Тема 4. Схеми функціонування квантових генераторів.
Лекція 4.
Дворівнева та трирівневі системи. Принцип роботи чотирирівневої системи. Кінетичні рівняння. Вимоги до активних середовищ.

Створення інверсного стану в робочому тілі пов'язане, як правило, з рядом переходів, що відбуваються в активному центрі. В залежності від кількості переходів, які приводять в кінцевому результаті до інверсії на відповідному (лазерному) переході, квантові системи класифікують на дво-, три- і чотири рівневі системи функціонування робочих центрів. Зрозуміло, кожна з цих схем є спрощеною моделлю складних процесів, що відбуваються в лазерних системах.

Дворівнева система функціонування має основний і збуджений стани (**рис. 1**). При збудженні дворівневої системи виникають три оптичних процеси, пов'язані з переходами частинок між рівнями 1 і 2. По-перше відбувається поглинання на частоті переходу $1 \to 2$ з імовірністю $\rho_{12}B_{12}$, яке порушує больцманівську рівновагу. По-друге. йде процес вимушеного випромінювання з імовірністю $\rho_{21}B_{21}$. І по-третє, відбувається спонтанне випромінювання з імовірністю A_{21}. Окрім того, можливі і неоптичні переходи з імовірностями d_{21} і d_{12}. Для спрощення запису кінетичних рівнянь позначимо повну імовірність переходів з відповідного рівня як f_{ik} або f_{ki}, які рівні:

$$f_{ik} = A_{ik} + B_{ik}\rho_{ik} + d_{ik}; \quad f_{ki} = B_{ki}\rho_{ki} + d_{ki}$$

допускаючи, що рівень i розташований вище рівня k, а $\rho_{ki} \equiv \rho_{ik} = \rho(\nu_{ik} \equiv \nu_{ki})$.

В цих позначеннях для дворівневої системи кінетичні рівняння матимуть вигляд:

$$\frac{dn_1}{dt} = -n_1 f_{12} + n_2 f_{21}, \quad \frac{dn_2}{dt} = n_1 f_{12} - n_2 f_{21} \qquad (1)$$

Вони повинні бути доповнені законом збереження числа активних центів:

$$N = n_1 + n_2 \tag{2}$$

де N - концентрація активних центрів.

Якщо знехтувати неоптичними переходами $d_{12} = d_{21} = 0$ і допустити, що рівні мають однакові статистичні ваги $q_1 = q_2$, то кінетичні рівняння (1) спрощуються:

$$\begin{aligned} \frac{dn_1}{dt} &= (n_2 - n_1)B_{12}\rho_{12} + A_{21}n_2, \\ \frac{dn_2}{dt} &= (n_1 - n_2)B_{12}\rho_{12} - A_{21}n_2 \end{aligned} \tag{1'}$$

В стаціонарному режимі з рівнянь $(1')$ випливає:

$$B_{12}\rho_{12}n_1 = (B_{12}\rho_{12} + A_{21})n_2 \tag{3}$$

Розв'язок системи рівнянь (2) і (3) приводить до наступних значень заселеностей рівнів:

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{A_{21} + B_{12}\rho_{12}}{A_{21} + 2B_{12}\rho_{12}} N, \\ n_2 &= \frac{B_{12}\rho_{12}}{A_{21} + 2B_{12}\rho_{12}} N \end{aligned} \tag{4}$$

Залежність населеностей рівнів 1 і 2 від ρ_{12} приведена на **рис. 2**. З (4) випливає, що оптичними методами в дворівневій системі створити інверсну заселеність неможливо. Неможливо це і електронними збудженнями, тому що правила відбору аналогічні оптичним. Дійсно, за відсутності випромінювання всі частинки знаходяться в стані 1. Із зростанням ρ_{12} („оптичне накачування") монотонно зменшується n_1, а n_2 монотонно зростає. В граничному випадку $\rho \to \infty$ заселеності станів вирівнюються ($n_1 - n_2 = 0.5N$).

Тому всі працюючи за дворівневою схемою лазери накачуються „неоптичними методами". Зокрема, накачування аміачного лазера засновано на відборі з молекулярного пучка збуджених молекул NH_3 за допомогою неоднорідного електричного поля (**рис. 3**), де 1 – система селекції молекули, 2 – вихідний хвилевод, 3- резонатор. 4- система перекачування газу.

За допомогою електричного поля виконується просторове розділення молекул пучка NH_3, які знаходяться в різних енергетичних станах. В інверсному стані NH_3 найбільш потужна лінія з $\vartheta = 0,\ J = 3,\ K = 3(\nu = 23870 МГц \approx 24 \cdot 10^3 МГц;\ \lambda \approx 1.25 см)$. Звичайно з молекулярного пучка в резонатор поступає лише 6% $J = 3, K = 3$, тобто, за 1с поступає $10^{14} - 10^{15}$ молекул, що відповідає потужності випромінювання 10^{-8} Вт.

Трирівнева схема функціонування представлена на **рис. 4**. Принцип її роботи: накачування на частоті ν_{13} збуджує частинки з рівня 1 на рівень 3. Потім за рахунок безвипромінювальних переходів частинки з рівня 3 потрапляють на рівень 2. Робочі центри підбираються так, щоб рівень 2 був метастабільним для накопичення на ньому достатньо великого числа частинок, що і забезпечує інверсію заселеностей відносно рівня 1. Після випромінювання на частоті ν_{21} з метастабільного рівня система повертається в нормальний стан.

