ТЕМА №7. Розв'язання задач математичної фізики в MatLab

Мета: Вивчити можливості системи MatLab для розв'язання диференціальних рівнянь у частинних похідних (ToolBox PDE).

1. Теоретичні відомості

Більшість задач механіки, теплопровідності, стікання рідини, електростатики й електродинаміки зводяться до ДР у частинних похідних в областях складної форми. Як відомо, ДР, що має більше однієї незалежної змінної, називається *ДР у частинних похідних* (ДРЧП). В MatLab вбудований пакет ToolBox Partial Differential Equations (PDE), призначений для розв'язання крайових задач для ДРЧП у двовимірних областях методом кінцевих елементів. Для цього до складу даного ToolBox входить додаток pdetool з графічним інтерфейсом користувача. Дане середовище дозволяє задати геометрію області, тип та коефіцієнти ДР, граничні й початкові умови, провести розділення області на кінцеві елементи (тріангуляцію), розв'язати отриману систему лінійних рівнянь та візуалізувати результат. Користувач повинен сформулювати задачу (тобто написати рівняння та граничні умови) та послідовно виконати описані дії.

Постановка задачі (***стаціонарний розподіл температури***). За допомогою середовища pdetool визначити розподіл температури T в області на рис.7.1. Круговий отвір розміщений у центрі прямокутника, права й ліва границі якого теплоізольовані. Всередині області немає джерел тепла, коефіцієнт теплопровідності k=200. Розподіл температури описується ДР $k\nabla \cdot \nabla T = 0$; граничні умови на правій та лівій границі задають нульовий потік тепла $n \cdot k\nabla T = 0$ (n – вектор нормалі до границі); на верхній та нижній границі T=600, а на колі T=500. Розмірності одиниць не вказується.

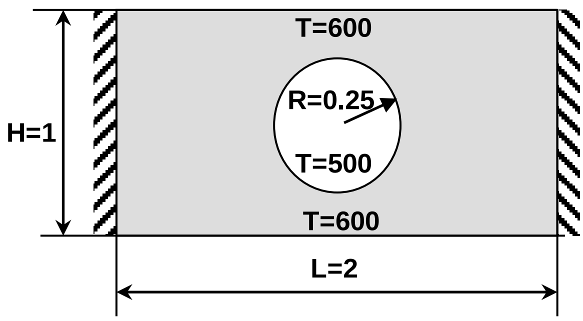

Рис.7.1. Область і граничні умови

Конструювання області. В результаті виконання в командному вікні команди pdetool з'являється вікно **PDE Toolbox**, яке містить такі елементи:

– рядок меню (кожне меню відповідає певному етапу розв'язання задачі);

– панель інструментів створення геометричних примітивів, що визначають область;

– панель інструментів для задання граничних умов, коефіцієнтів рівняння, тріангуляції, розв'язання й візуалізації результату;

– область введення **Set formula** для конструювання області з геометричних примітивів;
– осі для створення області.

Конструювання області, наведеної на рис.7.1, включає: створення прямокутника й кола заданих розмірів і віднімання кола з прямокутника. Зручно розмістити область на початку координат, тоді координати нижнього лівого кута прямокутника – (-1; -0.5), а його висота й ширина 1 і 2, відповідно. Центр кола співпаде з початком координат.

Для створення прямокутника оберіть в меню **Draw** пункт **Rectangle/square** або використовуйте відповідний інструмент (його піктограма містить прямокутник). Намалюйте мишкою потрібну прямокутну область на осях від кута, утримуючи натиснутою ліву кнопку. Оскільки точно витримати розміри й розташування складно, подвійне клацання миші по імені прямокутника призведе до появи діалогового вікна **Object Dialog** для установки заданих розмірів і розміщення об'єкту. Введіть у рядках **Left** і **Bottom** координати нижнього лівого кута прямокутника: -1 і -0.5, у **Wigth** і **Height** задайте ширину й висоту: 2 і 1, відповідно. Поле **Name** призначене для визначення назви об'єкту (прямокутника). Імена створюваних прямокутників складаються з букви R та порядкового номера. Натисніть **OK** і переконайтеся у правильності розмірів в розміщення прямокутника.

Намалюйте коло з центром у точці (0,0) і радіусом 0.25. Оберіть в меню **Draw** пункт **Ellipse/circle(centered)** або використовуйте відповідний інструмент (його піктограма – еліпс з перекриттям). Розмістіть курсор миші на початок координат і намалюйте коло за допомогою миші з одночасним утриманням у натиснутому стані клавіші <Ctrl>. Перейдіть до властивостей кола подвійним клацанням миші й уточніть у діалоговому вікні **Object Dialog** його розміщення й радіус. У рядки **X-center**, **Y-center** запишіть нулі, а в **Radius** – 0.25. Коло має назву C1.

