Тема 2. Спонтанні та вимушені переходи.
Лекція 2а.

Температура як характеристика стану речовини. Принцип та формула Больцмана. Формула Планка. Ефективна температура джерела. Три типи джерел електромагнітного випромінювання: теплові, люмінесцентні та генератори. Рівноважний стан квантових систем, населеність енергетичних рівнів. Закон розподілу населеності квантових систем. Властивості вимушеного випромінювання. Співвідношення між імовірностями вимушеного і спонтанного випромінювання. Збудження квантової системи. Інверсія населеності. Поняття від'ємної температури.

Температура як характеристика стану речовини. Температура пов'язана з поняттям тепла і холоду. Сучасна шкала Цельсія (Швеція) була запропонована в 1742 році. В ній були взяті дві реперні точки – точка замерзання води - 0^o та точка кипіння - 100^o. Сьогодні еталонною точкою є потрійна точка води – температура, при якій існують в рівновазі всі три фази води: пар-вода-лід. Цьому станові відповідає температура $0.01^o C$. Цю точку, що легко відтворюється в лабораторії, і прийнято за еталонну точку термодинамічної шкали, причому вважають її температуру рівною 273.16 К. Термодинамічна шкала визначає тільки відношення температур. Тобто формули термодинаміки не змінюються, якщо в них всі температури помножити на один і той же довільний множник (а при цьому ще й ентропію поділити на цей же множник).

Термодінамічна температура визначається так: $1/T = dS/dE$, де $S = k \ln W$ (термодинамічна ймовірність) – *принцип Больцмана*: „ентропія системи пропорційна термодинамічній ймовірності". Оскільки ентропія S є зростаюча функція внутрішньої енергії ($TdE = TdS + pdU$, де TdS - теплота, pdU - робота), то перехід від температури в енергетичних одиницях (T_E) до температури в градусах Кельвіна (T_K) , відповідно буде $T_E \to kT_K$ (k = 1.38· 10^{-23} $Дж \cdot К^{-1}$).

Принцип та формула Больцмана. Формула Планка. В класичній фізиці числові значення всіх величин задаються як відношення їх до еталонів, що зроблені людиною. Природні еталони – фундаментальні сталі – виникли лише в сучасній фізиці. Перший з них – швидкість світла (фундаментальний характер її полягає в тому, що швидкість світла не залежить від швидкості спостерігача і джерела) і відбиває зв'язок між масою і енергією

частинки $E = mc^2$. Наступна світова стала – стала Планка h $(E = h\nu)$, зв'язує енергію частинки з її хвильовою характеристикою – частотою.

Якщо виходити з розподілу Максвела і формули Ватерстона, температура є параметром поступального руху молекул.

$p = 1/3nm < \vartheta >^2_{ср}$ - формула Ватер стона (1845 р.)

де p - тиск газу, n густина газу, $< \vartheta >^2_{ср}$ - середнє арифметичне квадрату швидкості молекул. Звідси маємо зв'язок між кінетичною енергією частки і температурою середовища:

$$E_{кін} = 3/2kT$$

де $k = 1.38 \cdot 10^{-23}$ Дж·град$^{-1}$ – стала Боцмана.

Таким чином температура характеризує стан речовини. При термодинамічній рівновазі співвідношення населеностей рівнів i та k (див. лекцію 2) визначається формулою Больцмана:

$$n_i / n_k = g_i / g_k \exp\{-h\nu_{ki} / kT\}$$

звідки:

$$T = -h\nu_{ik} / k \ln \frac{g_k n_i}{g_i n_k} \qquad (1)$$

Таким чином, у випадку теплової рівноваги відношення населеностей рівнів (з урахуванням, звичайно, інших констант) однозначно пов'язане з температурою речовини. При цьому температура рівноважної системи однакова для всіх її частин.

Якщо вказаної рівноваги немає, то формально можна використовувати ті ж співвідношення (для простоти розглянемо не вироджену дворівневу систему) $n_i / n_k = \exp(-h\nu_{ik} / kT_{ik})$, де параметр T_{ik}, як і раніше, характеризує відношення населеностей n_i / n_k ш називається температурою переходу (або спіновою температурою T_s). Цілком природно, що в стані рівноваги всі температури переходів однакові і рівні дійсній температурі речовини в цілому. Якщо ж у який-небудь спосіб термодинамічна рівновага порушується то температура переходу буде відрізнятися від дійсної температури речовини. І біль того для різних пар рівнів можуть бути різні температури переходів. Оскільки при термодинамічній рівновазі чи при незначному відхиленні від неї

$n_i < n_k$, тобто $\ln(n_i / n_k) < 0$, то температура буде позитивною ($T_s > 0$). Якщо ж яким-небудь методом зрівняти населеності $n_i = n_k$ (створити насиченість), то температура стає рівною нескінченності ($T_s \pm \infty$), а при інверсній заселеності ($n_i > n_k$) температура стає від'ємною. Поняття „від'ємна температура" означає нерівноважний стан системи. Відмітимо, що температура макроскопічного тіла як цілого, може бути лише позитивною величиною. При відсутності термодинамічної рівноваги розподіл частинок по енергетичних рівнях може бути „довільним". Тому, якщо в основу визначення температури покласти розподіл Больцмана, то стан системи, коли на нижньому рівні знаходиться більше частинок, ніж на верхньому, буде описуватися позитивною, а в протилежному – від'ємною температурою. У відповідності з таким визначенням температури, якщо, наприклад, всі частинки в дворівневій системі знаходяться на нижньому енергетичному рівні, то їй відповідає температура переходу $T_s = +0K$; якщо ж всі частинки знаходяться на верхньому енергетичному рівні (повна інверсія системи), то $T_s = -0K$. Стан системи, коли верхній і нижній рівні заселені однаково (насичення системи), відповідає $T_s = \pm\infty K$. Схематично це показано на **рис. 1**. Графік залежності n_i / n_k від температури показано на **рис. 2**, з якого видно що повна інверсія виникає при наближенні температури переходу до нуля з сторони від'ємних температур, в той же час як повне звільнення верхніх рівнів відбувається при $T_s \to 0$ з сторони позитивних температур. При $T_s = +0^o K$ енергія системи мінімальна, а при $T_s = -0^o K$ - максимальна, тобто від'ємна температура „гарячіша" позитивної, оскільки при $T_s \to \infty K$ можна отримати тільки насичення населеностей рівнів ($n_i = n_k$), але ніяк не інверсію. Інверсію описує тільки від'ємна температура.

Порушення теплової рівноваги до стану системи з від'ємною температурою здавалось настільки неймовірним, що до 1940-х років не було навіть спроби отримати інверсні стани.

Фізичного змісту від'ємна температура не має. Це тільки спосіб описати інверсний стан речовини, який реалізується в робочому тілі будь-якого квантового генератора. (Температура в термодинаміці грає роль теплового потенціалу. Тому цілком

природно, що вона може бути як від'ємною так і позитивною, як значення будь-якого фізичного потенціалу).

