

## ЛЕКЦІЯ 5

### ЧИСЕЛЬНЕ ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ

#### 5.1. Формули чисельного диференціювання

Чисельне (наближене) диференціювання функцій використовують у випадку, коли функція  $y = f(x)$  задана таблицею своїх значень  $y_i = f(x_i)$  (тобто у вигляді масиву точок з координатами  $x_i, y_i \ i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) в рівновіддалених вузлах  $x_i = x_0 + ih$ , або якщо аналітичний вираз функції досить складний – і безпосереднє її диференціювання викликає труднощі. Обравши якусь множину  $n+1$  вузлів, функцію  $y = f(x)$  на інтервалі  $[a; b]$  замінюють інтерполяційною функцією  $P_n(x)$  (зазвичай, поліномом) і припускають, що похідна від цього поліному  $P'_n(x)$  застосовується для наближеного подання шуканої похідної  $y' = f'(x)$ :  $f'(x) \approx P'_n(x)$ .

*Інтерполяційний поліном (функція)  $P_n(x)$  обирається таким, щоб похідні від нього визначались аналітично з використанням відповідних простих формул.*

Наприклад, якщо в таблиці значень вибрати вузли  $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4$  та скористатися першим інтерполяційним поліномом Ньютона (формула (4.1) лекції 4), отримаємо формулу чисельного диференціювання вигляду

$$f'(x) \approx \frac{1}{h} \left( \Delta y_0 + \frac{2q-1}{2} \Delta^2 y_0 + \frac{3q^2-6q+2}{6} \Delta^3 y_0 + \frac{2q^3-9q^2+11q-3}{12} \Delta^4 y_0 \right), \quad (5.1)$$

де  $q = \frac{x - x_0}{h}$ .

Якщо ж вибрати вузли  $x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2$  та скористатися інтерполяційним поліномом Стірлінга (формула (4.11) лекції 4), отримаємо

$$f'(x) \approx \frac{1}{h} \left( \frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2} + q \Delta^2 y_{-1} + \frac{3q^2-1}{6} \cdot \frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2} + \frac{2q^3-q}{12} \Delta^4 y_{-2} \right), \quad (5.2)$$

де  $q = \frac{x - x_0}{h}$ .

Зазвичай, формули чисельного диференціювання застосовують для визначення похідних у вузлах  $x_i$ . Оскільки при цьому будь-яку точку можна взяти за початкову, то формули записують для точки  $x_0$ . Це рівносильно підстановці значення  $q=0$  у формулу вигляду (5.1) або (5.2). При цьому диференціювання інтерполяційних поліномів Ньютона (формули (4.1) та (4.6) лекції 4) призводить до формул

$$y'_0 = f'(x_0) \approx \frac{1}{h} \left( \Delta y_0 - \frac{1}{2} \Delta^2 y_0 + \frac{1}{3} \Delta^3 y_0 - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \Delta^n y_0 \right), \quad (5.3)$$

$$y'_0 = f'(x_0) \approx \frac{1}{h} \left( \Delta y_{-1} + \frac{1}{2} \Delta^2 y_{-2} + \frac{1}{3} \Delta^3 y_{-3} + \dots + \frac{1}{n} \Delta^n y_{-n} \right). \quad (5.4)$$

Формула (5.3) застосовується лише для початкових рядків таблиці, формула (5.4) – для останніх рядків. Всередині таблиці, зазвичай, застосовується формула чисельного диференціювання, отримана шляхом диференціювання інтерполяційного многочлена Стірлінга:

$$y'_0 = f'(x_0) \approx \frac{1}{h} \left( \frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2} - \frac{1}{6} \cdot \frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2} + \frac{1}{30} \cdot \frac{\Delta^5 y_{-3} + \Delta^5 y_{-2}}{2} + \dots \right). \quad (5.5)$$

Ця формула зручніша для розрахунків і має більшу точність, ніж формули (5.3) та (5.4).

Застосування формул (5.3)–(5.5) передбачає певну правильність в поведінці кінцевих різниць (див. приклади 5.1 та 5.2). Випадки порушення правильності таблиці різниць вимагають щоразу спеціального дослідження поведінки функції.

