активному середовищі такого рівня інверсної населеності при якій підсилення активного середовища рівне втратам поля в резонаторі. Причому, як легко бачити, при  $T_1 \rightarrow \infty$ , тобто при відсутності розпаду інверсної населеності, потужність випромінювання була б рівною потужності накачування. Але потужність корисного випромінювання складала б не 100%, а лише частку, яка виділяється на „корисних” втратах, тобто зумовлених прозорістю дзеркал:

$$m_{\text{випр}} = \frac{\gamma_R}{\gamma_p + \gamma_{\text{втр}}} \quad (46)$$

де  $\gamma_p$  - втрати резонатора, зумовлені прозорістю вихідного дзеркала,  $\gamma_{втр}$  - інші втрати.

Розглянемо тепер, як впливає схема енергетичних рівнів на потужність випромінювання лазера. Для цього перейдемо до розмірних змінних. Тоді число квантів, які випромінюються за одиницю часу ( $P = M / T_p$ ), де  $M$  - число випромінюваних квантів,  $T_p$  - час життя фотона в резонаторі), буде виглядати для чотирівневої схеми генерації і так:

$$P^{(4)} = N^{(4)} (f_{14} - f_{14}^n) \quad (47)$$

а для трирівневої схеми так:

$$P^{(3)} = N^{(3)} \frac{f_{13} - f_{13}^n}{f_{13}^n T_1 + 1} \quad (48)$$

В виразах (47) та (48)  $N$  кількість активних центрів в середовищі,  $f_{ij}$  - імовірність переходів під дією накачування;  $f_{ij}^n$  - імовірність переходів на порозі генерації. З виразів (47) та (48) випливає, що у випадку трирівневого активного середовища потужність випромінювання нижча, ніж у лазерах на чотирівневому середовищі за інших рівних умов (рівні кількості активних центрів і порогові імовірності переходів під дією накачування).

Таким чином, потужність випромінювання лазера залежить від схеми енергетичних рівнів активного середовища. Оцінимо цей вплив. У випадку трирівневого активного середовища величина інверсної населеності:

$$N_a = N \frac{f_{13} T_1 - 1}{f_{13} T_1 + 1} \quad (49)$$

Нагадаємо, що  $f_{ij} = B_{ij} \rho_{ij}$  - імовірність переходів з рівня  $i$  на рівень  $j$  під дією випромінювання з густиною  $\rho_{ij}$ . Отже, порогова величина  $f_{13}$  визначається з умови:

$$N_a B_{13} = \frac{1}{T_p} \text{ або } f_{13}^n T_1 = \frac{B_{13} N T_p + 1}{B_{13} N T_p - 1} \quad (50)$$

Для типових параметрів рубінового лазера  $B = 10^{-10} \text{ см}^3 \text{ с}^{-1}$ ,  $N = 10^{19} \text{ см}^{-3}$ ,  $T_p = 10^{-8} \text{ с}$  отримуємо, що  $W_{13}^n \approx 1.02$ . Звідси випливає, що потужність генерації (вирази (47) та (48)) відрізняється більш ніж в два рази при однакових  $N$  і  $f_{ij}$  (рис. 5, пряма 1 – чотирирівнева схема, 2 – трирівнева схема).

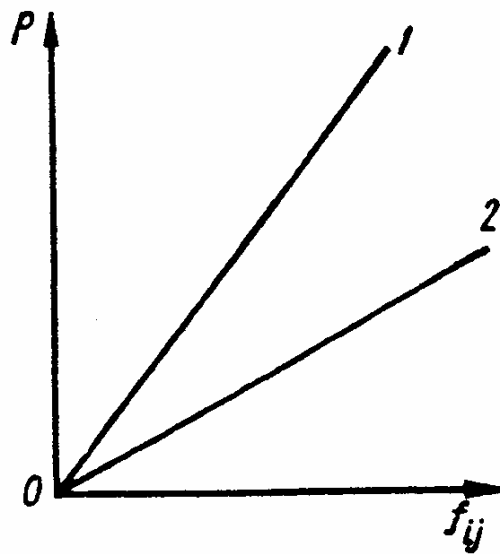


Рис. 5.

Необхідно відмітити, що в рівняння (42) входить безрозмірне накачування, яке вимірюється в перевищеннях над порогом. У випадку чотирирівневого середовища:

$$W = f_{14} / f_{14}^n \quad (51)$$

а у випадку трирівневого:

$$W = \frac{f_{13} T_1 - 1}{f_{13} T_1 + 1} \cdot \frac{f_{13}^n T_1 + 1}{f_{13}^n T_1 - 1} \quad (52)$$

З виразу (51) випливає, що двократне перевищення порога генерації, тобто  $W = 2$ , відповідає трикратному перевищенню потужності накачування. У випадку ж трирівневої схеми для досягнення двократного перевищення порога генерації досить перевищити

потужність накачування лише на 2% ( $f_{13}T_1 = 1.04$ ). А зростання потужності накачування вдвічі відповідає більш, ніж тридцятикратному перевищенню порога генерації ( $W = 33.7$ ).

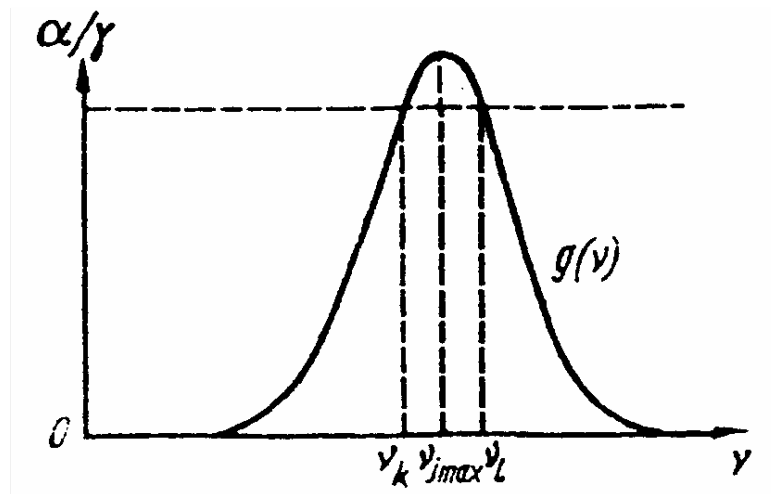


Рис. 6.