Джерело електромагнітного випромінювання може характеризуватися ще й так званою ефективною температурою, що подібно до температури переходу, не має фізичного змісту, але зручна для опису інтенсивності і спектрального складу теплових джерел за допомогою ***формули Планка:***

$$\rho = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \cdot \frac{1}{e^{h\nu / kT} - 1} \qquad (2)$$

Справа в тому, що інтенсивність випромінювання абсолютно чорного тіла добре описуються формулою Планка, де єдиним параметром, від якого залежить як інтенсивність, так і спектральний склад випромінювання, є температура.

Ефективна температура джерела. Три типи джерел електромагнітного випромінювання: теплові, люмінесцентні та генератори. Для збереження температура в якості параметра і для джерела, яке не є абсолютно чорним тілом, вводиться поняття ефективної температури T_e. *Під ефективною температурою джерела розуміють температуру, яку повинне мати абсолютно чорне тіло, щоб спектральна густина випромінювання в заданому інтервалі частот випромінювання абсолютно чорного тіла і даного джерела випромінювання були однакові.* (**Див рис. 3**).

Часто користуються поняттям „яскравості" температури ($T_я$), під якою розуміють таку температуру абсолютно чорного тіла, при якій його випромінювальна здатність („яскравість") рівна випромінювальній здатності даного джерела на заданій довжині хвилі. В ряді випадків використовується поняття кольорової температури ($T_к$), під якою розуміють таку температуру абсолютно чорного тіла, при якій спектральний розподіл енергії найближче відповідає розподілу енергії по спектру джерела (кольори однакові).

Джерела електромагнітного випромінювання умовно можна розбити на три типи: теплові, люмінесцентні і генератори. Спектральний склад випромінювання теплових джерел дуже близький до спектрального складу випромінювання абсолютно чорного тіла. Тому ефективна температура теплового джерела мало відрізняється від його дійсної температури. Оскільки

спектральний склад люмінесцентних джерел значно вужчий спектрального складу теплових джерел випромінювання, то ефективна температура люмінесцентного випромінювача значно перевищує дійсну.

Ще більша різниця між ефективною і дійсною температурою у випадку генераторів, які практично випромінюють монохроматичне світло. Наприклад, спонтанна люмінесценція рубіну з напівшириною смуги 10 см$^{-1}$ в області 694 нм характеризується ефективною температурою T_e порядку $5\cdot10^4 K$, при дійсній 300 K. А при його генерації потужністю 10^3 Вт і напівшириною лінії випромінювання порядку 0.01 см$^{-1}$ на тій же довжині хвилі отримаємо $T_e \sim 10^{13} K$ при незмінній дійсній температурі. У випадку радіочастотних генераторів, монохроматичність випромінювання яких набагато вища, величини T_e можуть досягати значення $10^{15} - 10^{25} K$.

Механізм виникнення випромінювання в квантових генераторах суттєво відрізняється від механізму, який зумовлює випромінювання в теплових і люмінесцентних джерелах.

Випромінювання в нагрітих тілах при люмінесценції відбувається за рахунок спонтанних переходів із збуджених рівнів на нижче розташовані з ймовірністю:

$$A_{ik} = \frac{64\pi^4}{3g_i} \cdot \frac{e^2}{hc^3} \cdot \nu_{ik}^3 |x_{ik}|^2 \qquad (3)$$

де e- заряд електрону, ν_{ik}- частота переходу, i та k – індекси верхнього і нижнього рівнів, відповідно.

Квантовий вихід люмінесценції при переході в ІЧ-область суттєво падає внаслідок зменшення ймовірності спонтанного випромінювання ($A \sim \nu_{ik}^3$) з зменшенням частоти. Ця ж обставина поліпшує становище по створенню ІЧ лазера і ускладнює реалізацію лазера в УФ-області. Коефіцієнт Ейнштейна вимушеного переходу від частоти не залежить:

$$B_{ik} = \frac{8\pi^3}{3g_i h^2} \cdot e^2 |x_{ik}|^2 \qquad (4)$$

Рівноважний стан квантових систем, населеність енергетичних рівнів. Закон розподілу населеності квантових

систем. Властивості вимушеного випромінювання. Для створення квантових генераторів і підсилювачів необхідно отримати інверсний стан в робочий системі, тобто отримати стан з від'ємною температурою. Однією з основних характеристик систем з від'ємною температурою є „число активних частинок", тобто надлишок частинок на верхньому рівні в порівнянні з їх числом на нижньому рівні $\Delta n = n_i - n_k$ з врахуванням больцманівського розподілу, - які утворюються за одиницю часу. Це число визначає потужність, яку може випромінювати система.

Для простоти розглянемо дворівневу систему (**рис. 4**). При термодинамічній рівновазі з навколишнім середовищем виконується принцип детальної рівноваги, тобто будь-який процес, що відбувається в одному напрямку, компенсується зворотним процесом з врахуванням неоптичних переходів. ***Переходи без участі фотонів називаються неоптичними***. Неоптичні переходи можна розбити на дві групи: переходи за участю квазічастинок, і переходи, які відбуваються при зіткненні реальних частинок. Переходи першої групи відбуваються в кристалах, склі, рідинах; переходи другої групи – в газах і рідинах.

З цього принципу були отримані співвідношення для коефіцієнтів Ейнштейна (9). Ці співвідношення універсальні, їх можна застосовувати до різних систем, до будь-яких комбінацій рівнів енергій. Більше того, вони, застосовуються і при відсутності рівноваги, так як мають тільки постійні сталі, які характеризують властивості самої квантової системи і ніяк не пов'язані з температурою навколишнього середовища.

Принцип детальної рівноваги також дозволяє отримати співвідношення між ймовірностями неоптичних (безвипромінювальних) переходів d_{ik} та d_{ki}. Механізми неоптичних переходів можуть бути найрізноманітнішими. В основі їх лежить внутрішньо молекулярна чи міжмолекулярна взаємодія окремих ступенів свободи. Детальна рівновага вимагає щоби:

$$d_{ki} n_k = d_{ik} n_i \qquad (5)$$

Отже:

$$\frac{d_{ki}}{d_{ik}} = \frac{n_i}{n_k} = \frac{g_i}{g_k} \cdot \exp\left(-\frac{h\nu_{ik}}{kT} \right) \qquad (6)$$

Отримане співвідношення значною мірою універсальне, але в нього входить температура. Це пов'язано з статистичним характером рівноважного розподілу частинок за рівняннями енергії. Із співвідношення випливає, що $d_{ik} > d_{ki}$ тобто система прямує до термодинамічної рівноваги. Під впливом зовнішньої дії в системі може бути порушена термодинамічна рівновага. В результаті збурена система перейде в збуджений стан, при цьому обов'язково виникнуть процеси, які намагатимуться повернуть її у початковий стан. Якщо зовнішня дія триває досить довго, то через певний проміжок часу встановлюється стаціонарний стан з цілком певним ступенем порушення термодинамічної рівноваги, яка залежить від швидкості конкуруючих процесів. Після припинення збудження відбувається поступове відновлення порушеної термодинамічної рівноваги. Зокрема у випадку системи з двох не вироджених рівнів, легко отримати заселеності цих рівнів, які при термодинамічній рівновазі і з врахуванням безвипромінювальних переходів будуть виглядати так:

$$n_1^0 = N\frac{A_{21}+d_{21}}{A_{21}+d_{21}\left(1+\exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)\right)};$$

$$n_2^0 = N\frac{d_{21}\exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)}{A_{21}+d_{21}\left(1+\exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)\right)} \qquad (7)$$

де $N = n_1^0 + n_2^0$ - загальне число частинок.

