ЛЕКЦІЯ 6
НАБЛИЖЕНЕ ОБЧИСЛЕННЯ ІНТЕГРАЛІВ

6.1. Квадратурні формули з рівновіддаленими вузлами

У загальному випадку звичайний визначений інтеграл неперервної функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ можна обчислити за формулою Ньютона-Лейбніца:

$$I = \int_a^b f(x)dx = F(a) - F(b), \tag{6.1}$$

де $F(x)$ – первісна функції $f(x)$, $F'(x) = f(x)$. Він дорівнює площі фігури, обмеженої прямими $x = a$, $x = b$, віссю абсцис X та кривою підінтегральної функції $f(x)$ (рис.6.1).

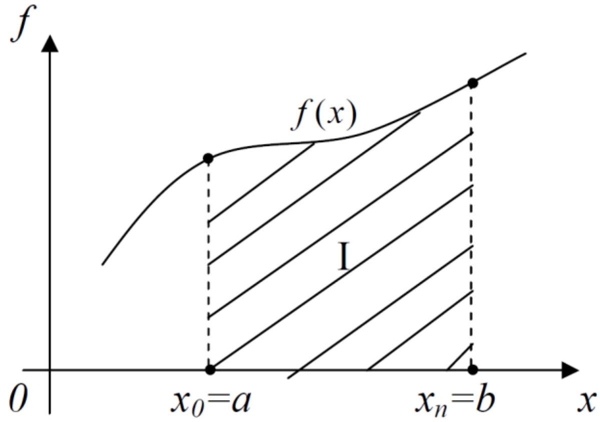

Рисунок 6.1

Чисельне (наближене) інтегрування *застосовується, коли визначення функції* $F(x)$ *неможливе, або воно є дуже складним, а також коли функція* $f(x)$ *задана таблично.* При цьому $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ інтерполюється функцією (поліномом) простої структури, для якої визначений інтеграл обчислюється безпосередньо простими формулами. Тобто застосовуються формули наближеного інтегрування – ***квадратурні формули*** вигляду

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i) + R, \tag{6.2}$$

де x_i – обрані вузли інтерполяції; A_i – коефіцієнти, що залежать лише від вибору вузлів, але не від вигляду функції $(i = 0,\ldots,n)$; R – ***залишковий член (похибка квадратурної формули)***. Відкидаючи залишковий член R, ми отримуємо ***похибку відкидання***. При розрахунку до неї додаються ще різні похибки округлення.

Таким чином, *суть методів чисельного інтегрування полягає в тому, що інтервал інтегрування* $[a;b]$ *розбивається на n менших відрізків, на кожному з яких підінтегральна крива* $f(x)$ *приблизно замінюється простішою функцією (наприклад, лінійною). Відповідно, площа фігури під кривою* $f(x)$ *розбивається на n простих геометричних фігур (прямокутників, трапецій тощо), сума площ яких приблизно дорівнює площі фігури під кривою* $f(x)$ *і, відповідно, – величині інтегралу I.*

6.1.1. Формула трапецій. Виконується лінійна апроксимація функції $f(x)$ на інтервалі $[a;b]$. Інтервал інтегрування розбивається на n рівних відрізків:

$$x_0 = a\,,\; x_i = x_0 + ih\;\; (i = 0,\ldots,n),\; x_n = b\,,\;\; h = \frac{b-a}{n}, \tag{6.2}$$

де h – крок інтегрування.

Кожний відрізок обмежується рівновіддаленими точками x_i, значення підінтегральної функції $y_i = f(x_i)$ в яких задані, або їх можна обчислити.

Крива $y = f(x)$ на малому відрізку $(x_i - x_{i+1})$ замінюється прямою BC (рис.6.2). При малому h площа під кривою $f(x)$ приблизно дорівнює площі трапеції $ABCD$: $I_i = \frac{h}{2}(y_i + y_{i+1})$.

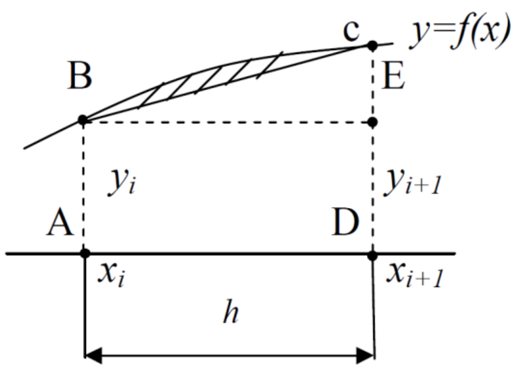

Рисунок 6.2

Наближене значення інтегралу I дорівнює сумі площ n таких елементарних трапецій:

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left(y_0 + 2y_1 + \dots + 2y_{n-1} + y_n\right). \quad (6.3)$$

Тут h – крок інтегрування, який визначається формулою (6.2); $y_0, y_1, \dots, y_n$ – значення підінтегральної функції $f(x)$ в точках $x_0, x_1, \dots, x_n$.

Залишковий член має вигляд

$$R_1 = -\frac{nh^3}{12} f''(\xi) = -\frac{(b-a)h^2}{12} f''(\xi),\ a < \xi < b. \quad (6.4).$$

Геометрично формула трапецій (6.3) відповідає заміні графіка підінтегральної функції $y = f(x)$ *ламаною лінією.* Точність результату збільшується при збільшенні кількості відрізків розбиття n.

Формула трапецій дає точне значення інтегралу у випадку, коли підінтегральна функція $f(x)$ *є лінійною, оскільки* $f''(x) \equiv 0$.

Даний метод має другий порядок точності (похибка пропорційна кроку в квадраті).

Приклад 6.1. Обчислити інтеграл $\int_0^1 \sqrt{1+2x}dx$ за формулою трапецій.

Підінтегральна функція $f(x) = \sqrt{1+2x}$; $a = 0$; $b = 1$.

Розбиваємо інтервал інтегрування на $n=10$ відрізків: $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{10} = 0.1$.

Обчислюємо значення підінтегральної функції в точках розбиття x_i, $i = 0, \dots, n$ (табл.6.1).

Таблиця 6.1

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
y_i	1	1.0954	1.1832	1.2649	1.3416	1.4142	1.4832	1.5492	1.6125	1.6733	1.7321

Обчислюємо наближене значення інтегралу за формулою трапецій (6.3):

$$I \approx \frac{h}{2}\left[y_0 + 2(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8 + y_9) + y_{10}\right] = \frac{0.1}{2} \cdot \left[1 + 2 \cdot (1.0954 + \right.$$

$+1.1832+1.2649+1.3416+1.4142+1.4832+1.5492+1.6125+1.6733)+1.7321]=$
$=1.3984$.