У деяких випадках буває зручніше виражати похідні не через кінцеві різниці функції, а безпосередньо через дані значення функції. Наведемо найуживаніші з таких формул.

Зберігаючи у формулі (5.5) лише перший член, отримаємо

$$y'_0 \approx \frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2h} = \frac{y_1 - y_{-1}}{2h}. \quad (5.6)$$

Зберігаючи у тій же формулі два перших члени, отримаємо

$$y'_0 \approx \frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2h} - \frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{12h} = \frac{y_{-2} - 8y_{-1} + 8y_1 - y_2}{12h}. \quad (5.7)$$

Аналогічно з формули (5.3) отримуємо

$$\left. \begin{aligned} y'_0 &\approx \frac{1}{h} \left( \Delta y_0 - \frac{1}{2} \Delta^2 y_0 \right) = \frac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2h}, \\ y'_0 &\approx \frac{1}{h} \left( \Delta y_0 - \frac{1}{2} \Delta^2 y_0 + \frac{1}{3} \Delta^3 y_0 \right) = \frac{-11y_0 + 18y_1 - 9y_2 + 2y_3}{6h}, \\ y'_0 &\approx \frac{1}{h} \left( \Delta y_0 - \frac{1}{2} \Delta^2 y_0 + \frac{1}{3} \Delta^3 y_0 - \frac{1}{4} \Delta^4 y_0 \right) = \frac{-25y_0 + 48y_1 - 36y_2 + 16y_3 - 3y_4}{12h} \end{aligned} \right\} \quad (5.8)$$

Наближені формули для обчислення похідних другого порядку отримуємо шляхом дворазового диференціювання інтерполяційних поліномів. Так, диференціюючи двічі інтерполяційний поліном Стірлінга (при  $q=0$ ),

$$\text{отримуємо} \quad y''_0 = f''(x_0) \approx \frac{1}{h^2} \left( \Delta^2 y_{-1} - \frac{1}{12} \Delta^4 y_{-2} + \frac{1}{90} \Delta^6 y_{-4} + \dots \right). \quad (5.9)$$

На початку та в кінці таблиці користуються формулами, які виходять з інтерполяційних поліномів Ньютона:

$$y''_0 = f''(x_0) \approx \frac{1}{h^2} \left( \Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12} \Delta^4 y_0 - \frac{5}{6} \Delta^5 y_0 + \dots \right), \quad (5.10)$$

$$y''_0 = f''(x_0) \approx \frac{1}{h^2} \left( \Delta^2 y_{-2} + \Delta^3 y_{-3} + \frac{11}{12} \Delta^4 y_{-4} + \frac{5}{6} \Delta^5 y_{-5} + \dots \right). \quad (5.11)$$

Ці формули менш зручні для розрахунків і мають меншу точність, ніж формула (5.9).

При повторному диференціюванні теж іноді застосовуються формули, що виражають похідну другого порядку безпосередньо через дані значення функції. Ми обмежимося наведенням лише однієї найбільш уживаної формули

$$\text{такого вигляду:} \quad y''_0 \approx \frac{\Delta^2 y_{-1}}{h^2} = \frac{y_{-1} - 2y_0 + y_1}{h^2}. \quad (5.12)$$

Зі зростанням порядку похідної, зазвичай, різко зменшується точність чисельного диференціювання. Тому на практиці не часто застосовують формули чисельного диференціювання для похідних вище другого порядку.

**Приклад 5.1.** У перших двох стовпцях табл.5.1 наведені значення функції  $y = sh(2x)$  з кроком  $h = 0.05$ . Знайти похідні  $y'$  та  $y''$  в точках  $x = 0.0$  та  $x = 0.1$ .