Кінетичні рівняння для трирівневої системи мають вигляд:

$$
\begin{aligned}
&\frac{dn_1}{dt} = -n_1(f_{12} + f_{13}) + n_2 f_{21} + n_3 f_{31},\\
&\frac{dn_2}{dt} = n_1 f_{12} - n_2(f_{21} + f_{23}) + +n_3 f_{32},\\
&\frac{dn_3}{dt} = n_1 f_{13} + n_2 f_{23} - n_3(f_{31} + f_{32}) +\\
&N = n_1 + n_2 + n_3.
\end{aligned} \tag{5}
$$

Розв’язок системи (5) для розподілу населеностей квантових частинок за рівнями (в стаціонарному режимі $dn_i / dt = 0$) приводить до наступного результату:

$$
\begin{aligned}
&n_1 = N / F(f_{31} f_{21} + f_{31} f_{23} + f_{32} f_{21}),\\
&n_2 = N / F(f_{32} f_{12} + f_{32} f_{13} + f_{31} f_{12}),\\
&n_3 = N / F(f_{13} f_{21} + f_{13} f_{23} + f_{12} f_{23}),
\end{aligned} \tag{6}
$$

де:

$F = f_{21}(f_{32} + f_{13} + f_{31}) + f_{12}(f_{32} + f_{23} + f_{31}) + f_{13}(f_{23} + f_{32}) + f_{23}f_{31})$.

Розглянемо залежність заселеностей рівнів тільки від густини випромінювання та імовірностей переходів. У зв'язку з тим, що. як правило, для трирівневих оптичних квантових генераторів навіть при кімнатній температурі $h\nu_{12} >> kT$ і, $h\nu_{23} >> kT$ а тим більше $h\nu_{13} >> kT$, можна вважати, що $f_{12} \approx f_{23} = 0,\ d_{12} \approx d_{23} \approx 0$, оскільки випромінювання на частотах ν_{12} і ν_{23} немає ($f_{12} = 0$ на стані, коли не має генерації, так як $\rho_{12} = 0$). Тому неважко впевнитись, що за таких умов:

$$
\begin{aligned}
n_1 &= \frac{f_{21}}{f_{21} + \eta f_{13}\left(1 + \dfrac{f_{21}}{f_{32}}\right)} N, \\
n_2 &= \frac{\eta f_{13}}{f_{21} + \eta f_{13}\left(1 + \dfrac{f_{21}}{f_{32}}\right)} N, \qquad (7) \\
n_3 &= \frac{\eta f_{13}}{f_{21} + \eta f_{13}\left(1 + \dfrac{f_{21}}{f_{32}}\right)} \cdot \frac{f_{21}}{f_{32}} N,
\end{aligned}
$$

де $\eta = \dfrac{f_{32}}{f_{31} + f_{32}}$.

Величина η визначає частину збуджених частинок. які потрапляють на метастабільний рівень. Перепишемо рівняння (7). враховуючи означення f_{ik} і f_{ki}:

$$
\begin{aligned}
n_1 &= \frac{A_{21}(A_{31} + d_{32} + B_{31}\rho_{13})}{A_{21}(d_{32} + A_{31}) + (2A_{21} + d_{32})B_{31}\rho_{13}} N, \\
n_2 &= \frac{d_{32}B_{31}\rho_{13}}{A_{21}(d_{32} + A_{31}) + (2A_{21} + d_{32})B_{31}\rho_{13}} N, \qquad (7') \\
n_3 &= \frac{A_{21}B_{31}\rho_{13}}{A_{21}(d_{32} + A_{31}) + (2A_{21} + d_{32})B_{31}\rho_{13}} N,
\end{aligned}
$$

Залежність заселеностей всіх трьох рівнів від ρ_{13} зображена на **рис. 5**.

Якщо система частинок знаходиться при абсолютному нулі температури, то при відсутності накачування ($\rho_{13} = 0$) всі частинки знаходяться на основному рівні (1). З виникненням накачування починають заселятися рівні 2 і 3. При цьому. природно. населеність основного рівня зменшується, так як $n_1 + n_2 + n_3 = N$. В граничному випадку при $\rho_{13} \to \infty$:

$$n_1 = n_3 = \frac{A_{21}}{2A_{21} + d_{32}} N, \quad n_2 = \frac{d_{32}}{2A_{21} + d_{32}} N \tag{8}$$

З виразів (7′) випливає, що інверсію на переході $2 \to 1$ можна отримати при накачуваннях ρ_{13}, більших ρ_{13}^n (**рис. 6**, $n_1 = n_2$), тобто при виконанні умови:

$$\rho_{13} > \rho_{13}^n = \frac{A_{21}(d_{32} + A_{31})}{B_{31}(d_{32} - A_{21})} \tag{9}$$

З зростанням ρ_{13} інверсія зростає, прямуючи до величини:

$$n = \Delta n_{21} = n_2 - n_1 = \frac{d_{32} - A_{21}}{2A_{21} + d_{32}} N.$$

Таким чином, згідно з проведеним спрощеним розглядом, умову інверсії ($\Delta n_{21} > 0$) виконати тим легше, чим краще виконується умова $d_{32} > A_{21}$, і в граничному випадку $\Delta n_{21} \to N$ при $A_{21} \to 0$, а отже, чим більший час життя стану 2 при фіксованій імовірності безвипромінювального переходу.