Точне значення інтегралу дорівнює *1.3987*. Похибка інтегрування складає $\delta=\frac{\Delta}{|I|}=\frac{1.3987-1.3984}{1.3984}=0.00021$, тобто *0.021%.*

6.1.2. Формула Сімпсона (формула парабол). Аналогічно методу трапецій, інтегрування проводиться шляхом розбиття загального інтервалу інтегрування $[a;b]$ на множину дрібних відрізків. Для обчислення площі над кожним з них, через *три* послідовні ординати розбиття проводиться квадратична парабола (точки, взяті на кожному кроці на кривій, інтерполюються поліномом другого степеня). Тобто крива $f(x)$ на малому відрізку замінюється параболою $L(x)$, яка проходить через 3 точки $M_i(x_i,y_i)$; $M_{i+1}(x_{i+1},y_{i+1})$ та $M_{i+2}(x_{i+2},y_{i+2})$ (рис.6.3).

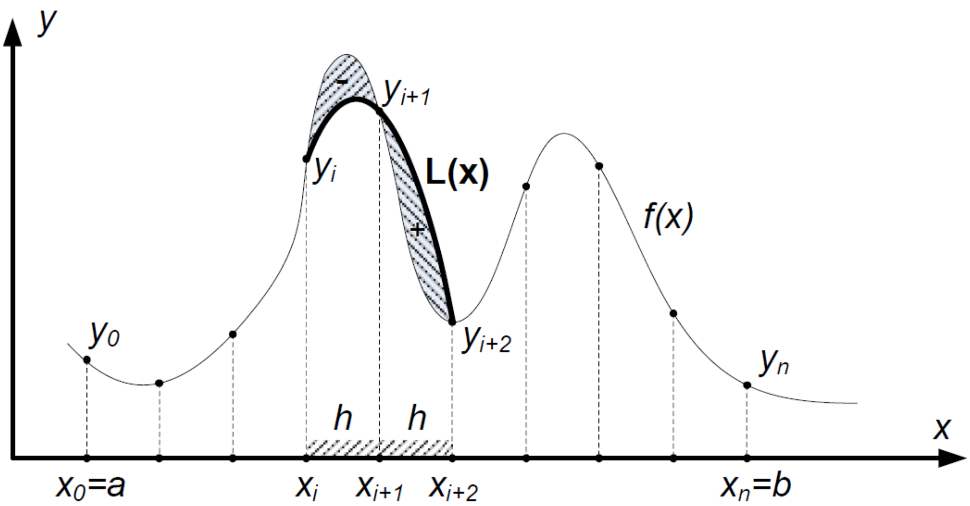

Рисунок 6.3

Припускаємо, що кількість відрізків $n=2m$ – парне число. Відомі $y_i=f(x_i)$, $i=0,\ldots,n$ – значення підінтегральної функції у рівновіддалених точках: $$x_0=a;\ x_i=x_0+ih;\ x_n=b;\ h=\frac{b-a}{n}=\frac{b-a}{2m}. \quad (6.5)$$

Тоді загальну формулу Сімпсона можна записати у вигляді:

$$I=\int_a^b f(x)dx\approx\frac{h}{3}[(y_0+y_{2m})+4(y_1+y_3+\cdots+y_{2m-1})+2(y_2+y_4+\cdots+y_{2m-2})]. \quad (6.6)$$

Залишковий член має вигляд

$$R_2 = -\frac{mh^5}{90} f^{(4)}(\xi) = -\frac{(b-a)h^4}{180} f^{(4)}(\xi),\ a < \xi < b\,. \tag{6.7}$$

Формула Сімпсона дає похибку четвертого порядку точності, яка дорівнює сумі площ заштрихованих фігур (з урахуванням знаків) (рис.6.3). При інтегруванні поліномів до третього степеня включно формула Сімпсона дає точне значення інтегралу, оскільки у цьому випадку $f^{(4)}(x) \equiv 0$. *У формулі Сімпсона число вузлів обов'язково є непарним і, відповідно,* n *– парним* $(n = 2m)$.

Приклад 6.2. Обчислити інтеграл з прикладу 6.1 за формулою Сімпсона.

Обчислюємо значення інтегралу $I = \int\limits_0^1 \sqrt{1+2x}dx$ при $n = 2m = 10$:

$$I = \frac{h}{3}\left[(y_0 + y_{10}) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8)\right] = \frac{0.1}{3}\left[(1 + 1.7321) +\right.$$
$$+ 4(1.0954 + 1.2649 + 1.4142 + 1.5492 + 1.6733) + 2(1.1832 + 1.3416 + 1.4832 +$$
$$\left.+1.6125)\right] = 1.3987\,.$$

Отримане значення дорівнює точному значенню інтегралу.

6.1.3. Формула Ньютона (правило трьох восьмих) має вигляд

$$I = \int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{3h}{8}\left[(y_0 + y_{3m}) + 3(y_1 + y_2 + y_4 + y_5 + \cdots + y_{3m-2} + y_{3m-1}) +\right.$$
$$\left.+ 2(y_3 + y_6 + \cdots + y_{3m-3})\right], \tag{6.8}$$

де $h = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{b-a}{3m}$.

Залишковий член має вигляд

$$R_3 = -\frac{3mh^5}{80} f^{(4)}(\xi) = -\frac{(b-a)h^4}{80} f^{(4)}(\xi),\ a < \xi < b\,. \tag{6.9}$$

У формулі Ньютона кількість вузлів обов'язково дорівнює $3m+1$ *і, відповідно,* $n = 3m$.

Якщо функція $y = f(x)$ задана таблично, і її похідні визначити складно, то, припускаючи відсутність складових, що швидко коливаються, можна застосовувати наближені формули для похибок, виражені через кінцеві різниці:

$$R_1 \approx -\frac{b-a}{12}\overline{\Delta^2 y}, \tag{1.10}$$

$$R_2 \approx -\frac{b-a}{180}\overline{\Delta^4 y}, \tag{1.11}$$

$$R_3 \approx -\frac{b-a}{80}\overline{\Delta^4 y}, \tag{1.12}$$

де під $\overline{\Delta^2 y}$ та $\overline{\Delta^4 y}$ мається на увазі середнє арифметичне значення різниць відповідного порядку.

6.2. Вибір кроку інтегрування

Завдання полягає у виборі кроку h, що забезпечує задану точність ε обчислення інтегралу за обраною формулою чисельного інтегрування. Розглянемо два способи розв'язання цієї задачі.