Складаємо таблицю різниць (табл.5.1). Цю таблицю продовжуємо тільки до різниць четвертого порядку, оскільки різниці вищих порядків при обраному кроці практично дорівнюють нулю. Для чисельного диференціювання в точці  $x = 0.0$  використовуємо формули (5.3) та (5.10), вважаючи  $x_0 = 0.0$ :

$$y'|_{x=0.0} \approx \frac{1}{h} \left( \Delta y_0 - \frac{1}{2} \Delta^2 y_0 + \frac{1}{3} \Delta^3 y_0 - \frac{1}{4} \Delta^4 y_0 \right) = \frac{1}{0.05} \cdot \left( 0.10017 - \frac{1}{2} \cdot 0.00100 + \frac{1}{3} \cdot 0.00101 - \frac{1}{4} \cdot 0.00003 \right) \approx 1.99998,$$

$$y''|_{x=0.0} \approx \frac{1}{h^2} \left( \Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12} \Delta^4 y_0 \right) = \frac{1}{(0.05)^2} \cdot \left( 0.00100 - 0.00101 + \frac{11}{12} \cdot 0.00003 \right) = 0.00700.$$

Таблиця 5.1

$x$	$y$	$\Delta y$	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0.00	0.00000				
0.05	0.10017	0.10017	0.00100		
0.10	0.20134	0.10117	0.00201	0.00101	0.00003
0.15	0.30452	0.10318	0.00305	0.00104	0.00003
0.20	0.41075	0.10623	0.00412	0.00107	
0.25	0.52110	0.11035			

Для чисельного диференціювання у точці  $x = 0.1$  (всередині таблиці) використовуємо формули (5.5) та (5.9), вважаючи  $x_0 = 0.1$ :

$$y'|_{x=0.1} \approx \frac{1}{h} \left( \frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2} - \frac{1}{6} \cdot \frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2} \right) = \frac{1}{0.05} \cdot \left( \frac{0.10318 + 0.10117}{2} - \frac{1}{6} \times \frac{0.00104 + 0.00101}{2} \right) \approx 20 \cdot (0.102175 - 0.000171) = 2.04008,$$

$$y''|_{x=0.1} \approx \frac{1}{h^2} \left( \Delta^2 y_{-1} - \frac{1}{12} \Delta^4 y_{-2} \right) = \frac{1}{(0.05)^2} \cdot \left( 0.00201 - \frac{1}{12} \cdot 0.00003 \right) = 400 \times (0.00201 - 0.0000025) = 0.80300.$$

Для порівняння, точні значення похідних  $y' = 2ch(2x)$ ,  $y'' = 4sh(2x)$  у розглянутих точках дорівнюють:  $y' = 2$ ,  $y'' = 0$  при  $x = 0.0$ ;  $y' = 2ch(0.2) = 2.0401$ ,  $y'' = 4sh(0.2) = 0.8052$  при  $x = 0.1$ .

Приклад 5.2. Табл.5.2 містить значення функції Бесселя  $y = J_0(x)$  з кроком  $h = 0.02$  для деяких  $x$ .

Таблиця 5.2

$x$	0.96	0.98	1.00	1.02	1.04
$y$	0.7825361	0.7739332	0.7651977	0.7563321	0.7473390

Обчислити похідні  $y'$  та  $y''$  в точці  $x = 1.00$ , якщо при такому кроці (поблизу точки  $x = 1.00$ ) можна знехтувати різницями вище третього порядку.

Оскільки в умові задачі зазначено, що можна знехтувати різницями порядку вище третього, то скористаємося формулами (5.7) та (5.12):

$$y'|_{x=1.00} \approx \frac{y_{-2} - 8y_{-1} + 8y_1 - y_2}{12h} = \frac{0.7825361 - 8 \cdot 0.7739332 + 8 \cdot 0.7563321 - 0.7473390}{12 \cdot 0.02} = \frac{0.0351971 - 8 \cdot 0.0176011}{0.24} = -0.440049,$$

$$y''_0 \approx \frac{y_{-1} - 2y_0 + y_1}{h^2} = \frac{0.7739332 - 2 \cdot 0.7651977 + 0.7563321}{(0.02)^2} = \frac{-0.0001301}{0.0004} = -0.3252.$$

Для порівняння, точні значення похідних  $y' = -J_1(x)$ ,  $y'' = J_1(x) - J_0(x)$  у розглянутій точці дорівнюють:  $y' = -0.4400506$ ,  $y'' = -0.3251471$  при  $x = 1.00$ .