При наявності оптичного збудження в стаціонарному режимі, що виникає під дією зовнішньої радіації густини ρ, значення n_1 та n_2 змінюються в часові і, згідно з принципом детальної рівноваги при $g_1 = g_2$ отримаємо:

$$(B\rho + d_{12})n_1 = (A + B\rho + d_{21})n_2 \qquad (8)$$

На відміну від термодинамічної рівноваги ця рівність виконується не для кожного каналу (оптичного і неоптичного) окремо. а тільки для всіх переходів в цілому. Використовуючи зв'язок між d_{ik} та d_{ki}, $N = n_1 + n_2$ з рівняння (8) отримаємо:

$$n_1 = N\frac{A + B\rho + d_{21}}{A + 2B\rho + d_{21}\left(1 + \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)\right)};$$

$$n_2 = N\frac{B\rho + d_{21}\exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)}{A + 2B\rho + d_{21}\left(1 + \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)\right)} \qquad (9)$$

Отже, якщо в (9) $\rho = 0$, то маємо рівноважний розподіл центрів за рівнями, тобто n_1^0 і n_2^0 при відсутності збуджуючого випромінювання.

Ступінь відхилення від рівноважного розподілу (n_1^0 і n_2^0) залежить не тільки від густини збуджуючого випромінювання і співвідношення між ймовірностями оптичних і неоптичних переходів, але й від температури середовища, тобто від стану системи в момент вимкнення збудження. При даному ρ найбільше відхилення від рівноваги, тобто $(n_2 - n_2^0)$ досягається при $T \to 0$:

$$(n_2 - n_2^0)_{\max} = \frac{B\rho}{A + 2B\rho + d_{12}} N \qquad (10)$$

Швидкість повернення системи до термодинамічної рівноваги, як і час встановлення стаціонарного режиму, залежить від температури навколишнього середовища. Швидкість зміни n_2 після вимкнення накачування буде рівна різниці повних ймовірностей вибуття частинок з верхнього рівня і приходу на нього з нижнього, тобто:

$$dn_2 / dt = -(A + d_{21})n_2 + d_{12}n_1 \qquad (11)$$

Аналогічно для нижнього рівня:

$$dn_1 / dt = (A + d_{21})n_2 - d_{12}n_1 \qquad (12)$$

Розв’язуючи ці два рівняння одночасно, з’ясовуємо, що час релаксації системи до рівноважного стану після вимкнення накачування, має такий вигляд:

$$\tau = \frac{1}{A + d_{21}\left(1 + \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right)\right)} \qquad (13)$$

Величина τ визначає середній час життя системи в збудженому стані. Отже, при великих енергетичних відстанях між рівнями, що відповідає оптичним переходам, і невисоких температурах, наприклад кімнатних ($\sim 300K$), коли $h\nu >> kT$, отримуємо що $\tau \to 1/(A + d_{21})$. Величина τ може змінюватися в широких межах – від секунд до 10^{-12} с.

Природно, що чим більші ймовірності неоптичних переходів, тим швидше відбувається повернення системи в стан термодинамічної рівноваги. Наявність неоптичних переходів перешкоджає виведенню системи з рівноважного стану.

Таким чином, при відсутності термодинамічної рівноваги розподіл частинок між двома рівнями може бути „довільним". Тому, якщо в основу означення температури покладено розподіл Больцмана, то стан частини системи, коли на більш глибокому енергетичному рівні знаходиться більше частинок, ніж на більш високому, буде описуватись позитивною температурою переходу, в протилежному випадку – від'ємною температурою переходу, а при насиченні – рівною нескінченності.

Співвідношення між ймовірностями вимушеного і спонтанного випромінювання.

Явище поглинання і вимушеного випромінювання завжди співіснують, представляючи дві нерозривні сторони одного й того ж процесу – взаємодії світла і речовини. Вимушене випромінювання, що лежить в основі дії квантових підсилювачів і генераторів, є процесом, оберненим (зворотнім) процесу поглинання електромагнітних хвиль атомними і молекулярними системами. Саме тому вимушене випромінювання часто називають від'ємним поглинанням.

Коли фотон поглинається атомом, енергія фотонів перетворюється у внутрішню енергію атома, в результаті чого атом збуджується з ймовірністю, яка у найпростішому випадку дворівневої системи дорівнює:

$$B_{1\to 2} = \frac{8\pi^3}{3h^2 g_1} e^2 \rho(\nu) \left| X_{12} \right|^2 = B_{12} \rho(\nu) \qquad (14)$$

де $\rho(\nu)$ - густина поля на частоті ν. Через деякий час (час життя τ) він довільно може випромінювати отриману енергію (випромінювати фотон) і повернутися у вихідний стаціонарний стан або деякий енергетично більш низький проміжний стан з ймовірністю:

$$A_{2\to 1} = \frac{1}{\tau_{21}} = \frac{64\pi^4}{3hg_2} \frac{e^2}{c^3} \nu^3 \left| X_{21} \right|^2 = A_{21} \qquad (15)$$

Якщо ж на збуджений стан потрапляє зовнішній фотон з енергією, що дорівнює енергії його збудження, то атом випромінює фотон, тотожний падаючому з імовірністю:

$$B_{2\to 1} = \frac{8\pi^3}{3h^2 g_2} e^2 \rho(\nu) \left| X_{21} \right|^2 = B_{21} \rho(\nu) \qquad (16)$$

В результаті замість одного фотона буде два. Три вищезгаданих процеси схематично показано на **рис. 5**.

Розглянуті вище процеси є одно фотонними, тобто число фотонів, що беруть участь в одинарному акті, змінюється на одиницю. В нелінійній оптиці розглядаються можливі процеси з багатьма фотонами.

Основне завдання при створенні квантових генераторів полягає в отриманні „активного тіла”, тобто системи, в якій є рівні з від’ємною температурою переходу (інверсний стан). Тоді електромагнітна хвиля відповідної частоти, яка проходить через речовину, призведе до виникнення наростаючого каскаду фотонів, тобто така система буде мати від’ємний коефіцієнт поглинання.