6.2.1. Вибір кроку за оцінкою залишкового члена. Нехай потрібно обчислити інтеграл з точністю ε. Використовуючи формулу відповідного залишкового члена R, h обирають таким, щоб виконувалась нерівність $|R| < \frac{\varepsilon}{2}$. Потім обчислюють інтеграл за наближеною формулою з отриманим кроком. При цьому обчислення слід проводити з такою кількістю знаків, щоб похибка округлення не перевищувала $\frac{\varepsilon}{2}$.

Бувають ситуації, коли допустиму похибку ε ділять між похибкою відкидання та похибкою округлення не навпіл. Наприклад, якщо обчислення значень підінтегральної функції дуже складні, але можуть бути проведені з будь-якою точністю, то може виявитися доцільним обирати крок h з умови $|R| < \varepsilon$. Інший крайній випадок може виявитися для функцій, що задаються експериментально, коли важко забезпечити високу точність обчислення значень функції.

<u>Приклад 6.3</u>. За допомогою формули Сімпсона обчислити інтеграл $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx$ з точністю до $\varepsilon = 10^{-3}$.

Оберемо спочатку крок інтегрування.

Залишковий член формули Сімпсона має вигляд $R_2 = -\frac{(b-a)h^4}{180} f^{(4)}(\xi)$, $a < \xi < b$. Оберемо крок h таким, щоб виконувалась нерівність $\frac{(b-a)h^4}{180} \max\limits_{[a;b]} \left| f^{(4)}(\xi) \right| < 0.5 \cdot 10^{-3}$.

Обчислюємо $f^{(4)}(x)$: $f^{(4)}(x) = \frac{\sin x}{x} + 4\frac{\cos x}{x^2} - 12\frac{\sin x}{x^3} - 24\frac{\cos x}{x^4} + 24\frac{\sin x}{x^5}$.

При оцінюванні $\left| f^{(4)}(\xi) \right|$ на відрізку $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$ скористаємося тим, що величини $\frac{\sin x}{x}\left(1 - \frac{12}{x^2} + \frac{24}{x^4}\right)$ та $4\frac{\cos x}{x^2}\left(\frac{6}{x^2} - 1\right)$ на цьому відрізку додатні та спадають. Тому вони набувають найбільшого значення у точці $x = \frac{\pi}{4}$, причому

$$\left| f^{(4)}(\xi) \right| \le \frac{\sin x}{x}\left(1 - \frac{12}{x^2} + \frac{24}{x^4}\right) + 4\frac{\cos x}{x^2}\left(\frac{6}{x^2} - 1\right) < 81.$$

Таким чином, для визначення кроку розрахунку h ми отримуємо нерівність $\frac{\frac{\pi}{4}h^4}{180} \cdot 81 < 0.5 \cdot 10^{-3}$, звідки $h^4 < 14 \cdot 10^{-4}$ і $h < 1.9 \cdot 10^{-1} = 0.19$.

З іншого боку, крок розрахунку слід обирати таким, щоб розділити відрізок $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$ на парне число рівних частин. Вказаним двом умовам відповідає значення $h = \frac{\pi}{24} = 0.13 < 0.19$, при якому $n = \frac{b-a}{h} = 6$. Далі для того, щоб похибка обчислень не перевищувала $0.5 \cdot 10^{-3}$, достатньо вести обчислення з чотирма знаками після коми.

Складаємо таблицю значень функції $y = \frac{\sin x}{x}$ з кроком $h = \frac{\pi}{24} = 7°30' = 0.13090$ (табл.6.2). В останньому рядку таблиці записуємо результати підсумовування по стовпцях.

Таблиця 6.2

Значення функції $y = \frac{\sin x}{x}$

i	$x°_i$	x_i	$\sin x$	y_0, y_6	y_{2m}	y_{2m-1}
0	45°00′	0.7854	0.7071	0.9003		
1	52°30′	0.9163	0.7934			0.8659
2	60°00′	1.0472	0.8660		0.8270	
3	67°30′	1.1781	0.9239			0.7842
4	75°00′	1.3090	0.9659		0.7379	
5	82°30′	1.4399	0.9914			0.6885
6	90°00′	1.5708	1.0000	0.6366		
			Суми	1.5369	1.5649	2.3386

Далі за формулою Сімпсона при $n = 6$ визначаємо

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx \approx \frac{h}{3}[(y_0 + y_6) + 4(y_1 + y_3 + y_5) + 2(y_2 + y_4)] = 0.043633(1.5369 + 4 \cdot 2.3386 +$$
$$+ 2 \cdot 1.5649) = 0.6118.$$

Остаточний результат округлюємо до трьох знаків: $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx \approx 0.612$.

6.2.2. Подвійний перерахунок. Оскільки визначення $\max\left|f^{(k)}(x)\right|$ нерідко призводить до занадто громіздких обчислень, на практиці, зазвичай, використовують такий прийом.

Обчислюють інтеграл I за обраною квадратурною формулою двічі: спочатку з деяким кроком h, а потім з кроком $\frac{h}{2}$, тобто подвоюють кількість n.

Позначивши результати обчислень через I_n та I_{2n}, відповідно, порівнюють їх. Якщо $|I_n - I_{2n}| < \varepsilon$, де ε – допустима похибка, вважають $I_n \approx I_{2n}$.

Якщо ж виявиться, що $|I_n - I_{2n}| \geq \varepsilon$, то розрахунок повторюють з кроком $\frac{h}{4}$. *За початковий крок іноді можна брати число, близьке до* $\sqrt[m]{\varepsilon}$, *де* $m=2$ *для формули трапецій і* $m=4$ *для формули Сімпсона.*

Зазначений прийом широко використовується при обчисленні інтегралів за допомогою комп'ютеру, оскільки він дозволяє здійснити автоматичний вибір кроку при заданій точності з одночасним контролем обчислень.

Для наближеної оцінки похибки відкидання Δ можна користуватися *принципом Рунге*, згідно з яким $\Delta \approx \frac{1}{3}|I_n - I_{2n}|$ для формули трапецій та $\Delta \approx \frac{1}{15}|I_n - I_{2n}|$ для формули Сімпсона.

6.3. Інтегрування за допомогою степеневих рядів

Розглянемо визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$. Нехай підінтегральна функція $f(x)$ розкладається у степеневий ряд $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$, який збігається в інтервалі $(-R;R)$, що містить відрізок інтегрування $[a;b]$.

Застосовуючи теорему про покрокове інтегрування степеневих рядів, можна подати інтеграл у вигляді числового ряду:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1}\left(b^{k+1} - a^{k+1}\right). \qquad (6.13)$$

Якщо ряд (6.13) збігається досить швидко, то можна наближено обчислити визначений інтеграл за допомогою частинної суми ряду

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{N} \frac{c_k}{k+1}\left(b^{k+1} - a^{k+1}\right). \qquad (6.14)$$

Похибка результату в такому випадку складається з наступних похибок:

1) з похибки заміни ряду частинною сумою; ця похибка (похибка відкидання) дорівнює залишку ряду;

2) з похибок округлення при обчисленні суми (6.14).