## 5.2. Похибки, що виникають при чисельному диференціюванні

При чисельному диференціюванні таблично заданої функції  $y = f(x)$  виникають похибки двох типів:

- похибки відкидання, викликані заміною функції  $f(x)$  інтерполяційним поліномом  $P_n(x)$ ;
- похибки округлення, викликані неточним задаванням вихідних значень  $y_i$ .

**Похибки відкидання** для формул (5.3) та (5.4) оцінюються величиною

$$\frac{1}{n+1} h^n |f^{(n+1)}(\xi)|, \text{ де } \xi \text{ лежить в інтервалі } (x_0; x_n) \text{ або } (x_{-n}; x_0), \text{ відповідно. Ця}$$

оцінка є малоприматною, оскільки, зазвичай, ми нічого не знаємо навіть про порядок величини  $f^{(n+1)}(x)$ . На практиці для оцінювання похибки відкидання користуються наступними міркуваннями.

Вважають, що функція  $f(x)$ , яка розглядається, не має складових, що швидко коливаються (тобто складових, період яких не перевищує величину кроку  $h$ ). За цієї умови «малість» величини різниць певного порядку свідчить про досить хороше наближення функції  $f(x)$  інтерполяційним поліномом підходящого степеня. Якщо різниці порядку  $m$  відрізняються менше, ніж на величину похибки їхнього округлення (див. табл.5.1), то вважають, що ці різниці є практично постійними.

*Різниці вищих порядків у формулах чисельного диференціювання не застосовують. При цьому вважають, що похибка відкидання не перевищує одиниці молодшого розряду значень  $y_i$ , поділеної на  $h$ . Якщо ж, як це часто роблять, формулу обривають раніше, ніж зазначено вище, то відкинуті члени служать для оцінювання похибки округлення. Наприклад, якщо різниці третього порядку змінюються досить плавно, то похибка відкидання формули (5.6)*

*наближено оцінюється величиною  $\frac{1}{6h} \cdot \frac{|\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}|}{2}$ ; якщо різниці четвертого*

*порядку змінюються досить плавно, то похибка відкидання формули (5.12)*

*наближено оцінюється величиною  $\frac{1}{12h^2} |\Delta^4 y_{-2}|$ .*

*Всі формули оцінювання похибки відкидання містять крок розрахунку  $h$ , піднесений до позитивного степеня, тому при зменшенні кроку  $h$  похибка відкидання, як правило, зменшується.*

**Похибка округлення** обернено пропорційна кроку розрахунку  $h$  у формулах для першої похідної, обернено пропорційна  $h^2$  у формулах для другої похідної тощо. Тому при зменшенні кроку розрахунку  $h$  похибка округлення збільшується. Для оцінювання похибки округлення застосовують відомі правила оцінювання похибок. Якщо, наприклад, абсолютні похибки

вихідних значень  $y_i$  не перевищують  $\varepsilon$ , то абсолютні похибки округлення формул (5.6), (5.7) та (5.12) не перевищують, відповідно, величин  $\frac{2\varepsilon}{2h} = \frac{\varepsilon}{h}$ ,

$$\frac{18\varepsilon}{12h} = \frac{3\varepsilon}{2h} \text{ та } \frac{4\varepsilon}{h^2}.$$

Для формул типу (5.8) похибки округлення дещо більші; вони становлять, відповідно,  $\frac{8\varepsilon}{2h} = 4\frac{\varepsilon}{h}$ ,  $\frac{40\varepsilon}{6h} = 6\frac{2\varepsilon}{3h}$  та  $\frac{128\varepsilon}{12h} = 10\frac{2\varepsilon}{3h}$ .

*Похибки округлення швидко зростають зі збільшенням порядку похідної.*

Таблиця 5.3

Вплив абсолютної похибки  $\varepsilon$  у значеннях  $y_i$  на абсолютні похибки їх кінцевих різниць

Різниця	$\Delta y_i$	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	...	$\Delta^k y_i$
Абсолютна похибка	$2\varepsilon$	$4\varepsilon$	$8\varepsilon$	...	$2^k \varepsilon$

Приклад 5.3. Оцінити похибки обчислення похідних у прикладі 5.1, вважаючи, що всі знаки у значеннях  $y_i$  є вірними, тобто похибки значень  $y_i$  менші  $\varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-5}$ .