Але із зменшенням величини A_{21}, падає і B_{21}, тобто імовірність $B_{12}\rho_{21}$ робочого індукованого переходу. Отже для забезпечення умов генерації (**див. лекцію 3 ф-ла (35)**) необхідно збільшувати інверсію заселеності. При, $A_{21} \to 0$, $\Delta n_{21} \to N$ але залишається обмеженою. Права ж частина в формулі (35) з лекції 3 прямує до ∞, тобто $\tau_{21} \to \infty$. Отже для конкретного резонатора порогові умови генерації можуть бути виконані, якщо:

$$A_{21} \gtrsim \frac{8\pi^2\nu^2}{c^3}\Delta\nu\frac{1}{\tau} \tag{10}$$

для реальних середовищ і джерел накачування імовірність спонтанного випромінювання A_{31} на один-два порядки вище імовірності вимушених переходів $B_{31}\rho_{13}$ і, відповідно, імовірності поглинання $B_{13}\rho_{13}$ з третього рівня на перший, тобто: $A_{31} >> B_{13}\rho_{13}$.

З виразів (7) випливає:

$$\begin{aligned}
&\frac{n_3}{n_1} = \frac{\eta f_{13}}{f_{32}} = \frac{B_{13}\rho_{13}}{f_{31}+f_{32}} << 1,\\
&\frac{n_2}{n_1} = \frac{\eta f_{13}}{f_{21}} = \frac{\eta B_{13}\rho_{13}}{f_{21}},\\
&\frac{n_3}{n_2} = \frac{f_{21}}{f_{32}}
\end{aligned} \tag{11}$$

Згідно з (11) населеність третього рівня значно менша населеності першого рівня. Тому основна маса частинок знаходиться на першому і другому рівнях. Інверсія ($\Delta n_{21} > 0$) виникає за виконання умови $n_2 / n_1 > 1$, тобто:

$$\eta B_{13}\rho_{13} = \frac{f_{32}}{f_{31}+f_{32}} B_{13}\rho_{13} > f_{21} \tag{12}$$

або

$$B_{13}\rho_{13} > f_{21}\left(1+\frac{f_{31}}{f_{32}}\right)$$

Ця нерівність виконується, якщо одночасно справедливо:

$$\begin{aligned}
&B_{13}\rho_{13} > f_{21},\\
&B_{13}\rho_{13} > f_{21}\frac{f_{31}}{f_{32}}
\end{aligned} \tag{13}$$

Оскільки при реальних накачуваннях $f_{31} >> B_{13}\rho_{13}$, то з (13) випливає $f_{32} > f_{31}$ і необхідно щоб:

$$f_{32} > f_{21} \tag{14}$$

Таким чином, при накопиченні активних центрів випромінювання на рівні 2 і для створення значної інверсії на переході $2 \to 1$ треба підбирати системи, у яких, по перше, f_{21} мале (з врахуванням (10), по друге, $f_{32} > f_{31}$ і B_{13} велике. На жаль вимоги (13) і (14) знаходяться у протиріччі, тому, що при великих B_{13}, природно, велике і f_{31}. Враховуючи співвідношення між коефіцієнтами Ейнштейна і вимоги (13) – (14), умови для функціонування трирівневої схеми можна переписати так:

$$B_{13}\rho_{13} >> A_{21},$$
$$B_{13}\rho_{13} >> A_{21}\frac{A_{21}}{d_{32}} \quad (13')$$

тобто:

$$d_{32} >> A_{31}, d_{32} >> A_{21} \quad (14')$$

При виконанні вимог $(13')$ і $(14')$ співвідношення (7) має вигляд:

$$n_1 = \frac{f_{21}}{f_{21} + \eta f_{13}} N = \frac{A_{21}}{A_{21} + \dfrac{d_{32} B_{13} \rho_{13}}{d_{32} + A_{31}}} N,$$

$$n_2 = \frac{\eta f_{13}}{f_{21} + \eta f_{13}} N = \frac{\dfrac{d_{32} B_{13} \rho_{13}}{d_{32} + A_{31}}}{A_{21} + \dfrac{d_{32} B_{13} \rho_{13}}{d_{32} + A_{31}}} N, \qquad (7'')$$

$$n_3 = \frac{f_{21}}{f_{32}} \frac{\eta f_{13}}{f_{21} + \eta f_{13}} N = \frac{f_{21}}{f_{32}} n_2 = \frac{A_{21}}{d_{32}} n_2$$

З умови інверсії заселеності (9) згідно з (11) можна записати:

$$\eta f_{13} = f_{21}$$

або

$$\frac{d_{32}}{d_{32} + A_{31}} B_{13} \rho_{13}^{n} = A_{21} \tag{15}$$

або

$$\rho_{13}^{n} = A_{21}\frac{d_{32}+A_{31}}{d_{32}B_{13}}.$$

Отже, чим менше f_{21} і більше B_{13}, а η ближче до одиниці, тим менша потрібна потужність для отримання інверсної заселеності. При виконанні умови (15) наступає рівність заселеностей рівнів 1 і 2. Але коефіцієнт поглинання на переході $1 \to 2$ змінює знак, тобто настає підсилення згідно з виразу (34) лекції 2а при:

$$\frac{n_2}{q_2} > \frac{n_1}{q_1} \tag{16}$$

або:

$$\Delta n_{21} = n_2 - \frac{q_2}{q_1}n_1 > 0 \tag{17}$$

Відмітимо, що підсилення на переході $2 \to 1$ при $q_1 > q_2$ настає при відсутності „інверсії”, тобто: $n_2 < n_1$. Отже, при $q_1 > q_2$ для отримання підсилення на переході потрібне накачування нижче, ніж при $q_1 = q_2$, а тим більше, коли $q_1 < q_2$.