Для знакозмінного ряду з монотонно спадаючими за абсолютною величиною членами абсолютна величина залишку ряду не перевищує абсолютної величини першого з членів ряду, що відкидаються (приклади 6.4, 6.5). Для оцінювання залишку ряду в інших випадках застосовують мажорування такими числовими рядами, залишки яких легко оцінюються (приклад 6.6).

<u>Приклад 6.4</u>. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^1 e^{-x^2}dx$, розкладаючи підінтегральну функцію у степеневий ряд та використовуючи сім членів цього розкладу. Оцінити похибку.

Маємо $e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \cdots$. Цей ряд збігається при будь-якому x; проінтегрувавши почленно перші сім членів, отримаємо

$$\int\limits_0^1 e^{-x^2}dx \approx \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5\cdot 2!} - \frac{x^7}{7\cdot 3!} + \frac{x^9}{9\cdot 4!} - \frac{x^{11}}{11\cdot 5!} + \frac{x^{13}}{13\cdot 6!} \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} - \frac{1}{1320} + \frac{1}{9360}. \qquad (6.15)$$

Оцінка залишку ряду дає $|R_7| \le \left.\frac{x^{15}}{15\cdot 7!}\right|_0^1 = \frac{1}{75600} < 1.5\cdot 10^{-5}$. Враховуючи це, обчислюємо суму (6.15) з п'ятьма знаками після коми (з одним запасним знаком). Остаточно отримуємо $\int\limits_0^1 e^{-x^2}dx = 0.7468$ з усіма вірними знаками.

<u>Приклад 6.5</u>. Обчислити інтеграл $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} sin\left(x^2\right)dx$ з точністю до 10^{-4} шляхом розкладу підінтегральної функції у степеневий ряд.

Розкладемо функцію $f(x) = sin\left(x^2\right)$ у степеневий ряд: $sin\left(x^2\right) = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \cdots$. Цей ряд збігається при будь-якому x.

Проінтегруємо його почленно в межах від 0 до $\frac{\pi}{4}$:

$$I=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^7}{7\cdot 3!}+\frac{x^{11}}{11\cdot 5!}-\frac{x^{15}}{15\cdot 7!}+\cdots\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{4}\right)^3-\frac{1}{7\cdot 3!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^7+\frac{1}{11\cdot 5!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{11}-$$

$$-\frac{1}{15\cdot 7!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{15}+\cdots.$$

Оскільки отриманий числовий ряд є знакозмінним, то достатньо обрати таку кількість членів, щоб перший з відкинутих був менший за 10^{-4}. Цій умові задовольняє третій член, оскільки $\frac{x^{11}}{11\cdot 5!4^{11}}<\frac{(0.786)^{11}}{1320}=\frac{0.051}{1320}<4\cdot 10^{-5}$.

Підраховуємо суму двох перших членів. Обчислення проводитимемо з п'ятьма знаками після коми, а остаточний результат округлюємо:

$$I=\frac{\pi^3}{3\cdot 4^3}-\frac{\pi^7}{7\cdot 3!4^7}=\frac{1}{3}(0.78540)^3\left[1-\frac{(0.78540)^4}{14}\right]=0.1571.$$

Приклад 6.6. Обчислити інтеграл $I=\int\limits_0^{0.5}\frac{dx}{1-x^5}$ з точністю до $\varepsilon=10^{-4}$.

Розкладемо функцію $f(x)=\frac{dx}{1-x^5}$ у степеневий ряд:

$$\frac{1}{1-x^5}=1+x^5+x^{10}+x^{15}+\cdots+x^{5n-5}+\cdots.$$

Областю збіжності цього ряду є інтервал $(-1;1)$. Відрізок інтегрування входить у цей інтервал, отже, написаний ряд можна почленно інтегрувати. Інтегруючи на відрізку $[0;0.5]$, отримаємо:

$$I=\left[x+\frac{x^6}{6}+\frac{x^{11}}{11}+\frac{x^{16}}{16}+\cdots+\frac{x^{5n-4}}{5n-4}+\cdots\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6\cdot 2^6}+\frac{1}{11\cdot 2^{11}}+\frac{1}{16\cdot 2^{16}}+\cdots+$$

$$+\frac{1}{(5n-4)\cdot 2^{5n-4}}+\cdots.$$

Оскільки вже третій член тут менший, ніж 10^{-4}, то спробуємо взяти за наближене значення інтегралу суму перших двох членів; оцінимо суму членів, які відкидаються при цьому (залишок ряду R_2): $R_2=\frac{1}{11\cdot 2^{11}}+\frac{1}{16\cdot 2^{16}}+\frac{1}{21\cdot 2^{21}}+$

$$+\cdots+\frac{1}{(5n-4)\cdot 2^{5n-4}}+\cdots.$$

Замінимо в усіх членах, починаючи з другого, множники *16, 21* тощо, що стоять у знаменнику, числом *11*. Тоді отримаємо суму нескінченно спадаючої геометричної прогресії $R_2 < \frac{1}{11\cdot 2^{11}} + \frac{1}{11\cdot 2^{16}} + \cdots + \frac{1}{11\cdot 2^{5n-4}} + \cdots = \frac{1}{11\cdot 2^{11}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2^5}} =$

$$= \frac{1}{11\cdot 2^6 \cdot 31} = \frac{1}{21824} < \frac{1}{2}\cdot 10^{-4}.$$

Таким чином, сума двох перших членів проінтегрованого ряду дає значення інтегралу із заданою точністю.

Отримуємо відповідь: $\int\limits_0^{0.5} \frac{dx}{1-x^5} \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{6\cdot 2^6} = 0.5026$.

6.4. Інтеграли з нескінченними межами

6.4.1. Метод відкидання. Для того, щоб наближено обчислити невласний інтеграл $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$, що збігається, з точністю до ε, його подають у вигляді $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx = \int\limits_a^{b} f(x)dx + \int\limits_b^{\infty} f(x)dx$, де b обирають настільки великим, щоб мала місце нерівність $\left|\int\limits_b^{\infty} f(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Далі визначений інтеграл $\int\limits_a^{b} f(x)dx$ обчислюють за однією з квадратурних формул з точністю $\frac{\varepsilon}{2}$ і наближено вважають, що $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx \approx \int\limits_a^{b} f(x)dx$.