У прикладі 5.1 застосовувалися формули чисельного диференціювання, що враховують різниці до четвертого порядку включно. Тому похибки відкидання оцінюються через різниці п'ятого порядку, які у табл.5.1 не перевищують  $10^{-5}$ . Величина цієї оцінки ще залежить від застосованої формули чисельного диференціювання: в точці  $x=0.0$  застосовані формули Ньютона; у точці  $x=0.1$  – формула Стірлінга. Результати розрахунків, а також похибки округлення наведені у табл.5.4.

З табл.5.4 видно, що тут похибки округлення значно перевищують похибки відкидання, так що загальна похибка чисельного диференціювання визначається тут, головним чином, похибками округлення. (Звичайно, самі оцінки похибок дещо завищені, як видно з порівняння з істинними похибками, наведеними в п.5.1.) Для зменшення похибки округлення доцільно було б взяти більший крок розрахунку  $h$ .

Таблиця 5.4

Похідна	Точка	Похибка відкидання	Похибка округлення
$y'$	$x=0.0$	$\frac{1}{5h} \Delta^5 y  = 4 \cdot 10^{-5}$	$10 \frac{\varepsilon}{h} = 10^{-3}$
	$x=0.1$	$\frac{1}{30h} \Delta^5 y  < 0.7 \cdot 10^{-5}$	$\frac{2}{3} \frac{\varepsilon}{h} = 1.5 \cdot 10^{-4}$
$y''$	$x=0.0$	$\frac{5}{6} \frac{1}{h^2}  \Delta^5 y  < 4 \cdot 10^{-3}$	$20 \frac{\varepsilon}{h^2} = 4 \cdot 10^{-2}$
	$x=0.1$	$\frac{1}{12} \frac{1}{h^2}  \Delta^4 y  < 10^{-3}$	$4 \frac{\varepsilon}{h^2} = 8 \cdot 10^{-3}$

### 5.3. Вибір оптимального кроку чисельного диференціювання

Загальна похибка обчислення похідної може розглядатися як сума похибки відкидання та похибки округлення. Оскільки зі зменшенням кроку розрахунку  $h$  похибка відкидання зменшується, а похибка округлення зростає, то існує оптимальний крок розрахунку (зрозуміло, свій для кожної формули чисельного диференціювання). Так, для формули (5.6) похибка відкидання не перевищує  $\frac{h^2}{6} M_3 = \frac{h^2}{6} \max_{(x_{-1}, x_1)} |f'''(x)|$ , а похибка округлення оцінюється величиною  $\frac{2\varepsilon}{2h} = \frac{\varepsilon}{h}$ , де  $\varepsilon$  – абсолютна похибка вихідних значень функції  $y_i$ . Сумарна похибка оцінюється величиною  $\frac{h^2}{6} M_3 + \frac{\varepsilon}{h}$ .

Ця величина досягає найменшого значення за умови

$$\left( \frac{h^2}{6} M_3 + \frac{\varepsilon}{h} \right)' = \frac{h}{3} M_3 - \frac{\varepsilon}{h^2} = 0, \text{ тобто при } h = \sqrt[3]{\frac{3\varepsilon}{M_3}}, \text{ що й визначає оптимальний}$$

крок розрахунку для формули (5.6). Отриману формулу для оптимального

кроку зручно записати у вигляді 
$$\frac{h^2}{6} M_3 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{h}, \quad (5.13)$$

або у вигляді 
$$\frac{1}{6h} |\Delta^3 y| \approx \frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{h}, \quad (5.14)$$



який допускає просте тлумачення: оптимальний крок для формули (5.6) визначається так, щоб похибка відкидання складала приблизно половину похибки округлення (при цьому повна похибка не перевищуватиме  $\frac{3}{2} \frac{\varepsilon}{h}$ ).