При накачуваннях, більших порогових ($\rho_{13} > \rho_{13}^{n}$) в активному середовищі виникає підсилення, в зв’язку з чим з цього моменту вже не можна нехтувати випромінюванням на переході $2 \leftrightarrow 1$, яке приводить до зміни заселеностей рівнів 1 і 2. Як показано раніше, стаціонарна генерація можлива, якщо $\gamma_{12} \approx \alpha_{21}$. Коефіцієнт підсилення α_{21}, згідно виразу (34) лекції 2а, рівний:

$$\begin{gathered}\alpha_{21} = \frac{1}{c}B_{21}h\nu_{12}g(\nu)\left(n_2 - \frac{q_2}{q_1}n_1\right) \approx \gamma_{12},\\ \Delta n_{21} = n_2 - \frac{q_2}{q_1}n_1 = \frac{c\gamma_{12}}{B_{12}h\nu_{12}g(\nu)} = \frac{\gamma_{12}}{\alpha_{21}^{\max}}N = \delta N\end{gathered} \tag{18}$$

де $\alpha_{21}^{\max} = \frac{1}{c}B_{21}h\nu_{12}g(\nu)N$ - граничний коефіцієнт підсилення на частоті генерації, тобто коефіцієнт, який відповідає зосередженню всіх N частинок на рівні 2. Коефіцієнт втрат γ_{12} залежить тільки від параметрів резонатора і оптичної якості активного середовища.

Отже, чим вищі втрати γ_{12} і менший коефіцієнт Ейнштейна B_{21}, тобто, чим менше $\alpha_{21}^{\max}$, тим більше потрібна різниця заселеностей Δn_{21} для отримання генерації.

Згідно з (18) і закону збереження числа частинок ($n_1 + n_2 = N$) кількістю частинок на третьому рівні нехтуємо ($n_3 \approx 0$) і отримуємо:

$$
\begin{aligned}
n_1 &= \frac{1-\delta}{1+q_2/q_1} N, \\
n_2 &= \frac{\frac{q_2}{q_1}+\delta}{1+q_2/q_1} N
\end{aligned}
\tag{19}
$$

Під час генерації, як видно, n_1 і n_2 від інтенсивності накачування ρ_{13} не залежать, оскільки збільшення надходження частинок на метастабільний рівень за рахунок зростання ρ_{13} компенсується збільшенням числа переходів $2 \to 1$, тобто, зростанням ρ_{12}.

Згідно (19) населеності першого і другого рівнів не залежать не тільки від B_{13}, але й від імовірностей спонтанного випромінювання A_{21} і неоптичних переходів d_{21}. Вони повністю визначаються умовами генерації (18) і балансом частинок $n_1 + n_2 = N$. Якщо змінити ρ_{13} і f_{21}, то це буде супроводжуватися зміною густиною енергії, що генерується (ρ_{12}), але не відіб'ються на заселеності рівнів. На **рис. 5** горизонтальні прямі показують відсутність залежностей n_1 і n_2 від швидкості накачування. Відстань між ними тим більша, чим більший параметр δ. Населеності третього рівня, згідно з (1), в стаціонарному режимі при відсутності генерації:

$$n_3(f_{31} + f_{32}) = n_1 f_{13} \tag{20}$$

а так як $f_{31} << f_{32}$ і $f_{13} << f_{31}$, то $n_3 << n_1$. Таким чином, при генерації має місце $n_1 < 0.5N, n_2 > 0.5N, n_3 = 0$.

Отже заселеність третього рівня значно нижча заселеностей першого і другого, про що говорилось вище. Практично всі частинки зосереджені на двох нижніх рівнях. При цьому для отримання генерації при $q_2 = q_1$, необхідно на рівень 2 загнати частинок дещо більше $0.5N$.

Принцип роботи чоторирівневої схеми, показаної на **рис.6а**. такий. За допомогою накачування частинки з основного стану 1 збуджуються на рівень 4. При цьому можна вважати, що:

$$f_{14} = \int B_{нак} \rho_{нак} d\nu = B_{14}\rho_{14} \tag{21}$$

(інтеграл береться по всій області смуг поглинання, що можуть мати декілька лабільних рівнів, які для спрощення можна розглядати як один широкий рівень). Потім з великою імовірністю безвипромінювального переходу квантові частинки переходять на метастабільний рівень 3. Переходи ж частинок $3 \to 2$ дають або люмінесценцію, або, якщо створені необхідні умови, індуковане випромінювання. І, нарешті, в результаті безвипромінювального переходу $2 \to 1$ квантові частинки повертаються на основний рівень. Отже, якщо робоче тіло підібрано так, щоб $h\nu_{12} >> kT$, то n_2 при термодинамічній рівновазі дуже мале: $n_2 = N\exp(-E_2 / kT)$.

Тому в такій системі у порівнянні з трирівневою схемою, відносно легко отримати інверсний стан, оскільки досить „загнати" на ріень 3 незначну частину квантових частинок, як ми вже отримаємо інверсний стан, тому що рівень 2 практично вільний (**рис.6а**).