<u>Приклад 6.7</u>. Обчислити наближено інтеграл $\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{1+x^3}$ з точністю до $\varepsilon = 10^{-2}$. Обираємо число b таким чином, щоб виконувалась нерівність $\int\limits_b^{\infty} \frac{dx}{1+x^3} < \frac{10^{-2}}{2}$. Зазначивши, що $\int\limits_b^{\infty} \frac{dx}{1+x^3} < \int\limits_b^{\infty} \frac{dx}{x^3} = \frac{1}{2b^2}$, обираємо b з умови

$\frac{1}{2b^2}=\frac{10^{-2}}{2}$, звідки отримуємо $b=10$. Вважаємо наближено, що $\int_2^{\infty}\frac{dx}{1+x^3}\approx\int_2^{10}\frac{dx}{1+x^3}=I$ та обчислюємо отриманий визначений інтеграл з точністю до $\frac{1}{2}\cdot 10^{-2}$ за формулою Сімпсона. За кроки розрахунку обираємо $h_1=1$, $h_2=2$. Результати обчислень наведені в табл.6.3.

Таблиця 6.3

Обчислення інтегралу *I* за формулою Сімпсона

k	x_k	$1+x^3$	y_k	m_k	m'_k
0	2.0	9	0.1111	1	1
1	3.0	28	0.0357	4	
2	4.0	65	0.0154	2	4
3	5.0	126	0.0079	4	
4	6.0	217	0.0046	2	2
5	7.0	344	0.0029	4	
6	8.0	513	0.0020	2	4
7	9.0	730	0.0014	4	
8	10.0	1001	0.0010	1	1
			Суми	0.3477	0.1809

В останньому рядку наведені суми $\sum y_k m_k$ та $\sum y_k m'_k$, за допомогою яких обчислюємо наближені значення інтегралу. При кроці $h_1=1$ отримуємо $I_1=\frac{1}{3}\cdot 0.3477=0.1159$; при кроці $h_2=2$ отримуємо $I_2=\frac{2}{3}\cdot 0.1809=0.1206$. Ці значення розрізняються менше, ніж на $\frac{1}{2}\cdot 10^{-2}$. Остаточно маємо $\int_2^{\infty}\frac{dx}{1+x^3}=0.12$.

6.4.2. Застосування квадратурних формул з вагою. При обчисленні інтегралів $\int_a^{\infty}p(x)\varphi(x)dx$ часто буває зручно використати квадратурні формули вигляду $\int_a^{\infty}p(x)\varphi(x)dx\approx\sum_{k=1}^{n}A_k^{(n)}\varphi(x_k)$, в яких коефіцієнти $A_k^{(n)}$ не залежать від

$\varphi(x)$, і абсциси x_k підбираються таким чином, щоб формула була точною для поліномів найвищого можливого степеня.

При $p(x)=e^{-x^2}$ мають місце ***квадратурні формули з вагою Чебишева-Ерміта***

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\varphi(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k^{(n)}\varphi(x_k), \tag{6.16}$$

точні для поліномів, степеня не вище $2n-1$. Залишковий член формули (6.16) має вигляд

$$R_n(\varphi)=\frac{n!\sqrt{\pi}}{2^n(2^n)!}\varphi^{(2n)}(\xi). \tag{6.17}$$

У табл.6.4 наведені значення коефіцієнтів $A_k^{(n)}$ та абсцис x_k для деяких n.

Таблиця 6.4

Значення $A_k^{(n)}$ та x_k для квадратурних формул з вагою Чебишева-Ерміта

n	x_k	$A_k^{(n)}$
3	$-x_1=x_3=1.224745$ $x_2=0$	$A_1=A_3=0.295409$ $A_2=1.181636$
4	$-x_1=x_4=1.650680$ $-x_2=x_3=0.524648$	$A_1=A_4=0.081313$ $A_2=A_3=0.804914$
5	$-x_1=x_5=2.020183$ $-x_2=x_4=0.958572$ $x_3=0$	$A_1=A_5=0.019953$ $A_2=A_4=0.393619$ $A_3=0.945309$

При $p(x)=e^{-x}$ мають місце ***квадратурні формули з вагою Чебишева-Лагерра***

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x}\varphi(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k^{(n)}\varphi(x_k), \tag{6.18}$$

точні для поліномів степеня не вище, ніж $2n-1$. Залишковий член формули (6.18) має вигляд

$$R_n(\varphi)=\frac{n!\,\Gamma(n+1)}{(2^n)!}\varphi^{(2n)}(\xi), \tag{6.19}$$

де $\Gamma(n+1)$ – гама-функція.

У табл.6.5 наведені значення $A_k^{(n)}$ і x_k для деяких n.

Таблиця 6.5

Значення $A_k^{(n)}$ та x_k для квадратурних формул з вагою Чебишева-Лагерра

n	k	x_k	$A_k^{(n)}$
1	2	3	4
3	*1*	*0.415774*	*0.711093*
	2	*2.294280*	*0.278518*
	3	*6.289945*	*0.010389*
4	*1*	*0.322548*	*0.603154*
	2	*1.745761*	*0.357419*
	3	*4.536620*	*0.038888*
	4	*9.395071*	*0.000539*
5	*1*	*0.263560*	*0.521756*
	2	*1.413403*	*0.398667*
	3	*3.596425*	*0.075942*
	4	*7.085810*	*0.003612*
	5	*12.640801*	*0.000023*

Приклад 6.8. Обчислити інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos x dx$ за квадратурною формулою (6.16) при $n=5$. Оскільки вузли квадратурної формули розміщені симетрично відносно $x=0$, а коефіцієнти, відповідні до симетричних вузлів, рівні, то за формулою (6.16) маємо: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos x dx \approx A_3 \cos x_3 + 2(A_4 \cos x_4 + A_5 \times$ $\times \cos x_5) = 0.945309 + 2(0.393619 \cdot 0.574689 - 0.019953 \cdot 0.434413) = 1.3803905$.

Для порівняння, точне значення інтегралу дорівнює $\sqrt{\pi}e^{-\frac{1}{4}} = 1.3803884$.

6.5. Кратні інтеграли

6.5.1. Метод повторного інтегрування. Нехай потрібно обчислити подвійний інтеграл

$$I = \iint\limits_G f(x,y)dxdy, \tag{6.20}$$

де область G є прямокутником $a \le x \le b$, $c \le y \le d$.