Подібним чином обирається оптимальний крок і для інших формул чисельного диференціювання. Для формули (5.7) оптимальний крок визначається так, щоб похибка відкидання  $\frac{1}{30h} |\Delta^5 y|$  приблизно дорівнювала б

$\frac{1}{3}$  похибки округлення  $\frac{3}{2} \frac{\varepsilon}{h}$ ; при цьому повна похибка не перевищуватиме  $2 \frac{\varepsilon}{h}$ .

Для формули (5.12) оптимальний крок визначається так, щоб похибка відкидання  $\frac{1}{12h^2} |\Delta^4 y|$  приблизно дорівнювала б похибці округлення  $4 \frac{\varepsilon}{h^2}$ ; при цьому повна похибка не перевищуватиме  $8 \frac{\varepsilon}{h^2}$ .

В наведених вище формулах під значеннями  $|\Delta^3 y|$ ,  $|\Delta^4 y|$ ,  $|\Delta^5 y|$  розуміють деякі середні (для даної ділянки таблиці) значення абсолютних величин різниць відповідного порядку.

**Приклад 5.4.** Вибрати потрібну формулу та оптимальний крок чисельного диференціювання функції, наведеної в табл.5.5. Значення функції у наведені з усіма вірними знаками.

Тут абсолютна похибка вихідних значень функції не перевищує  $\varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-4}$ . При чисельному диференціюванні за формулою (5.6) оптимальний крок визначається умовою  $\frac{1}{6} \Delta^3 y \approx \frac{1}{2} \varepsilon$ .

Оскільки скінченні різниці третього порядку в табл.5.5 змінюються від  $-3 \cdot 10^{-4}$  до  $3 \cdot 10^{-4}$ , то величина  $\frac{1}{6} \Delta^3 y$  змінюється від  $-0.5 \cdot 10^{-4}$  до  $0.5 \cdot 10^{-4}$ , тобто в середньому має підходящий порядок.

Таблиця 5.5

$x$	$y$	$\Delta y$	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
1.0	0.4401	0.0308		
1.1	0.4709	0.0274	-0.0034	-0.0003
1.2	0.4983	0.0237	-0.0037	-0.0001
1.3	0.5220	0.0199	-0.0038	-0.0001
1.4	0.5419	0.0160	-0.0039	-0.0001
1.5	0.5579	0.0120	-0.0040	-0.0001
1.6	0.5699	0.0079	-0.0041	-0.0001
1.7	0.5778	0.0037	-0.0042	0.0002
1.8	0.5815	-0.0003	-0.0040	-0.0002
1.9	0.5812	-0.0045	-0.0042	0.0003
2.0	0.5767	-0.0084	-0.0039	0.0000
2.1	0.5683	-0.0123	-0.0039	0.0001
2.2	0.5560	-0.0161	-0.0038	0.0002
2.3	0.5399	-0.0197	-0.0036	0.0002
2.4	0.5202	-0.0231	-0.0034	0.0002
2.5	0.4971	-0.0263	-0.0032	0.0003
2.6	0.4708	-0.0292	-0.0029	0.0002
2.7	0.4416	-0.0319	-0.0027	
2.8	0.4097			

Тому можна обчислювати похідні за формулою (5.6) з кроком  $h = 0.1$ . Це дає загальну похибку порядку  $1.5 \frac{\varepsilon}{h} \div 2 \frac{\varepsilon}{h}$ , тобто порядку  $10^{-3}$ . Для зменшення

загальної похибки спробуємо збільшити крок  $h$  і застосувати точнішу формулу (5.7). Збільшення кроку  $h$  удвічі призводить до даних, наведених у табл.5.6.

Таблиця 5.6

$x$	$y$	$\Delta y$	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
1.0	0.4401					
		0.0582				
1.2	0.4983		-0.0146			
		0.0436		-0.0010		
1.4	0.5419		-0.0156		0.0002	
		0.0280		-0.0008		0.0006
1.6	0.5699		-0.0164		0.0008	
		0.0116		0.0000		-0.0003
1.8	0.5815		-0.0164		0.0005	
		-0.0048		0.0005		-0.0002
2.0	0.5767		-0.0159		0.0003	
		-0.0207		0.0008		0.0004
2.2	0.5560		-0.0151		0.0007	
		-0.0358		0.0015		-0.0003
2.4	0.5202		-0.0136		0.0004	
		-0.0494		0.0019		
2.6	0.4708		-0.0117			
		-0.0611				
2.8	0.4097					

З табл.5.6 видно, що при кроці  $h_1 = 2h = 0.2$  абсолютні похибки різниць п'ятого порядку в середньому дорівнюють  $3.6 \cdot 10^{-4}$ , так що  $\frac{1}{30h} |\Delta^5 y| \approx 1.2 \cdot 10^{-5}$ , що складає приблизно чверть від  $\varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-4} = 5 \cdot 10^{-5}$ .