В системах з k рівнями може бути $5(k!)/(k-2)!$ різних імовірностей переходів f. Наприклад, при $k = 4$ число $f = 30$ (**рис.6а**). Для великих k функція розподілу частинок за рівнями в загальному вигляді дуже громіздка. В зв'язку з цим при розгляді систем з $k \geq 4$ робляться відповідні спрощення, зокрема, прирівнюють нулю всі імовірності переходів, які не відіграють суттєвої ролі в процесах, що розглядаються. Так, у випадку чотирирівневої системи, оскільки $h\nu_{14}, h\nu_{13}, h\nu_{23}, h\nu_{24}, h\nu_{34}$ набагато більші kT, а накачування іде на частоті ν_{14}, то

$$f_{13} = f_{24} = f_{34} = 0 \tag{22}$$

В результаті імовірності переходів, які грають певну роль описуються наступними виразами:

$$f_{14} = B_{14}\rho_{14}$$
$$f_{41} = A_{41} + d_{41} + B_{41}\rho_{14}$$
$$f_{42} = A_{42} + d_{42}$$
$$f_{43} = A_{43} + d_{43}$$
$$f_{31} = A_{31} + d_{31}$$
$$f_{32} = A_{32} + d_{32} + B_{32}\rho_{23}$$
$$f_{23} = \frac{q_3}{q_2} B_{32}\rho_{23}$$
$$f_{21} = A_{21} + d_{21}$$
$$f_{12} = \frac{q_2}{q_1} d_{21} \exp\left(-\frac{h\nu_{12}}{kT}\right) \qquad (23)$$

При звичайних джерелах накачування величина вимушених переходів $4 \to 1$ мала, тому:

$$A_{41} + d_{41} >> B_{41}\rho_{14} = \frac{q_4}{q_1} B_{14}\rho_{14} \qquad (24)$$

Система вихідних кінетичних рівнянь складається аналогічно тому, як це робиться для трирівневої схеми. Наприклад, для рівня 1:

$$\frac{dn_1}{dt} = -n_1(f_{12} + f_{13} + f_{14}) + n_2 f_{21} + n_3 f_{31} + n_4 f_{41}.$$

В загальному випадку запис виглядає так:

$$\frac{dn_i}{dt} = -n_i \sum_{k \neq i}^{4} f_{ik} + \sum_{k \neq i}^{4} n_k f_{ki} \qquad (25)$$

Ці рівняння доповнюються законом збереження частинок:

$$N = \sum_{k=1}^{4} n_k$$

При стаціонарному режимі заселеностей рівней енергії розв'язок рівняння (25) такий:

$$n_1 = \frac{N}{D}\{f_{21}[f_{42}(f_{31}+f_{32}+f_{34})+f_{43}f_{32}]+$$
$$+f_{31}[f_{43}(f_{21}+f_{23}+f_{24})+f_{42}f_{23}]+$$
$$f_{41}[(f_{24}+f_{21})(f_{31}+f_{32}+f_{34})+f_{23}(f_{31}+f_{34})]\ \};$$
$$n_2 = \frac{N}{D}\{f_{12}[f_{42}(f_{31}+f_{32}+f_{34})+f_{43}f_{32}]+$$
$$+f_{13}[f_{42}(f_{32}+f_{34})+f_{42}f_{23}]+f_{14}[f_{42}(f_{31}+f_{32}+f_{34})+f_{43}f_{32}]+$$
$$f_{41}[f_{13}f_{32}+f_{12}(f_{31}+f_{32}+f_{34})]+f_{31}f_{43}f_{12}\ \};$$
$$n_3 = \frac{N}{D}\{f_{12}[f_{43}(f_{23}+f_{24})+f_{42}f_{23}]+f_{13}[f_{43}(f_{21}+f_{23}+f_{24})+f_{23}f_{42}]+$$
$$+f_{14}[f_{43}(f_{21}+f_{23}+f_{24})+f_{42}f_{23}]+$$
$$f_{41}[f_{13}(f_{21}+f_{23}+f_{24})+f_{12}f_{23}]+f_{21}f_{42}f_{13}\ \};$$
$$n_4 = \frac{N}{D}\{f_{12}[f_{24}(f_{31}+f_{32})+f_{34}(f_{24}+f_{23})]+$$
$$+f_{13}[f_{34}(f_{21}+f_{23})+f_{24}(f_{32}+f_{34})]+ \qquad (26)$$
$$+f_{14}[(f_{24}+f_{21})(f_{31}+f_{32}+f_{34})+f_{23}(f_{34}+f_{31})]\ \},$$

де:

$$\begin{vmatrix} f_{12}+f_{43}+f_{14} & -f_{21} & -f_{34} & -f_{41} \\ -f_{12} & f_{21}+f_{23}+f_{24} & -f_{32} & -f_{42} \\ -f_{13} & -f_{23} & f_{31}+f_{32}+f_{34} & -f_{13} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

При відсутності випромінювання на переході $3 \rightarrow 2$ і виконання умов (230 населеності рівнів (26) перепишуться у вигляді:

$$n_1 = \frac{N}{D'}\{f_{21}(f_{31}+f_{32})(f_{41}+f_{42}+f_{43})\ \},$$

$$n_2 = \frac{N}{D'}\{f_{12}(f_{31}+f_{32})(f_{41}+f_{42}+f_{43}) + B_{14}\rho_{14}[f_{42}(f_{31}+f_{32})+f_{43}f_{32}], \qquad (26')$$