При конструюванні геометрії області багато дій, зокрема, видалення примітиву, є необоротними. Пункт **Undo** меню **Edit** дозволяє лише відмінити останню намальовану лінію багатокутника. Тому *рекомендується періодичне зберігання геометрії області*. Просто задати геометрію області дозволяє об'єднання об'єктів, але при об'єднанні зберігаються внутрішні границі. Якщо область однорідна, потрібно видалити непотрібні границі за допомогою пункту **Remove Subdomain Border** меню **Boundary**, попередньо виділивши їх в режимі границь. Всі внутрішні границі видаляються вибором пункту **Remove All Subdomain Borders**. Задачі в областях, складених з матеріалів з різними властивостями, не припускають видалення внутрішніх границь.

Отже, геометричні примітиви для задання області створені. Тепер визначимо взаємозв'язки між примітивами, утворюючими область, тобто задамо структуру області. Коло повинне бути видалене з прямокутника. Зв'язок між примітивами визначається у рядку **Set Formula** середовища pdetool. Знак "+" означає об'єднання об'єктів, а "-" – віднімання. Області, зображеній на рис.7.1, відповідає формула R1-C1 (з більшого об'єкту віднімається менший за розмірами).

Якщо створювані примітиви об'єднуються, між їх іменами ставиться "+". При редагуванні формули потрібно виконувати такі правила:

- "–" служить для віднімання примітиву, операція має найвищий пріоритет;
- "+" служить для об'єднання примітивів, а "*" – для перетину, операції мають однаковий пріоритет;
- для зміни пріоритету використовують круглі скобки.

Область, в якій розв'язується ДР, створена, тепер задамо коефіцієнти рівняння та граничні умови.

Меню **Options** містить підменю **Application**, що дозволяє задати тип розв'язуваної задачі. Пункт **Heat Transfer** відповідає задачі про розподіл тепла. Оберіть даний пункт. (Використання списку, що розкривається і розміщений на панелі інструментів, призводить до аналогічного результату.) Встановіть режим ДР, обравши пункт **PDE Mode** в меню **PDE**. Осі тепер містять область з отвором. Саме для цієї області й потрібно визначити коефіцієнти та праву частину ДР.

Перейдіть до пункту **PDE Specification** меню **PDE** або застосуйте подвійне клацання по області, – з'явиться діалогове вікно **PDE Specification**, зверху якого на панелі **Equation** наведений загальний вигляд рівняння теплопровідності, що може бути розв'язане в середовищі pdetool: $-div(k * grad(T)) = Q + h * (Text - T)$, де T – температура.

Значення коефіцієнтів встановлюються у рядках вводу, розміщених на правій панелі діалогового вікна. Перемикач **Elliptic** відповідає задачі про стаціонарний розподіл тепла (наш випадок), яка описується еліптичним ДР, а **Parabolic** – нестаціонарному випадку. Задайте у рядках вводу коефіцієнти рівняння розв'язуваної задачі.

Вибір відповідних коефіцієнтів дозволяє звести ДР, записане у загальному вигляді, до рівняння, що описує поставлену в нашому прикладі задачу. Встановіть коефіцієнту теплопровідності k значення 200. Оскільки у розв'язуваній задачі немає розподілених джерел тепла, потік тепла Q=0. Коефіцієнт конвективного теплообміну h та зовнішня температура, що входять до загального вигляду ДР, також повинні мати нульове значення. Збережіть зроблені зміни (**OK**).

Для задання граничних умов оберіть пункт **Boundary Mode** меню **Boundary** – середовище pdetool перейде до режиму встановлення граничних умов: у вікні зображуються лише границі області розв'язання (односпрямованими стрілками червоного кольору). Зробіть поточною верхню границю прямокутника клацанням миші та оберіть в меню **Boundary** пункт **Specify Boundary Conditions –** з'явиться діалогове вікно **Boundary Condition** для вибору типу граничної умови. Гранична умова пропонується у загальному вигляді, вибір коефіцієнтів дозволяє отримати потрібний окремий випадок. Якщо на даному відрізку границі задані умови Дирихле, цей відрізок виділяється червоним кольором, умови Неймана – синім, змішані умови – зеленим. Таким чином, після задання граничних умов за кольором граничних відрізків відразу можна визначити тип умови, заданої на конкретному відрізку границі.

На верхній границі прямокутника задане значення T=600 (рис.7.1). Це гранична умова Дирихле, тому перемикач **Condition type** вікна **Boundary Condition** повинен бути встановлений у положення **Dirichlet**. Зверху на панелі **Boundary condition equation** присутній загальний вигляд умови $h*T=r$, де h – ваговий коефіцієнт, r – задана температура. Встановіть h=1, r=600. Збережіть значення (**OK**) і проведіть аналогічну операцію для нижньої сторони прямокутника.