Природно, генерація робочим тілом можлива, якщо ймовірність вимушеного випромінювання більша ніж спонтанного. Оцінимо їх відношення при термодинамічній рівновазі:

$$\frac{B_{ik}\rho(\nu)}{A_{ik}} = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \frac{1}{\exp\frac{h\nu}{kT} - 1} \times \frac{B_{ik}}{\frac{8\pi h \nu^3}{c^3} B_{ik}} = \left(\exp\frac{h\nu}{kT} - 1 \right)^{-1} = q_T \qquad (17)$$

де $q_T = \frac{c^3}{8\pi h\nu^3}\rho(\nu)$.

Формула Планка:

$$\rho(\nu) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\frac{1}{\exp\frac{h\nu}{kT}-1}$$

складається з трьох частин:

а) $\frac{8\pi h\nu^3}{c^3}$ - густина коливань електромагнітного поля на частоті ν в одиниці об'єму і в одиничному спектральному інтервалі (густина мод),

б) $h\nu$ – енергія фотона,

в) $1/\left(\exp\frac{h\nu}{kT}-1\right)$ - число фотонів у типові коливань теплового випромінювання при температурі T.

Таким чином. на заданій частоті випромінювання відношення імовірності вимушених переходів до імовірності спонтанних при термодинамічній рівновазі між середовищем і електромагнітним полем дорівнює числу фотонів в моді теплового випромінювання при даній температурі. Імовірність же вимушеного випромінювання на даній моді залежить від числа фотонів в даній моді, тобто $B\rho = Aq$. Саме це є фізичною основою роботи лазерів. Чим більше фотонів в моді, тим більша імовірність вимушеного випромінювання на цій моді.

Збуджені атоми можуть спонтанно випромінювати у формі однієї з $\frac{8\pi\nu^2}{c^3}\Delta\nu$ мод в одиниці об'єму (при $\nu' = 10^4 см^{-1}$, $\Delta\nu = 1см$, це число порядку $\sim 10^9$ (коефіцієнт переходу від $\nu'\left[см^{-1}\right]$ до $\nu\left[c^{-1}\right] - 3\cdot 10^{10}$)).

В той же час індуковане випромінювання визначається модою падаючого фотона. Оскільки частота ν велика в оптичній області, то відповідно імовірність спонтанного випромінювання теж велика.

Для оптичної області спектра $h\nu \approx 10^{-12} ерг$, а $kT \approx 10^{-14} ерг$ (при $300K$), тобто $h\nu/kT = 10^2$, отже $q = 1/(e^{100}-1) \approx 3.7\cdot 10^{-44}$.

Таким чином, далеко не в кожній моді є фотон, тобто домінує спонтанне випромінювання і тільки при штучно створених умовах

можна зробити $q > 1$і, отже збільшити імовірність вимушених переходів.

Оскільки імовірність індукованого випромінювання пропорційна густині енергії індукованого поля, то при досить великій густині цього поля відбувається, головним чином, індуковане когерентне випромінювання. Критерієм когерентності тих чи інших коливань є наявність постійного фазового співвідношення між ними. В квантовій теорії в силу співвідношення невизначеності „число квантів – фаза хвилі”:

$$\Delta q \cdot \Delta \varphi \geq 1/2$$

тобто фаза електромагнітної хвилі визначена тільки у випадку, коли число квантів q невизначене. Разом з тим, якщо для двох хвиль відома різниця фаз, то співвідношення невизначеностей дозволяє встановити повне число квантів, залишаючи невизначеним приналежність хвиль до квантів.

Спонтанне випромінювання є випадковим процесом, тому акти спонтанного випромінювання квантових частинок не залежать один від одного і, отже, таке випромінювання не когерентне (різниця фаз не постійна). В ізотропному середовищі індикатриса спонтанного випромінювання – сфера. Така форма індикатриси обумовлена тим, що спонтанне випромінювання відбувається в будь-якому напрямку з однією й тією ж ймовірністю, вимушене ж випромінювання і поглинання відбувається з відмінною від нуля імовірністю тільки в напрямку падаючого фотона. Тому індикатриса вимушеного випромінювання визначається індикатрисою вимушую чого випромінювання.

В попередньому розгляді не враховувалася ширина спектральної лінії. Врахування на півширини лінії приводить до того, що коефіцієнт спонтанного ейнштейнівського переходу A_{ik} треба замінити на $A_{ik} g(\nu')$, де $g(\nu')$ - форма лінії випромінювання, котра. як правило, нормована на площу, тобто:

$$\int_0^\infty g(\nu') d\nu' = 1 \qquad (18)$$

Отже імовірність спонтанного переходу в межах смуги, яка розглядається:

$$A_{i\to k} = \int_0^\infty A_{ik} g(\nu') d\nu' = A_{ik}$$

для вимушеного переходу імовірність буде рівна:

$$B_{ik} \rho(\nu') \delta(\nu - \nu') d\nu'$$

Дираківська δ-функція враховує особливість вимушених переходів – вимушуючий фотон породжує собі подібного. Отже імовірність вимушеного переходу в межах смуги:

$$B_{i\to k} = \int_0^\infty B_{ik} \rho(\nu) g(\nu') \delta(\nu - \nu') d\nu' = B_{ik} \rho(\nu) g(\nu)$$

де $B_{ik} \rho(\nu) g(\nu)$ - спектральна імовірність вимушених переходів. Форма лінії $g(\nu)$ визначається багатьма факторами. Зокрема, часом життя збудженого стану:

$$\tau_i^{-1} = \sum_k A_{ik}$$

де сумування проводиться за всіма рівнями, на які відбуваються переходи з даного i-го рівня. Кожний з рівнів маж свою ширину, яка вираховується із співвідношення невизначеності:

$$\Delta E \cdot \Delta t \sim h$$

Тобто, чим менший час життя, тим більша ширина рівня. Цей параметр визначає природне (однорідне) спектральне розширення лінії. Вона, звичайно може бути розширена і внаслідок інших факторів: зіткнення частинок, допплерівського розширення, розширення кристалічним полем і. т.п. Термін „однорідне розширення лінії застосовується в тих випадках, коли лінія, яка відповідає кожній квантовій частинці, під впливом зовнішніх факторів розширюється однаково. При однорідному розширенні поза залежністю від його природи спектральна залежність $g(\nu)$ є єдина спектральна характеристика як одного атому, так і своєї сукупності атомів. Прикладом однорідного розширення є природна ширина лінії і розширення внаслідок зіткнень частинок в газах.