$$n_3 = \frac{N}{D'}\{B_{14}\rho_{14}f_{21}f_{43}\}$$

$$n_4 = \frac{N}{D'}\{B_{14}\rho_{14}f_{21}(f_{31}+f_{32})\}$$

Тут D' - сума всіх членів, які стоять в фігурних дужках. Залежність відносної заселеності рівнів від густини накачування показана на **рис. 7**. При $T=0$ і відсутності випромінювання накачування $\rho_{14}=0$, всі частинки будуть знаходиться на основному вірні 1. В міру зростання ρ_{14} населеність рівня 1 буде падати, а інших зростати. З $(26')$ випливає, що при $\rho_{14}\to\infty$, отримуємо граничні значення:

$$n_1 = n_4 = \frac{f_{21}(f_{31}+f_{32})}{F}N,$$

$$n_2 = \frac{f_{42}(f_{31}+f_{32})+f_{32}f_{43}}{F}N, \qquad (26'')$$

$$n_3 = \frac{f_{21}f_{43}}{F}N$$

де $F = 2f_{21}(f_{31}+f_{32})+f_{42}(f_{31}+f_{32})+f_{43}f_{21}+f_{43}f_{21}$.

Очевидно. інверсія на переході $3\to 2$ виникає при:

$$f_{21}f_{43} > f_{42}(f_{31}+f_{32})+f_{32}f_{43} \qquad (27)$$

При такому ідеалізованому розгляді чотирирівневої системи в каналі $3\to 2$ поріг для створення інверсії відсутній, тобто навіть при найменших рівнях накачування $n_3 > n_2$. Це зумовлено тим, що в чотиривневій системі рівень 2 заселений мало. В зв’язку з цим треба відзначити роль температури активного середовища і енергії стану 2. Оскільки активне середовище має температуру, відмінну від нуля

($T \neq 0K$), доводиться рахуватись з певною заселеністю рівня 2 навіть при $\rho_{14} = 0$.

Так, при відсутності накачування $\rho_{14} = 0$ (термодинамічна рівновага) заселеності 1 і 2 рівнів визначаються співвідношеннями:

$$n_1^0 = N\frac{f_{21}}{f_{12}+f_{21}} = N\frac{1}{1+\frac{q_2}{q_1}\exp\left(-\frac{h\nu_{12}}{kT}\right)},$$
$$n_2^0 = N\frac{f_{12}}{f_{12}+f_{21}} = N\frac{\frac{q_2}{q_1}\exp\left(-\frac{h\nu_{12}}{kT}\right)}{1+\frac{q_2}{q_1}\exp\left(-\frac{h\nu_{12}}{kT}\right)}, \tag{28}$$

а населеності рівнів 3 і 4 ще менші. Із зростанням рівня накачування населеність 1-го рівня падає, а всіх інших зростає. При малих ρ_{14} інверсії не буде. Інверсія виникає тільки при ρ_{14}, яка перевищує певну порогову величину ρ_{14}^n, при якій $n_3 = n_2$. Населеність стану 3 надзвичайно мала при $\rho_{14} \to 0$ і різко зростає з її збільшенням (рис. 8). Населеність рівня 2 незбудженого середовища визначається співвідношенням (28) і повільно росте з збільшенням ρ_{14}, як буде показано нижче. При $\rho_{14} \approx \rho_{14}^{(nT)}, n_3 \approx n_2$. Чим вище температура середовища, тим більше n_2^0 і тим вище повинна бути величина $\rho_{14}^{(nT)}$. І, відповідно, чим більше E_2, тим менше n_2^0, і, отже, потрібне менше значення $\rho_{14}^{(nT)}$.

Як правило, $f_{41} >> B_{14}\rho_{14}$, заселеність першого рівня набагато більша четвертого. Практично всі частинки розподіляються по трьох рівнях (1,2 і 3). Оскільки рівень 2 розташований вище рівня 1, то $n_1 >> n_2$ і тому легше створити інверсію населеності на рівнях $3 \to 2$, ніж на $3 \to 1$. Внаслідок цього, при $h\nu_{21} >> kT$ навіть незначне накопичення частинок на рівні 3 призводить до виникнення підсилення на частоті ν_{23}. Завдяки цьому в генераторах, які працюють за чотирирівневою схемою, поріг генерації нижчий ніж у трирівневої за інших рівних умов. Природно, якщо $n_2 \approx n_1$, то властивості чотиривневого генератора будуть мало відрізнятись від трирівневого.

Умова підсилення на переході $3 \to 2$ така: $n_3 / q_3 > n_2 / q_2$. Отже, густина випромінювання накачування ρ_{14} згідно (26) повинна задовольняти співвідношення:

$$B_{14}\rho_{14} > \frac{\frac{q_3}{q_1}\exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)(f_{31}+f_{32})(f_{41}+f_{42}+f_{43})}{f_{43}-\frac{q_3}{q_2}\frac{f_{43}f_{32}}{f_{21}}-\frac{q_3}{q_2}\frac{f_{42}(f_{31}+f_{32})}{f_{21}}} \qquad (29)$$

Вираз (29) має фізичний зміст при знаменнику, більшому від нуля, а це значить, що:

$$f_{21}f_{43} > \frac{q_3}{q_2}\left[f_{32}f_{43}+f_{42}(f_{31}+f_{32})\right] \qquad (27')$$

тобто, отримуємо співвідношення (27) з урахуванням статистичних ваг 2 і 3. Співвідношення $(27')$ виконується при $q_3 = q_2$, якщо:

$$f_{21} >> f_{32}, f_{21} >> \frac{f_{42}}{f_{43}}(f_{31}+f_{32}) \qquad (30)$$

Співвідношення (30) є не що інше, як умови дезактивації рівня 2, тобто визначають вимоги виведення частинок з рівня 2, які потрапляють до нього з рівнів 3 і 4.