Можна об'єднати кілька частин границі та визначити однакові граничні умови відразу для всієї групи. Додавання частини границі до групи проводиться клацанням миші з одночасним утриманням <Shift>, а подвійне клацання по частині границі або по групі частин дає швидкий доступ до діалогового вікна **Boundary Condition**. Встановіть на границі отвору T=500, згрупувавши попередньо чотири частини кола.

На правій та лівій стороні прямокутної області потік тепла дорівнює нулю, оскільки ці границі теплоізольовані (рис.7.1), що є окремим випадком умов Неймана. Об'єднайте дві границі у групу й відкрийте діалогове вікно **Boundary Condition**. Встановіть перемикач **Condition type** у положення **Neumann**. Зверху вікна з'явиться загальний вигляд умови Неймана $n*k*grad(T)+q*T=g$, що відповідає конвективному теплообміну через границю з навколишнім середовищем. Для отримання теплоізольованих границь потрібно задати коефіцієнти q і g рівними нулю.

Рівняння та граничні умови визначені. Наступним етапом є розв'язання задачі та візуалізація результату. Перший крок полягає у триангуляції – покритті області сіткою, що складається з трикутників (рис.7.2). Оберіть пункт **Mesh Mode** меню **Mesh**, область

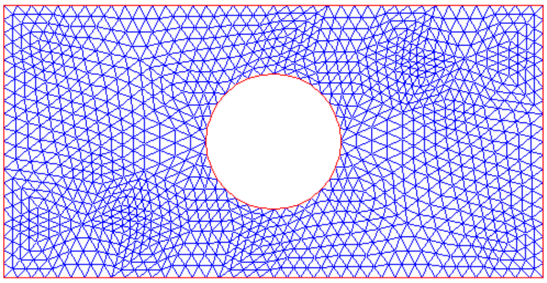

Рис.7.2. Розрахункова триангуляція

розбивається на досить великі трикутні елементи. Для отримання розв'язку з прийнятною точністю початкової триангуляції недостатньо, слід зменшити крок розбиття області. Оберіть пункт **Refine Mesh** або натисніть кнопку з трикутником, розділеним на чотири частини. Кожний вибір цього пункту призводить до рівномірного зменшення розмірів трикутника. Вибір надто дрібної сітки може призвести до значних витрат машинного часу на розв'язання задачі. Для повернення до початкової триангуляції служить пункт **Initialize Mesh**. Зменшення трикутників початкової сітки покращує вигляд границь області.

Розв'язання задачі на розрахунковій сітці проводиться шляхом вибору пункту **Solve PDE** меню **Solve** або натисненням кнопки зі знаком "дорівнює". Використовується спосіб розв'язання задачі, встановлений за замовчуванням. Знайдений розподіл

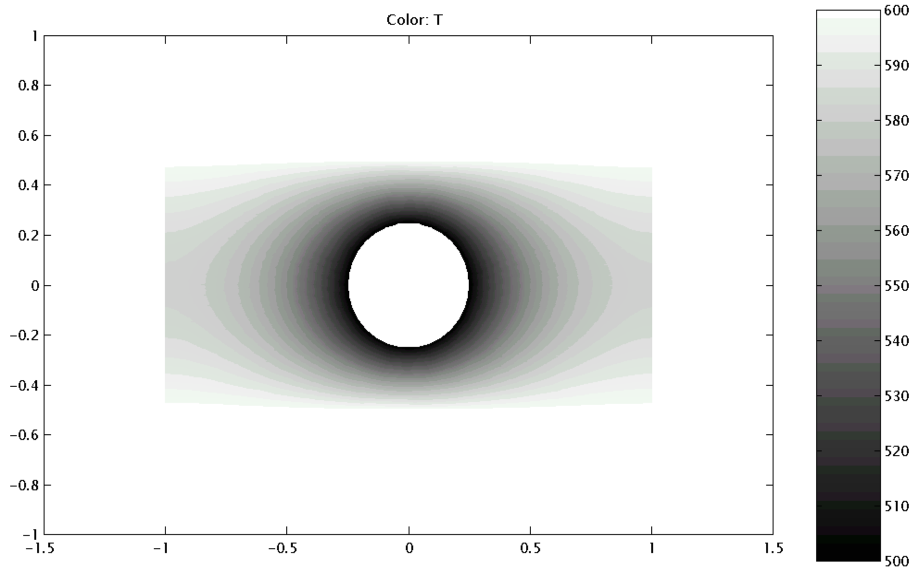

Рис.7.3. Графічне зображення результату

температури наводиться у вікні середовища pdetool контурним графіком з кольоровою заливкою, поруч з яким розміщена шкала відповідності кольору значенню температури (рис.7.3). Установка кольорової палітри проводиться з списку **Colormap** діалогового вікна **Plot Selection**, обраного за допомогою пункту **Parameters** меню **Plot.** Зміна геометрії області, граничних умов, типу рівняння та його коефіцієнтів може бути виконано, навіть якщо розв'язок вже знайдений. Для цього потрібно перевести середовище pdetool у відповідний режим і провести необхідні дії.