Обчислення такого інтегралу зводиться до дворазового інтегрування, тобто

$$I = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy. \qquad (6.21)$$

Позначимо $\int_c^d f(x,y)dy = F(x)$, і для обчислення інтегралу $\int_a^b F(x)dx$ (6.22)

застосуємо формулу Сімпсона з кроком h по x:

$$\int_a^b F(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[F_0 + F_n + 2(F_2 + F_4 + \dots + F_{n-2}) + 4(F_1 + F_3 + \dots + F_{n-1})\right], \text{ де } h = \frac{b-a}{n}$$

$$(n \text{ – парне}),\ F_i = F(x_i) = \int_c^d f(x,y)dy,\ x_i = a + ih\ (i = 0,\dots,n). \qquad (6.23)$$

Таким чином, задача зводиться до обчислення $n+1$ інтегралів вигляду (6.23). *Зазначений метод є найпростішим методом наближеного обчислення кратних інтегралів.* При обчисленні інтегралів (6.22), (6.23) можна застосовувати різні квадратурні формули.

Аналогічно можна обчислювати кратні інтеграли розмірності $n > 2$.

Недоліки методу:

1) його зручно застосовувати тільки для прямокутних областей інтегрування;
2) зі збільшенням кратності інтегралу різко зростає обсяг обчислень;
3) збільшення точності за рахунок зменшення кроків інтегрування помітно збільшує обсяг обчислень.

<u>Приклад 6.9</u>. Обчислити наближено інтеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\frac{\pi}{4}} sin(x+y)dy$.

Позначимо $\int_0^{\frac{\pi}{4}} sin(x+y)dy = F(x)$. Тоді за формулою Сімпсона при $n = 4$ матимемо

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} F(x)dx \approx \frac{\pi}{24}\left[F_0 + F_4 + 2F_2 + 4(F_1 + F_3)\right]. \qquad (6.24)$$

Інтеграли $F_i = F(x_i) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} sin(x_i + y)dy \quad \left(x_i = \frac{\pi}{8}i, \quad i = 0,1,2,3,4\right)$ обчислимо наближено за формулою Сімпсона при $n = 2$. Послідовно отримуємо

$$F_0 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin y dy \approx \frac{\pi}{24}\left[\sin y_0 + 4\sin y_1 + \sin y_2\right] = \frac{\pi}{24}\left[\sin 0 + 4\sin\frac{\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{4}\right] = \frac{\pi}{24}(0 +$$

$$+ 4\cdot 0.3827 + 0.7071) = \frac{\pi}{24}\cdot 2.2379,$$

$$F_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\left(\frac{\pi}{8} + y\right)dy \approx \frac{\pi}{24}\left(\sin\frac{\pi}{8} + 4\sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{\pi}{24}\cdot 4.1350,$$

$$F_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\left(\frac{\pi}{4} + y\right)dy \approx \frac{\pi}{24}\left(\sin\frac{\pi}{4} + 4\sin\frac{3\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{24}\cdot 5.4027,$$

$$F_3 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\left(\frac{3\pi}{8} + y\right)dy \approx \frac{\pi}{24}\left(\sin\frac{3\pi}{8} + 4\sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{5\pi}{8}\right) = \frac{\pi}{24}\cdot 5.8478,$$

$$F_4 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\left(\frac{\pi}{2} + y\right)dy \approx \frac{\pi}{24}\left(\sin\frac{\pi}{2} + 4\sin\frac{5\pi}{8} + \sin\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{24}\cdot 5.4027.$$

Підставляючи значення $F_i \quad (i = 0,1,2,3,4)$ у формулу (6.24), отримуємо

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x+y)dxdy \approx \left(\frac{\pi}{24}\right)^2 \cdot \left[2.2379 + 5.4027 + 2\cdot 5.4027 + 4(4.1350 + 5.8478)\right] =$$

$$= 0.01713473 \cdot 58.372 = 1.00028.$$

Для порівняння, точне значення інтегралу $I = 1$.

6.5.2. Метод Монте-Карло (метод статистичних випробувань)

Перший спосіб. Нехай потрібно обчислити m-кратний інтеграл

$$I = \iint\limits_G \ldots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_m) dx_1 dx_2 \ldots dx_m \qquad (6.25)$$

по області G, розміщеній у m-вимірному одиничному кубі $0 \le x_i \le 1$ $(i = 1,2,\ldots,m)$.

Виберемо m рівномірно розподілених на відрізку $[0;1]$ послідовностей випадкових чисел:

$$\begin{array}{cccccc}
x_1^{(1)}, & x_2^{(1)}, & x_3^{(1)}, & \cdots, & x_n^{(1)}, & \cdots, \\
x_1^{(2)}, & x_2^{(2)}, & x_3^{(2)}, & \cdots, & x_n^{(2)}, & \cdots, \\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots, & \vdots & \cdots, \\
x_1^{(m)}, & x_2^{(m)}, & x_3^{(m)}, & \cdots, & x_n^{(m)}, & \cdots.
\end{array}$$

Тоді точки $M_i\left(x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \cdots, x_i^{(m)}\right)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ можна розглядати як випадкові, рівномірно розподілені в *m*-вимірному одиничному кубі.

Нехай із загального числа N випадкових точок n точок потрапили до області G, решта $N–n$ опинилися поза G. Тоді при досить великому N має місце наближена формула

$$I \approx \frac{V_G}{n} \sum_{i=1}^{n} f(M_i), \qquad (6.26)$$

де під V_G розуміємо *m*-вимірний об'єм області інтегрування. Якщо обчислення об'єму V_G є проблематичним, то можна прийняти $V_G \approx \frac{n}{N}$, і для наближеного обчислення інтегралу отримаємо

$$I \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} f(M_i). \qquad (6.27)$$

Зазначений спосіб можна застосувати до обчислення кратних інтегралів і для довільної області G, якщо існує така заміна змінних, при якій нова область інтегрування буде розміщена в m-вимірному одиничному кубі.

Приклад 6.10. Методом Монте-Карло обчислити інтеграл

$$I = \iint_G f\left(x^2 + y^2\right) dxdy, \qquad (6.28)$$

де область G визначається такими нерівностями (рис.6.4): $\frac{1}{2} \le x \le 1$, $0 \le y \le 2x - 1$.

Область інтегрування належить одиничному квадрату $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$.

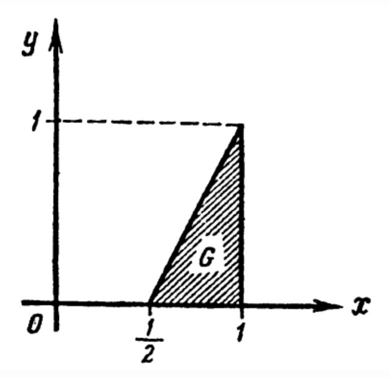

Рисунок 6.4

Для обчислення інтеграла скористаємося таблицею випадкових чисел (табл.6.6); при цьому кожні два послідовних числа з цієї таблиці приймемо за координати випадкової точки $M(x, y)$.