Однорідне розширення добре описується лоренцовою (дисперсійною) кривою, тобто:

$$g_L(\nu_0,\nu)=\frac{1}{\pi\Delta\nu_L}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{\nu-\nu_0}{\Delta\nu_L}\right)^2} \qquad (19)$$

де $\Delta\nu_L$ - на півширина лінії, а ν_0 - частота максимуму кривої. У резонансному випадку $\nu=\nu_0$ і для максимуму лоренцівського розподілу маємо:

$$g_L(\nu_0,\nu)=\frac{1}{\pi\Delta\nu_L} \qquad (20)$$

При відсутності зовнішніх дій спонтанне випромінювання визначає час життя стану. Тому найменша можлива ширина лінії $2\Delta\nu$ визначається імовірністю спонтанного переходу A_{ik}:

$$2\Delta\nu=\frac{A_{ik}}{2\pi}$$

Природна ширина, як правило суттєва тільки на дуже високих частотах і для добре дозволених переходів. Звичайно впливом спонтанного випромінювання на ширину лінії можна знехтувати, тому що в реальних умовах релаксації безвипромінювальні переходи більш ефективно скорочують життя. Ці переходи виникають в результаті взаємодії квантової частинки з її довкіллям. Механізм процесів цих взаємодій визначається конкретною системою. Це може бути взаємодія між іонами і граткою кристалу, співудари між молекулами газу або рідини і т.п. В кінцевому результаті дії релаксаційних процесів є обмін енергією між підсистемами частинок і тепловими рухами в системі в цілому, що призводить до термодинамічної рівноваги між ними.

Час встановлення рівноваги (час життя частинки на рівні) називається поздовжнім часом релаксації - T_1 (релаксація спін-гратка). Це позначення взяте з електронного парамагнітного і ядерного магнітного резонансів. Поздовжня релаксація відповідає руху вектора високочастотної намагніченості системи частинок вздовж напрямку магнітного поля H_0. Рух високочастотної складової магнітного поля в площині, перпендикулярній H_0 - поперечний час релаксації - T_2 (спін-спінова релаксація). Якщо в якийсь момент часу дипольні моменти всіх частинок були

синфазні, то протягом часу T_2 ця син фазність порушувалась. Оскільки будь-який процес, який здійснює вклад в час релаксації T_1 приводить до втрати фази, то $T_1 \geq T_2$.

У всіх системах, де суттєва взаємодія частинок одна з одною (спін-спінова взаємодія) $T_1 > T_2$, а частіше $T_1 >> T_2$. В молекулярних пучках, де частинки не співударяються, $T_1 = T_2$ і рівне часові прольоту через область взаємодії з полем випромінювання. Оскільки T_2 - найкоротший час релаксації, то саме він визначає ширину лінії переходу:

$$\Delta\nu_0 = \frac{1}{2\pi T_2}$$

В оптиці час життя частіше позначається τ, „природний" час життя - τ_0 і він визначає „природну ширину лінії переходу:

$$\tau_0 = \frac{1}{2\pi\Delta\nu_0} = \frac{1}{\Delta\omega_0}$$

Таким чином, спектральні лінії характеризуються скінченою спектральною шириною. Оскільки можливий спонтанний перехід не тільки з верхнього (i) рівня, але й з нижнього (k), якщо він не основний, то на півширина лінії буде визначатися сумою швидкостей цих процесів:

$$\Delta\nu_0 = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{\tau_{0i}} + \frac{1}{\tau_{0k}}\right)$$

Отже імовірність спонтанного переходу спектрально залежна і буде описуватися функцією – формфактор $g(\nu)$. Лоренцева крива описує процеси при випадковому збитті фази, що відповідає спонтанному випромінюванню.

У тих випадках, коли різні центри знаходяться в неоднакових умовах, відбувається зміщення частот їх максимумів випромінювання, що призводить до, так званого, *неоднорідного* розширення підсумкової смуги. Наприклад, це спостерігається з іонами Nd^{3+} в склі або при випромінюванні в газорозрядних трубках – допплерівське розширення. При цьому форма лінії окремого центру – лоренцева з максимумом на ν_0. А функція, яка

описує розподіл центрів по частотах їх максимумів випромінювання, близька до гаусової функції:

$$g_G(\nu_0,\bar{\nu}) = \sqrt{\frac{\ln 2}{\pi}\cdot\frac{1}{\Delta\nu_G}\exp\left[-2\left(\frac{\nu_0-\bar{\nu}_0}{\Delta\nu_G}\right)\right]} \tag{21}$$

де - $\bar{\nu}_0$ частота, а $\Delta\nu_G$ - її на півширина. При точному резонансі:

$$g_G(\nu_0,\bar{\nu}) = \sqrt{\frac{\ln 2}{\pi}\cdot\frac{1}{\Delta\nu_G}} \tag{22}$$

Форма підсумкової лінії є згорткою лоренцевої і гаусової кривих і описується функцією Фогта:

$$g_F(\nu) = \int\limits_{(\nu)} g_G(\nu_0,\bar{\nu}_0)g_L(\nu_0,\nu)d\nu =$$

$$= \frac{\sqrt{\ln 2}}{\pi^{3/2}\Delta\nu_L\cdot\Delta\nu_G}\times\int\limits_{(\nu)}\frac{\exp\left[-2\left(\frac{\nu_0-\bar{\nu}_0}{\Delta\nu_G}\right)^2\right]}{1+\left(\frac{\nu-\nu_0}{\Delta\nu_L}\right)^2}d\nu \tag{23}$$

В газах типове розширення рівне $\Delta\nu' = 10^{-2}\,см^{-1}$ і обумовлене допплерівським ефектом. Внаслідок взаємодії робочих іонів з кристалічним полем (вплив ефектів Штарка і Зеемана) в твердих тілах при кімнатній температурі такої вузької лінії отримати не вдається. Наприклад, у рубіна (Cr^{3+} у корунді) ширина лінії люмінесценції при кімнатній температурі $\Delta\nu' = 10\,см^{-1}$. Із зменшенням температури ширина лінії звужується до $0.3\,см^{-1}$ при $77K$.

Причиною неоднорідного розширення може бути будь-який процес, який викликає різні умови випромінювання (поглинання) для частини атомів досліджуваного ансамблю частинок або в ансамблі атомів з близькими, але різними спектральними властивостями (наприклад, надтонка структура). Термін „неоднорідне розширення” виник в спектроскопії ядерного магнітного резонансу, де має місце вплив неоднорідності H_0 в

межах досліджуваного зразка. Аналогічну природу має неоднорідне розширення в домішкових неоднорідних кристалах, в яких неоднорідність внутрішньо-кристалічного поля призводить до відмінності у величині штарківського зсуву частоти випромінювання домішковими центрами. Класичним проявом неоднорідного розширення є допплерівське розширення в газових системах. Зокрема, у видимому діапазоні при не дуже високих температурах $(300-600K)$ воно лежить в межах $0.8-1.5ГГц$. Для CO_2 лазера при $400K$ для $\lambda=10.6$ мкм $\Delta\nu_D=60$ МГц, для $He-Ne$ лазера при $400K$ для $\lambda=0.63$ мкм $\Delta\nu_D=1.3-1.4$ ГГц.