Враховуючи умови (27) і (23), населеності рівнів $(26')$ перепишуться так:

$$\begin{aligned}
n_1 &= \frac{N}{\Delta}(f_{31}+f_{32}),\\
n_2 &= \frac{N}{\Delta}\left\{\frac{q_2}{q_1}\left[\exp\left(\frac{h\nu_{12}}{kT}\right)\right]\cdot(f_{31}+f_{32})+\frac{\eta B_{14}\rho_{14}}{f_{21}}\cdot\left[\frac{f_{42}}{f_{43}}(f_{31}+f_{32})+f_{32}\right]\right\}\\
n_3 &= \frac{N}{\Delta}\eta B_{14}\rho_{14}, \qquad (31)\\
n_4 &= \frac{N}{\Delta}\eta B_{14}\rho_{14}\frac{f_{31}+f_{32}}{f_{43}}
\end{aligned}$$

де:

$$\Delta = \eta B_{14}\rho_{14}\left(1+\frac{f_{31}+f_{32}}{f_{43}}\right)+\left[1+\frac{q_2}{q_1}\exp\left(-\frac{h\nu_{12}}{kT}\right)\right](f_{31}+f_{32}),$$

$$\eta = \frac{f_{43}}{f_{41}+f_{42}+f_{43}}.$$

Найбільш сприятливі умови для генерації виникають, коли:

$$f_{21} >> f_{12} \text{ або } 1 >> \frac{q_2}{q_1}\exp\left(-\frac{h\nu_{12}}{kT}\right) \qquad (32)$$

оскільки за цих умов основна маса частинок знаходиться на першому і третьому рівнях. Окрім того, бажано, щоб $\eta \approx 1$, тобто:

$$f_{43} >> f_{41} \text{ і } f_{43} >> f_{42} \qquad (33)$$

При цьому необхідно аби $f_{43} > f_{42}$, щоб генерація не переривалась.

Стаціонарний режим генерації реалізується, коли коефіцієнт підсилення буде рівний коефіцієнту втрат $\alpha_{23} \approx \gamma_{23}$, тобто:

$$n_3 - \frac{q_3}{q_2}n_2 = \delta N \qquad (34)$$

де як і раніше: $\delta = \gamma_{23} / \alpha_{32}^{\max}$.

Для визначення заселеностей рівнів в режимі стаціонарної генерації необхідно розв’язати систему рівнянь, що описують баланс частинок:

$$\begin{aligned}
&n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = N;\\
&(f_{41}+f_{42}+f_{43})n_4 = n_1 B_{14}\rho_{14};\\
&(f_{41}n_4 + f_{31}n_3 + f_{21}n_2) = (B_{14}\rho_{14} + f_{12})n_1;\\
&n_3 - \frac{q_3}{q_2}n_2 = \delta N,
\end{aligned} \qquad (35)$$

складені при припущені, що $f_{41} >> B_{14}\rho_{14}$ і $f_{13} = f_{34} = f_{24} = 0$. Розв’язок рівнянь (35) дає такий розподіл частинок за рівнями:

$$
\begin{aligned}
n_1 &= \frac{N}{\Delta'}\left[(1-\delta)+\left(\frac{q_3}{q_2}+\delta\right)\frac{f_{31}}{f_{21}}\right],\\
n_2 &= \frac{N}{\Delta'}\left[(1-\delta)\frac{q_2}{q_1}\exp\left(\frac{h\nu_2}{kT}\right)-\frac{f_{31}}{f_{21}}+(1-\delta)\frac{\eta B_{14}\rho_{14}(f_{42}+f_{43})}{f_{21}f_{43}}\right],\\
n_3 &= \frac{N}{\Delta'}\left[\delta+\frac{q_2}{q_3}\left(\frac{q_3}{q_2}+\delta\right)\exp\left(\frac{h\nu_2}{kT}\right)+\left(\frac{q_3}{q_2}+\delta\right)\frac{\eta B_{14}\rho_{14}(f_{42}+f_{43})}{f_{21}f_{43}}\right],\\
n_4 &= \frac{B_{14}\rho_{14}}{f_{41}+f_{42}+f_{43}}n_1 << n_1,
\end{aligned}
\qquad (36)
$$

(тому що $f_{41} >> f_{14}, f_{43} >> f_{41}$ і $f_{43} >> f_{42}$), де:

$$
\Delta' = 1+\left(1+\frac{q_3}{q_2}\right)\frac{q_2}{q_1}\exp\left(-\frac{h\nu_{12}}{kT}\right)+\frac{q_3}{q_2}\cdot\frac{f_{31}}{f_{21}}+\left(1+\frac{q_3}{q_2}\right)\cdot\frac{\eta B_{14}\rho_{14}(f_{42}+f_{43})}{f_{21}f_{43}}
$$

Якщо $f_{21} >> f_{31}$ і $f_{21} >> \eta B_{14}\rho_{14}$ і $h\nu_{12} >> kT$, то $\Delta' = 1$ і $n_1 = N(1-\delta)$; $n_2 \approx 0$; $n_3 = N\delta$; $n_4 \approx 0$.

Співвідношення (36) справедливі тільки при $\rho_{14} >> \rho_{14}^n$. Заселеності всіх рівнів залежать від інтенсивності накачування. В міру зростання накачування заселеність першого рівня падає, а інших зростає. Якщо f_{21} велике, що вимагає чотирирівнева схема функціонування, то заселеність 4-го рівня пропорційна потужності накачування, і інших практично не змінюється.