Таблиця 6.6

Випадкові числа, рівномірно розподілені на відрізку $[0;1]$

0.57705	*0.35483*	*0.11578*	*0.65339*
0.71618	*0.09393*	*0.93045*	*0.93382*
0.73710	*0.30304*	*0.93011*	*0.05758*
0.70131	*0.55186*	*0.42844*	*0.00336*
0.16961	*0.64003*	*0.52906*	*0.88222*
0.53324	*0.20514*	*0.09461*	*0.98585*
0.43166	*0.00188*	*0.99602*	*0.52103*
0.26275	*0.55709*	*0.69962*	*0.91827*
0.05926	*0.86977*	*0.31311*	*0.07069*
0.66289	*0.31303*	*0.27004*	*0.13928*

Записуємо координати x і y випадкових точок в табл.6.7, округлюючи до трьох знаків після коми, і обираємо ті з них, що належать області інтегрування.

Таблиця 6.7

Обчислення подвійного інтегралу (6.28) методом Монте-Карло

x	$\underline{x}$	$\overline{x}$	ε_1	Y	$\underline{y(x)}$	$\overline{y(x)}$	ε_2	ε	$f(x,y)$
0.577	*0.500*	*1.000*	*1*	*0.716*	*0*	*0.154*	*0*	*0*	
0.737	*0.500*	*1.000*	*1*	*0.701*	*0*	*0.474*	*0*	*0*	
0.170	*0.500*	*1.000*	*0*	*0.533*				*0*	
0.432	*0.500*	*1.000*	*0*	*0.263*				*0*	
0.059	*0.500*	*1.000*	*0*	*0.663*				*0*	
0.355	*0.500*	*1.000*	*0*	*0.094*				*0*	
0.303	*0.500*	*1.000*	*0*	*0.552*				*0*	
0.640	*0.500*	*1.000*	*1*	*0.205*	*0*	*0.280*	*1*	*1*	*0.452*
0.002	*0.500*	*1.000*	*0*	*0.557*				*0*	
0.870	*0.500*	*1.000*	*1*	*0.323*	*0*	*0.740*	*1*	*1*	*0.855*
0.116	*0.500*	*1.000*	*0*	*0.930*				*0*	
0.930	*0.500*	*1.000*	*1*	*0.428*	*0*	*0.860*	*1*	*1*	*1.048*
0.529	*0.500*	*1.000*	*1*	*0.095*	*0*	*0.058*	*0*	*0*	
0.996	*0.500*	*1.000*	*1*	*0.700*	*0*	*0.992*	*1*	*1*	*1.482*
0.313	*0.500*	*1.000*	*0*	*0.270*				*0*	
0.653	*0.500*	*1.000*	*1*	*0.934*	*0*	*0.306*	*0*	*0*	
0.058	*0.500*	*1.000*	*0*	*0.003*				*0*	
0.882	*0.500*	*1.000*	*1*	*0.986*	*0*	*0.764*	*0*	*0*	
0.521	*0.500*	*1.000*	*1*	*0.918*	*0*	*0.042*	*0*	*0*	
0.071	*0.500*	*1.000*	*0*	*0.139*				*0*	
							Суми	*4*	*3.837*

Порядок заповнення табл.6.7:

1) Серед всіх значень x виділяємо ті, що розміщені між $\underline{x} = 0.5$ та $\overline{x} = 1$. Для цих значень вважаємо $\varepsilon_1 = 1$, для решти $\varepsilon_1 = 0$. Наприклад, для $x = 0.577$ маємо $\varepsilon_1 = 1$, для $x = 0.170$ маємо $\varepsilon_1 = 0$.

2) Серед всіх значень y, що відповідають виділеним x, обираємо ті, що розміщені між $\underline{y(x)} = 0$, $\overline{y(x)} = 2x - 1$. Для цих значень вважаємо $\varepsilon_2 = 1$, для всіх інших $\varepsilon_2 = 0$. Наприклад, для $y = 0.701$ отримаємо $\varepsilon_2 = 0$, для $y = 0.205$ отримаємо $\varepsilon_2 = 1$.

3) Обчислюємо $\varepsilon = \varepsilon_1 \varepsilon_2$. Області інтегрування належать тільки ті точки, для яких $\varepsilon = 1$. Наприклад, для точки $M(0.640;0.205)$ маємо $\varepsilon = 1$.

У нашому прикладі області інтегрування належать чотири точки, тобто *N=20, n=4*.

4) Обчислюємо значення підінтегральної функції в отриманих точках.

Після заповнення табл.6.7 обчислюємо площу області інтегрування $V_G = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ і за формулою (6.26) визначаємо: $I \approx \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot (0.452 + 0.855 + + 1.048 + 1482) = \frac{1}{16} \cdot 3.837 = 0.240$.

Для порівняння, точне значення інтегралу $I = \frac{7}{32} = 0.21875$.

Результат має порівняно невелику точність, оскільки кількість точок *N=20* є недостатньо великим.

Другий спосіб. Якщо функція $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_m) \geq 0$, то інтеграл (6.25) можна розглядати як об'єм тіла в $(m+1)$-вимірному просторі, тобто

$$I = \iint\limits_{V} \ldots \int dx_1 dx_2 \ldots dx_m dy, \tag{6.29}$$

де область інтегрування V визначається умовами $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in G$, $0 \leq y \leq f(x)$.

Якщо в області G $0 \le f(x) \le B$, $0 \le x_i \le 1$ $(i = 1,2,\ldots,m)$, то, вводячи нову змінну $\eta = \dfrac{1}{B} y$, отримаємо $I = B \iint\limits_{v} \ldots \int dx_1 dx_2 \ldots dx_m d\eta$, де область v розміщена в одиничному $(m+1)$-вимірному кубі $0 \le x_i \le 1$ $(i = 1,2,\ldots,m)$, $0 \le \eta \le 1$.

Візьмемо $m+1$ рівномірно розподілених на відрізку $[0;1]$ випадкових послідовностей:

$$\begin{array}{cccccc}
x_1^{(1)}, & x_2^{(1)}, & x_3^{(1)}, & \cdots, & x_n^{(1)}, & \cdots, \\
x_1^{(2)}, & x_2^{(2)}, & x_3^{(2)}, & \cdots, & x_n^{(2)}, & \cdots, \\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots, & \vdots & \cdots, \\
x_1^{(m)}, & x_2^{(m)}, & x_3^{(m)}, & \cdots, & x_n^{(m)}, & \cdots, \\
\eta_1, & \eta_2, & \eta_3, & \cdots, & \eta_n, & \cdots.
\end{array}$$

Складемо відповідну послідовність випадкових точок $M_i\left(x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \cdots, x_i^{(m)}, \eta_i\right)$ $(i = 1,2,\ldots)$.