В класичному наближенні, коли збуджена частинка розглядається як осцилятор (амплітуда і фаза коливань постійні). зміна фази змінює взаємодію осцилятора з електромагнітним полем. Ця зміна має випадковий характер. І якщо в результаті зіткнення початкове фазове співвідношення порушується. можна вважати, що з полем взаємодіє новий осцилятор. а старий зник. Отже, середній час вільного прольоту осцилятора між фазозбиваючими зіткненнями є середнім часом життя частинок по відношенню до зіткнень такого роду, тобто: $\Delta\nu_{cm}=1/2\pi\tau_{cm}$ - це однорідне розширення $(\Delta\nu_L)$. Але величина τ_{cm} визначається газо кінематичним перерізом процесу збою фази при ударі σ_{cm}, швидкістю теплового руху частинок газу v і густиною газу n: $\tau_{cm}=1/n\nu\sigma_{cm}$, тобто $\Delta\nu_{cm}=n\nu\sigma_{cm}/2\pi$ - це неоднорідне розширення $\Delta\nu_G$.

При оцінках параметрів активного середовища зручніше користуватися не контуром смуги $g(\nu)$, а її значенням у максимумі. У випадку лоренцового (дисперсійного) контуру число фотонів в моді при термодинамічній рівновазі в максимумі рівне:

$$\widetilde{q}_L=\frac{c^3}{8\pi^2h\nu^3}\rho(\nu)\frac{1}{\Delta\nu_L} \qquad (24)$$

а для гаусового:

$$\widetilde{q}_G=\frac{c^3}{8h\nu^3}\rho(\nu)\sqrt{\frac{\ln 2}{\pi^3}}\frac{1}{\Delta\nu_G} \qquad (25)$$

З цих співвідношень випливає, що концентрація фотонів в моді росте обернено пропорційно ширині смуги люмінесценції. Це зрозуміло – чим менше $\Delta\nu$ при тому ж квантовому виході, тим більше концентрація фотонів в моді.

Проведемо оцінку енергії випромінювання, при якій імовірності випромінювання переходів з спонтанними. Приміром, коли спектральна ширина вимушеного випромінювання суттєво вужча смуги люмінесценції. Тобто: $\rho(\nu)=\rho(\nu_0)\cdot\delta(\nu-\nu_0)$, де $\delta(\nu-\nu_0)$- дельта функція Дірка. Тоді згідно з раніше розглянутим співвідношенням $B_{i\to k}=\int_0^\infty B_{ik}\rho(\nu)g(\nu')\delta(\nu-\nu')d\nu'=B_{ik}\rho(\nu)g(\nu)$, відношення імовірності вимушених переходів до імовірності спонтанних в максимумі кривої люмінесценції на частоті ν_0 буде:

$$\widetilde{q}_L=\frac{c^3}{8\pi^2 h\nu^3}g(\nu_0)\rho(\nu_0) \tag{26}$$

При $q=1$ для смуги з дисперсійним контуром отримаємо число фотонів m при $\nu'=10^4 см^{-1}$ та $\Delta\nu'=0.1 см^{-1}$:

$$m=\frac{\rho(\nu)}{h\nu_0}=\frac{8\pi^2\nu_0^2}{c^3}\Delta\nu_L\approx 8\cdot10^8\,\frac{фотонів}{см^3} \tag{27}$$

З (27) видно, що імовірності вимушених і спонтанних переходів зрівняються при густині фотонів m вимушеного випромінювання, яке співпадає з точністю до π з числом, рівним об'ємній густині коливань електромагнітного поля в на півширині смуги люмінесценції. Якщо $\Delta\nu'=0.1 см^{-1}$, $\nu'=10^4 см^{-1}$ отримуємо $m=8\cdot10^8 фотонів/см^3$, що відповідає густині випромінювання $\rho(\nu_0)=1.6\cdot10^{-10}\,Дж\cdot см^{-3}$ або $1.6\cdot10^{-3}\cdot ерг\cdot см^{-3}$.

При термодинамічній рівновазі імовірності вимушених переходів на тій же частоті стають рівними імовірностям спонтанних переходів згідно з (17), за умови:

$$\left(\exp\frac{h\nu}{kT}-1\right)^{-1}=1$$

Отже, температура абсолютно чорного тіла в цьому випадку повинна бути рівною:

$$T = \frac{h\nu}{k \ln 2} \approx 2 \cdot 10^4 K$$

Таким чином, імовірності вимушеного і спонтанного випромінювання в абсолютно чорного тіла стають рівними на частоті $\nu = 10^4 см^{-1}$ при температурі порядку $20000K$, що практично не можливо реалізувати.

Вимушене випромінювання є лавиноподібний процес народження тотожних фотонів. Тому їм відповідає випромінювання надзвичайно вузької спектральної ширини (тотожність підкреслена і дельта функцією $\delta(\nu - \nu_0)$). Дійсно на алюмоітрієвому гранаті, активованому неодимом (АІГ: Nd^{3+}, на півширина спектру генерації $10^{-9} A$ (300 ГГц = 0.3 ТГц). Підкреслимо, що повна імовірність переходу квантової частинки з стану i в стан k з випромінюванням фотона рівна сумі імовірностей спонтанного і індукованого випромінювання. При цьому фотони спонтанного випромінювання на відміну від фотонів вимушеного випромінювання не когерентні. Тому природним джерелом шуму, який обмежує чутливість квантового підсилювача і стабільність генератору, буде спонтанне випромінювання.

Імовірності вимушених переходів знизу догори і зверху донизу рівні з точністю до статистичних ваг. А так як при термодинамічній рівновазі заселеність нижніх рівнів k більша ніж верхніх i, то поглинання перевищує вимушене випромінювання. Отже для отримання підсилюючого середовища необхідно, щоб заселеність верхнього рівня була б більшою від нижнього, тобто в середовищі повинна мати місце інверсія заселеностей. Природно виникає питання: яким чином та в яких середовищах така ситуація реалізується?

Якщо енергетичні рівні квантових частинок в ансамблі еквідістантні і необмежені зверху, що має місце у випадку гармонійного осцилятору, то створення інверсії, і, отже, підсилюючого середовища, неможливо. Дійсно, імовірність переходів вверх і вниз однакова, але число рівнів не обмежене зверху, тому число переходів вверх завжди буде більше ніж переходів донизу.

Якщо ж енергетичні рівні квантових частинок ансамблю нееквідістантні, то резонанс між полем і переходом частинок має місце тільки для однієї пари рівнів. Якщо тим чи іншим способом для цієї пари досягнута інверсія заселеностей, то при проходженні електромагнітної хвилі буде мати місце підсилення. При цьому вимушені переходи змінюватимуть заселеність тільки резонуючих двох рівнів. В той же час заселеність по всіх інших рівнях несуттєва і може підкорятися розподілу Больцмана. Ідеалізація розгляду квантових генераторів і підсилювачів на дворівневій моделі широко використовується в теорії. Але, необхідна умова, яка висувається до активного середовища – нееквідистантність енергетичних рівнів у квантових частинок. це виконується для всіх реальних величин.

Від'ємний коефіцієнт поглинання.