В чотирирівневих оптичних квантових генераторах $h\nu_{12} >> kT$, тому заселеність 2-го рівня менша заселеності першого рівня. В більшості випадків число частинок на четвертому рівні також мале, тому що вони швидко переходять на третій рівень. В тому випадку, якщо δ мале, число частинок і на третьому рівні також невелике. Таким чином, для нормального функціонування чотирирівневої системи необхідно, щоб співвідношення між імовірностями переходів були наступними:

$f_{21} >> f_{12}$; $f_{21} >> f_{32}$; $f_{21} >> f_{42}$;

$f_{43} >> f_{41}$; $f_{43} >> f_{42}$; $f_{43} >> f_{32}$;

або:

$d_{21} >> d_{12}; d_{21} >> B_{32}\rho_{23} + A_{32};$
$d_{21} >> d_{42}; d_{43} >> B_{41}\rho_{14} + A_{41};$
$d_{43} >> d_{42}; d_{43} >> B_{32}\rho_{23} + A_{32};$

Порогова потужність накачування необхідна, по-перше, щоб забезпечити інверсію населеностей рівнів $3 \to 2$ і, по-друге, щоб компенсувати втрати, зокрема, на люмінесценцію A_{32}. При $\rho_{14}^n > \rho_{14}$ в активному середовищі немає підсилення випромінювання. Генерація виникає лише тоді, коли швидкість накачування вище порогової, яка рівна:

$$\eta B_{14}\rho_{14}^n = (f_{13} + f_{32})\frac{\delta}{1-\delta} = (f_{13} + f_{32})\frac{\gamma_{23}}{\alpha_{32}^{\max} - \gamma_{23}},$$

в наближенні $1 >> (q_2 / q_1)\exp(-h\nu_{12} / kT)$. Таким чином, чим більше δ, тим вище значення втрат і тим більший потрібний коефіцієнт підсилення α_{32} для виникнення генерації, тобто тим більше n_3. Але з ростом n_3 збільшуються на люмінесценцію, що не бажано. Тож при $h\nu_{12} >> kT$, малих δ і інших рівних умовах порогова швидкість накачування $B_{14}\rho_{14}$ чотирирівневого генератора буде значно нижча, ніж в трирівневому. При цьому залежність $B_{14}\rho_{14}$ від коефіцієнта корисних страт дуже різка (див. **рис. 9**). Відтак, чим більше δ, тим менша перевага чотирирівневої схеми над трирівневою.

В трирівневому генераторі навіть при малих δ число частинок на другому рівні повинне бути більше половини. І цьому плані чотири рівневі генератори значно економніші трирівневих. Окрім того, у типового чотирирівневого генератора $(h\nu_{12} >> kT, \delta >> B_{14}\rho_{14} / f_{21})$ заселеність метастабільного третього рівня прямо пропорційна δ і коефіцієнту втрат. В той же час в трирівневому генераторі заселеність метастабільного (другого) рівня пропорційна ($q_1 / q_2 + \delta$) і тому зміна δ слабо відчувається. Іншими словами: трирівнева схема функціонування менш чутлива до втрат, ніж чотирирівнева.

При малих значеннях $h\nu_{12} / kT$ властивості чотирирівневої системи погіршуються і наближаються до властивостей трирівневої. Чотирирівнева має суттєві переваги над трирівневою в тому випадку, коли $1 >> q_2 / q_1 \cdot \exp(-h\nu_{12} / kT)$ і $1 >> \delta$.

Для отримання низьких порогів генерації активні тіла повинні задовольняти таким вимогам:

1. Лінія спонтанної люмінесценції повинна мати малу на півширину.
2. Шкідливі втрати на довжині хвилі генерації повинні бути якомога меншими, тобто час життя фотона в резонаторі повинен бути якомога більшим ($\tau_p \to \infty$).
3. Високий квантовий вихід люмінесценції робочого переходу ($\eta \approx 1$).
4. Схема функціонування – чотирирівнева, причому, $h\nu_{12} >> kT$, а час життя активних центрів на рівні 2 малий: ($d_{21} \to \infty$).
5. Коефіцієнт поглинання збуджуючого випромінювання повинен бути досить великим в широкому спектральному інтервалі.

На основі спектроскопічних досліджень була знайдена ціла низка активованих конденсованих середовищ, газових сумішей, які мають вказані властивості. В першу чергу це – іони перехідних металів (лантанідів, актинідів) і благородні гази.

Перехідні метали є в кількох підгрупах елементів періодичної таблиці Менделєєва. Це елементи з наступними атомними номерами: від 21 (скандій) до 30 (цинк), потім від 39 (ітрій) до 48 (кадмій), 57 (лантан), далі від 71 (лютецій) до 80 (ртуть) і, нарешті, 89 (актиній).

У всіх цих елементів оболонки $3d, 4d, 5d, 6d$ заповнюються електронами при послідовному збільшенні атомного номера, при цьому відповідні оболонки $4s, 5s, 6s, 7s$ вже заповнені. Тому оболонки nd перехідних металів захищені від зовнішнього впливу тільки однією оболонкою $(n+1)s$, що зумовлює сильну взаємодію з основою, тобто з кристалічною граткою, в якій знаходиться іон перехідного металу. В теперішній час ефективна лазерна генерація отримана на іонах хрому, нікелю, кадмію, міді, неодиму і ртуті. Найбільш детально вивченою лазерною речовиною є рубін, на якому і був створений перший оптичний квантовий генератор у 1960 р..