Нехай із загальної кількості N випадкових точок n точок належать об'єму v, тоді має місце наближена формула

$$I \approx B \frac{n}{N}. \tag{6.30}$$

<u>Приклад 6.11</u>. Обчислити наближено об'єм, обмежений поверхнями (рис.6.5) $z = 2 + \sqrt{(0.5)^2 - (x-0.5)^2 - (y-0.5)^2}$, $(x-0.5)^2 + (y-0.5)^2 = (0.5)^2$, $z = 0$.

Шуканий об'єм чисельно дорівнює величині інтегралу

$$I = \iiint\limits_{V} dxdydz. \tag{6.31}$$

Оскільки в області V $0 \le z \le 2.5$, вводимо нову змінну $\eta = \dfrac{z}{2.5}$, в результаті чого інтеграл (6.31) переходить в інтеграл

$$I = 2.5 \iiint\limits_{v} dxdyd\eta, \tag{6.32}$$

де v – область, обмежена поверхнями $(x-0.5)^2 + (y-0.5)^2 = (0.5)^2$, $\eta = 0.8 + 0.4\sqrt{(0.5)^2 - (x-0.5)^2 - (y-0.5)^2}$, $\eta = 0$, тобто v належить одиничному кубу $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $0 \le \eta \le 1$.

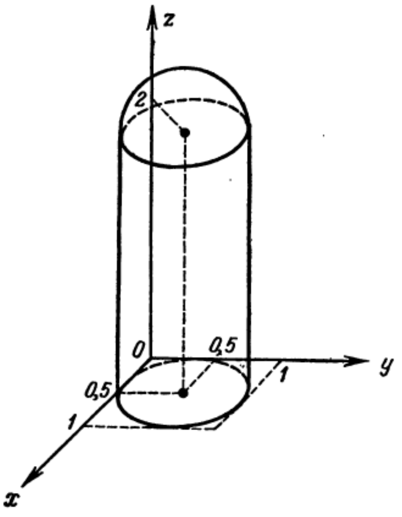

Рисунок 6.5

Далі беремо три рівномірно розподілені на відрізку $[0;1]$ послідовності випадкових чисел і записуємо їх як координати x, y, η випадкових точок в табл.6.8 (<u>наприклад</u>, як координати x беремо числа перших двох стовпців табл.6.6, а як y – числа останніх двох стовпців). Потім перевіряємо, які з цих точок належать області v.

Таблиця 6.8

Обчислення інтегралу (6.32) методом Монте-Карло

i	x	y	$\lvert x-0.5\rvert$	$\lvert y-0.5\rvert$	$(x-0.5)^2 +$ $+(y-0.5)^2$	ε_1	η	$\lvert \eta-0.8\rvert$	$6.25\times$ $\times(\eta-0.8)^2$	ε_1	ε
1	0.577	0.116	0.077	0.384	0.147	1	0.667			1	1
2	0.716	0.930	0.216	0.430	0.232		0.993	0.193	0.231		0
3	0.737	0.930	0.237	0.430	0.241	1	0.242			1	1
4	0.701	0.428	0.201	0.072	0.045		0.940	0.140	0.122		1
5	0.170	0.529	0.330	0.029	0.110	1	0.610			1	1
6	0.533	0.095	0.033	0.405	0.165	1	0.131			1	1
7	0.432	0.996	0.068	0.496	0.251	0	0.352			1	0
8	0.263	0.699	0.237	0.199	0.096	1	0.645			1	1
9	0.059	0.313	0.441	0.187	0.229	1	0.646			1	1
10	0.663	0.270	0.163	0.230	0.080	1	0.680			1	1
11	0.355	0.653	0.145	0.153	0.046	1	0.577			1	1
12	0.094	0.934	0.406	0.434	0.353	0	0.716			1	0
13	0.303	0.058	0.197	0.442	0.234	1	0.737			1	1
14	0.552	0.003	0.052	0.497	0.250	1	0.701			1	1
15	0.640	0.882	0.140	0.382	0.165	1	0.169			1	1
16	0.205	0.986	0.295	0.486	0.323	0	0.533			1	0
17	0.002	0.521	0.498	0.021	0.248	1	0.432			1	1
18	0.557	0.918	0.057	0.418	0.178	1	0.263			1	1
19	0.870	0.071	0.370	0.429	0.318	0	0.059			1	0
20	0.313	0.139	0.187	0.361	0.185	1	0.663			1	1
										$n=15$	

Порядок заповнення табл. 6.8:

1) Виділяємо точки, в яких $\eta \le 0.8$, і вважаємо, що для них $\varepsilon_2 = 1$.

2) Серед виділених точок області *v* належать ті, для яких виконується нерівність $(x-0.5)^2+(y-0.5)^2 \le (0.5)^2$. Для цих точок $\varepsilon_1 = 1$, для інших $\varepsilon_1 = 0$.

3) Обчислюємо $\varepsilon = \varepsilon_1\varepsilon_2$. Області *v* належать лише ті точки, для яких $\varepsilon = 1$.

4) Серед точок, в яких $0.8 < \eta < 1$, області *v* належать ті точки, координати яких задовольняють нерівності $(x-0.5)^2+(y-0.5)^2+6.25(\eta-0.8)^2 \le (0.5)^2$. Для цих точок $\varepsilon = 1$.

В нашому прикладі загальна кількість точок *N=20*, а кількість точок, що належать області *v*, дорівнює *15*. За формулою (6.30) отримуємо $I \approx 2.5\frac{n}{N} = 2.5\frac{15}{20} = 1.875$. Точне значення об'єму *V* дорівнює *1.833*.

Похибка формули (6.30) обернено пропорційна кореню квадратному з кількості випробувань, тобто $R = O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$. Це означає, що для забезпечення великої точності число точок *N* повинно бути дуже великим. Проте оскільки наближені формули (6.27) та (6.30) не залежать від розмірності інтеграла, *метод Монте-Карло виявляється доцільним при обчисленні інтегралів великої розмірності.*

Контрольні питання

1. Квадратурні формули з рівновіддаленими вузлами.
2. Як підвищити точність обчислення?
3. Вибір кроку інтегрування.
4. Інтегрування за допомогою степеневих рядів.
5. Інтеграли з нескінченними межами. Метод відкидання. Застосування квадратурних формул з вагою.
6. Кратні інтеграли. Метод повторного інтегрування. Метод Монте-Карло.