Явища поглинання і вимушеного випромінювання завжди співіснують, представляючи дві нерозривні сторони одного й того ж процесу взаємодії світла і речовини. Саме тому вимушене випромінювання часто називають від'ємним поглинанням. Ефект лінійного поглинання описується законом Бугера:

$$I = I_0 e^{-k_\nu x} \qquad (28)$$

де k_ν - коефіцієнт поглинання на заданій частоті, x - шлях (товщина речовини) на якому відбувається послаблення світлового потоку, I_0 - величина, що дорівнює

$$I = c\rho(\nu)\left[Bm \cdot см^{-2}\right] \qquad (29)$$

I - описує густину світлового потоку (інтенсивність), I_0 - інтенсивність, що падає на речовину (поглинаючий шар).

Закон Бугера (1729 рік) стверджує, що коефіцієнт поглинання не залежить від густини потоку енергії чи інтенсивності випромінювання, яке проходить через речовини і товщини поглинаючого шару. Академік С.І.Вавілов експериментально перевіряв закон Бугера і встановив, що він справедливий при зміні інтенсивності падаючого випромінювання до 10^{20} разів. Але подальші дослідження на ураніловому склі показали, що діапазон змін інтенсивності, в межах якого справедливий закон Бугера,

залежить від часу життя збуджених станів (τ_{ik}). Зокрема, для дослідів С.І.Вавілова $\tau_{ik} < 10^{-8} c$. Якщо ж τ_{ik} більше, то спостерігається відхилення від закону Бугера, що замовлення накопиченням частинок в збудженому стані а, отже, з'явиться залежність коефіцієнта поглинання від інтенсивності падаючого світла.

Теоретично явище поглинання було розглянуто І.Ламбертом у 1860 р. Р.Беєр в 1852 році на основі експериментальних даних сформулював закон, згідно з яким коефіцієнт поглинання не залежить від концентрації поглинаючих центрів:

$$I = I_0 e^{-k_\nu c x}$$

де c - концентрація поглинаючих центрів.
Закон Беєра менш строгий, ніж закон Бугера. оскільки властивості розчинених центрів залежать в більшості випадків від розчинника, відстані між центрами (концентрації), температури.

В тому випадку, коли закон Бугера виконується, то коефіцієнт, який визначає зміну інтенсивності (I) прохідного випромінювання через речовину на довжині dx буде рівний:

$$k_\nu = \frac{1}{I} \cdot \frac{dI}{dx} \left[см^{-1} \right] \qquad (30)$$

З іншого боку, зміна потужності світлового потоку, який проходить через середовище, рівна різниці між потужністю, яка поглинулась і вимушено випромінилась при переході між відповідними рівнями в одиниці об'єму:

$$W_{ki} = k\nu_{ik} \left(n_k - \frac{q_k}{q_i} n_i \right) \int_{(\nu)} B_{ki} g(\nu) \rho(\nu) d\nu \left[Вт \cdot см^{-3} \right] \qquad (31)$$

(інтегрування проводиться в межах смуги поглинання). Отже зменшення інтенсивності світла. яке проходить шлях dx в середовищі, можна представити у вигляді:

$$dI = -W_{ki}dx \text{ або } \frac{dI}{dx} = -W_{ki} \tag{32}$$

Порівнянням (30, 31 та 32) отримаємо:

$$k_\nu = \frac{h\nu_{ik}}{c\rho(\nu)\Delta\nu_\rho}\left(n_k - \frac{q_k}{q_i}n_i\right)\int_{(\nu)} B_{ki}g(\nu)\rho(\nu)d\nu\left[см^{-1}\right] \tag{33}$$

Якщо ширина спектру випромінювання $\rho(\nu)$, яке проходить через середовище, набагато менша смуги поглинання $\Delta\nu_g$ ($\Delta\nu_\rho << \Delta\nu_g$), то вираз (33) спрощується:

$$k_\nu = \frac{h\nu_{ik}}{c}B_{ki}g(\nu)\left(n_k - \frac{q_k}{q_i}n_i\right) \tag{34}$$

з співвідношення (35) випливає, що спектральний хід коефіцієнта поглинання k_ν співпадає з формою лінії $g(\nu)$. У випадку коли $\Delta\nu_\rho >> \Delta\nu_g$ вираз (33) набуває вигляду:

$$k_\nu = \frac{h\nu_{ik}}{c\Delta\nu_\rho}B_{ki}\left(n_k - \frac{q_k}{q_i}n_i\right)\Delta\nu_g \tag{35}$$

Згідно з (35) коефіцієнт поглинання спадає з ростом ширини спектра прохідного випромінювання. На **рис.6** показані випадки, які описані виразом (34) (**рис.6** а) і виразом (35) (**рис.6 б**). Заштрихована фігура є спектральним розподілом випромінювання до і після взаємодії з квантовою системою, яка має показаний на рисунку спектральний хід коефіцієнта поглинання.

Відмітимо, що широко використовується поняття поперечника поглинання $\sigma_{ki}\left[см^2\right]$, який зв'язує інтенсивність I падаючого випромінювання, що виражається в кількості квантів з імовірністю поглинання за умови, що $\Delta\nu_\rho << \Delta\nu_g$:

$$\int B_{ki}g(\nu)\rho(\nu)d\nu = \sigma_{ki}\frac{I}{h\nu_{ik}}$$

або

$$B_{ki} g(\nu_{ik}) \rho(\nu) \text{Н} \nu_\rho = \sigma_{ki} \frac{I}{h \nu_{ik}} \tag{36}$$

Згідно (36) та (29):

$$B_{ki} = \sigma_{ki} \frac{c}{h \nu_{ik} g(\nu_{ik})} \tag{37}$$

З використанням (37) вираз для коефіцієнта поглинання (34) має вигляд:

$$k_\nu = \sigma_{ki} \left(n_k - \frac{q_k}{q_i} n_i \right) \tag{34′}$$

Зауважимо, що σ_{ki} є функцією форми лінії (див. 36). Якщо врахувати розподіл Больцмана, то отримаємо:

$$k_\nu = \sigma_{ki} n_k \left(1 - e^{-h\nu_{ik}/kT} \right) \tag{34″}$$

Отже, при термодинамічній рівновазі k_ν завжди додатній. Причому чим вища частота ν_{ik}, тим менше значення відіграє другий член, що добре видно з (34″). Зокрема в оптичному діапазоні $h\nu >> kT$, що справедливо до температур $\sim 10^4 K$. Тому для оптичного діапазону отримаємо простий зв'язок між коефіцієнтом поглинання і поперечником поглинання:

$$k_\nu = \sigma_{ki} n_k \tag{38}$$

У виразі (38). як бачимо відсутня залежність коефіцієнта поглинання від потужності падаючого випромінювання. Але це справедливо тільки при слабкому порушенні термодинамічної рівноваги, що експериментально підтвердив С.І.Вавілов.