Якщо вибрати такий крок, то похибка відкидання складе  $\frac{1}{30h_1} |\Delta^5 y| \approx 0.6 \cdot 10^{-4}$ , а похибка округлення  $\frac{3}{2} \frac{\varepsilon}{h} \approx 4 \cdot 10^{-4}$ , і, отже, повна похибка оцінюється величиною  $5 \cdot 10^{-4}$ . Це у два–три рази краще, ніж при кроці  $h = 0.1$ , але залишається ще можливість для подальшого збільшення кроку.

При збільшенні кроку розрахунку в  $\lambda$  разів різниці першого порядку збільшуються в  $\lambda$  разів, другого порядку –  $\lambda^2$  разів, ..., п'ятого порядку –  $\lambda^5$  разів. Тому вибір кроку  $h_2 = \frac{3}{2} h_1 = 3h = 0.3$  дає похибку відкидання приблизно

$$\frac{1}{30h_2} \cdot (1.5)^5 \cdot 4 \cdot 10^{-4} = 3.3 \cdot 10^{-4} \text{ при похибці округлення } \frac{3}{2} \frac{\varepsilon}{h_2} = 2.5 \cdot 10^{-4}, \text{ що є}$$

цілком прийнятним. Подальше збільшення кроку вже навряд чи доцільне, тим більше що в табл.5.6 не вистачає даних для складання таблиці різниць до п'ятого порядку при кроці  $h=0.4$ . Отже, як оптимальний обираємо крок  $h_2=0.3$ . З цим кроком можна підрахувати значення похідних лише в точках  $x=1.6; 1.7; \dots; 2.2$ . При цьому зручно використовувати формулу (5.7) в безрізницевому виразі, тобто у вигляді  $y'_0 \approx \frac{1}{12h}(y_{-2} - 8y_{-1} + 8y_1 - y_2)$ , де під  $y_i$  слід розуміти  $y(x_0 + ih_2)$ . Наприклад,

$$y'_{|x=1.6} \approx \frac{1}{12 \cdot 0.3} \cdot (0.4401 - 8 \cdot 0.5220 + 8 \cdot 0.5812 - 0.5560) = 0.0994,$$

$$y''_{|x=1.7} \approx \frac{1}{12 \cdot 0.3} \cdot (0.4709 - 8 \cdot 0.5419 + 8 \cdot 0.5767 - 0.5399) = 0.0582.$$

У точках  $x=1.4; 1.5$  та  $x=2.3; 2.4$  можна ще користуватися формулою (5.7) з кроком  $h_1=0.2$ , що близький до оптимального і дає майже таку ж точність. В точках, ще ближчих до границь таблиці, доведеться користуватися формулою (5.6) з кроком  $h=0.1$  або навіть формулами Ньютона.

Наведені оцінки похибок, зазвичай, виявляються дещо завищеними. Так, у розглянутому прикладі істинні похибки обчислення похідних в кілька разів менші наведених оцінок. Для порівняння обчислимо значення похідної  $y'$  у точці  $x=1.6$  за формулою (5.6) з кроком  $h=0.1$ . Ми отримаємо

$$y'_{|x=1.6} \approx \frac{1}{2 \cdot 0.1} \cdot (0.5778 - 0.5579) = 0.0995, \text{ що лише на } 3 \cdot 10^{-4} \text{ відрізняється від}$$

точного значення  $0.0992$ .

### Контрольні питання

1. Формули чисельного диференціювання.
2. Похибки, що виникають при чисельному диференціюванні.
3. Вибір оптимального кроку чисельного диференціювання.