Залежність k_ν від $\rho(\nu)$ спостерігається, якщо імовірності вимушених переходів будуть спів розмірними з імовірностями спонтанних. Зокрема, для дворівневої системи при температурі середовища і фоновій радіації близьких до нуля ($T = 0, \rho_0 = 0$) використав (9) та (34), отримаємо:

$$k_{12} = \frac{h\nu_{12}}{c} B_{12} g(\nu_{12}) N \frac{1 + \dfrac{d_{21}}{A_{21}}}{1 + 2\dfrac{B_{21}\rho(\nu) g(\nu_{21}) \Delta\nu_{\rho}}{A_{21}} + \dfrac{d_{21}}{A_{21}}} \qquad (39)$$

Звідси випливає, що залежність k_ν від $\rho(\nu)$ відчувається тоді, коли:

$$\rho(\nu)\Delta\nu_p \geq \frac{A_{21}}{2B_{21}g(\nu_{12})}\left(1 + \frac{d_{21}}{A_{21}}\right) = \frac{4\pi h \nu_{12}^3}{c^3 g(\nu_{12})}\left(1 + \frac{d_{21}}{A_{21}}\right) \qquad (40)$$

Для оптичного діапазону $\nu' = 10^4 см^{-1}$ при відсутності безвипромінювальних переходів $(d_{21} = 0)$ і на півширині дисперсійної лінії поглинання $\Delta\nu' = 0.1 см^{-1}$ отримуємо $\rho(\nu)\Delta\nu_p > 7 \cdot 10^{-11} Дж \cdot см^{-3}$ або $3 \cdot 10^8 фотонів \cdot см^{-3}$. В ультрафіолетовій, видимій і інфрачервоній областях для не лазерних джерел випромінювання ця вимога не виконується. Типове значення $\rho(\nu)\Delta\nu_p$ для них $10^2 - 10^4 фотонів \cdot см^{-3}$ і тому коефіцієнт поглинання в цих умовах практично не залежить від $\rho(\nu)$.

При порушенні термодинамічної рівноваги величина $\left(n_k - \dfrac{q_k}{q_i} n_i\right)$ може виявитись те тільки рівною нулю, але й стати менше нуля. Це буде відповідати згідно з виразом (33) появі від'ємного поглинання. Така ситуація може виникнути як за рахунок збільшення числа частинок на більш високому рівні i ($He - Ne$- лазер), так і за рахунок зменшення числа частинок на нижньому рівні k (Ar^+- лазер) в порівнянні з больцманівським розподілом або в ексімерах, де немає нижнього стану. Такий стан може реалізуватись, природно, тільки при порушенні термодинамічної рівноваги, тобто, якщо відношення населеностей більше відношення статистичних ваг $(n_i / n_k) > (q_i / q_k)$. Таким чином, як випливає з (33), з збільшенням $\rho(\nu)$ n_i прямує до n_k і, отже при $n_i q_k = n_k q_i$ і $k_\nu = 0$, тобто речовина просвітлюється. Цей ефект широко використовується для пасивної модуляції

добротності. У випадку багаторівневих систем можна отримати $(n_i / n_k) > (q_i / q_k)$ і в цьому випадку k_ν стає від'ємним.

Нерівноважні умови можуть бути як стаціонарними так і не стаціонарними. В стаціонарних умовах відношення населеностей визначається рівністю:

$$\frac{n_i}{n_k} = \frac{\alpha_i \tau_i}{\alpha_k \tau_k}$$

де α_i і α_k числа актів збудження за одну секунду на відповідні рівні, а τ_i та τ_k – тривалість життя атомів на цих рівнях. Число актів збудження включає оптичні і неоптичні процеси.

При інверсному стані речовини потужність випромінювання при переході $i \to k$ під дією зовнішньої радіації, яка падає на таку нерівноважну систему, більша потужності поглинання на цьому переході. В повній відповідності з законом Бугера при від'ємних значеннях k_ν енергія падаючого світлового потоку при проході через речовину підсилюється. Оскільки процес підсилення випромінювання супроводжується переходами частинок з верхнього рівня i на нижній k, то тим самим взаємодія випромінювання з кантовою системою веде систему до термодинамічної рівноваги.

Залежність k_ν від частоти для двох значень різниці населеностей n_k та n_i зображена на **рис. 7**. Для отримання суттєвого від'ємного коефіцієнта поглинання необхідні не тільки великі значення різниці $\left(n_k - \frac{q_k}{q_i} n_i \right)$, але й досить великі значення коефіцієнта Ейнштейна B_{ki}.

В результаті спонтанних і вимушених переходів всередині активного тіла випромінюється світло. Випромінювання, яке не виходить через бокові стінки, проходить всю довжину активного тіла, відбивається від дзеркал, які нанесені на його торці і повертається назад (**рис. 8**). При кожному відбитті від дзеркал втрачається частина енергії.

Тому генерація може виникнути в тому випадку, коли збільшення інтенсивності випромінювання в активному тілі достатнє для компенсування всіх енергетичних втрат. При кожному

проходженню через речовину інтенсивність збільшується в $F = \exp[2(k_\nu - p)L]$ разів, де p- коефіцієнт (p- коефіцієнт екстинкції (лат.-гасіння) – ослаблення пучка світла за рахунок поглинання та розсіювання)), що враховує розсіювання і інші втрати всередині активного середовища, L - довжина активного тіла. При відбитті ж світла від дзеркал інтенсивність його зменшується у $r_1 \cdot r_2$ раз, де r_1 та r_2- коефіцієнти відбиття дзеркал. Для виникнення генерації необхідно, щоб підсилення випромінювання компенсувало втрати, тобто:

$$r_1 \cdot r_2 F > 1 \qquad (41)$$

а при стаціонарній генерації:

$$r_1 \cdot r_2 F = 1 \qquad (42)$$

З умови (42) випливає:

$$k_\nu = p + \frac{1}{2L} \ln \frac{1}{r_1 \cdot r_2} = p + \gamma \qquad (43)$$

коефіцієнт γ характеризує втрати випромінювання, що пов'язані з його виходом через дзеркала, і тому називається коефіцієнтом корисних втрат.
З умов (33) та (43) отримуємо:

$$\left(n_i - \frac{q_i}{q_k} n_k \right) = \frac{c(\gamma + p)}{B_{ik} g(\nu_{ik}) h \nu_{ik}} = \frac{\gamma + p}{k_\nu^{\max}} N \qquad (44)$$

де $k_\nu^{\max} = \frac{B_{ik} g(\nu_{ik}) h \nu_{ik}}{c} N$ - граничний коефіцієнт підсилення, що виходить, якщо всі частинки зосередилися на рівні i, $N = n_i + n_k$.

Згідно з (43), якщо є стаціонарна генерація, то необхідна різниця $\left(n_i - \frac{q_i}{q_k} n_k \right)$ заселеностей визначається коефіцієнтами втрат і граничним значенням коефіцієнта підсилення. Коефіцієнт втрат $(\gamma + p)$ залежить тільки від параметрів резонатора (r_1, r_2, L) і шкідливих втрат: розсіювання, поглинання і. т.п.