Збереження результатів роботи проводиться в М-файлі з рядку **Save** (або **Save as**) меню **File**. М-файл містить функції ToolBox PDE, які викликаються у середовищі pdetool відповідно до послідовності дій користувача. Цей М-файл містить не лише геометрію області, тип і коефіцієнти рівняння та граничних умов, а й поточні установки середовища, що дозволяє продовжити розв'язання задачі.

Середовище pdetool дозволяє надрукувати графік розв'язку. Вибір пункту **Print** меню **File** призводить до появи діалогового вікна друку.

Стандартний набір функцій ToolBox PDE дозволяє розв'язувати досить широкий спектр двовимірних задач в обмежених областях, включаючи: задачі теорії пружності; стаціонарні й нестаціонарні задачі теплопровідності; стікання у пористих середовищах; задачі дифузії; ламінарне стікання рідини; електростатичні задачі; розповсюдження акустичних та електромагнітних хвиль; визначення власних коливань конструкцій тощо. Таким чином, за допомогою ToolBox PDE може бути розв'язана практично будь-яка задача, описана рівнянням або системою ДРЧП.

Розглянута вище стаціонарна задача теплопровідності описується ***еліптичним ДР***, яке у загальному випадку має вигляд: $-\nabla \cdot (c\nabla u) + au$ в області Ω. Границя $\partial\Omega$ області може бути поділена на кілька ділянок, на кожному з яких ставляться або умови Дирихле $hu = r$, або узагальнена умова Неймана $n \cdot (c\nabla u) + qu = g$, де n – вектор зовнішньої нормалі до границі. В розглянутому прикладі коефіцієнти рівняння і граничних умов були постійними, однак ToolBox PDE здатен розв'язувати задачі зі змінними коефіцієнтами $c(x,y)$, $a(x,y)$ та правою частиною $f(x,y)$ рівняння і $h(x,y)$, $r(x,y)$, $q(x,y)$, $g(x,y)$ граничних умов. Нелінійні задачі, в яких коефіцієнти залежать від шуканої функції $u(x,y)$, також можуть бути розв'язані в ToolBox PDE. Налаштування середовища pdetool на розв'язання еліптичного рівняння здійснюється шляхом вибору пункту **Generic Scalar** підменю **Application** меню **Options** або за допомогою списку, що розкривається, розміщеного на панелі інструментів середовища. В діалоговому вікні **PDE Specification** слід встановити перемикач **Type of PDE** у положення **Elliptic**.

Для ***ДР зі змінною правою частиною*** f, що залежить від x і y, вводиться вираз відповідно до правил поелементних операцій с масивами, використовуючи змінні x та y. Змінні коефіцієнти рівняння задаються аналогічно наведеному вище з використанням змінних x і y та поелементних операцій. Коефіцієнти, що входять до граничних умов, можуть залежати або від x і y, або від значення s параметра частини границі. В початковій точці границі s=0, в кінцевій s=1. Напрям границі визначається стрілкою в режимі задання граничних умов. Значення параметра пропорційне довжині частині границі.

Параболічне **та** ***гіперболічне рівняння***, які можуть бути розв'язані в ToolBox PDE, мають такий вигляд, відповідно:

$$d\,\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla\cdot\left(c\nabla u\right) + au = f\ , \qquad d\,\frac{\partial^2 u}{\partial t} - \nabla\cdot\left(c\nabla u\right) + au = f\ .$$

Коефіцієнти *d, c, a* і права частина *f* можуть залежати як від x та y, так і від часу *t*. Граничні умови на одних частинах є умовами Дирихле, а на інших – Неймана. Допускається залежність коефіцієнтів граничних умов від часу та координат або параметра границі. Задача, описана параболічним і гіперболічним рівняннями, потребує визначення початкових умов в нульовий момент часу. Розв'язок при $t=0$ може залежати від x і y. ToolBox PDE дозволяє знайти розв'язок лише в обмеженій області Ω.

Середовище pdetool дає можливість виводу наочих графіків отриманого наближеного розв’язку. Можна візуалізувати розв’язок у будь-який момент часу, або прослідкувати за розвитком процесу в окремому графічному вікні, в яке виводиться послідовність слайдів, що містять зафарбовані контурні графіки розв’язка у різні моменти часу.

Розглянемо ***нестаціонарну задачу*** про розподіл тепла в області, наведеній на рис.7.4. Границі прямокутника теплоізольовані, а краї отвору нагріваються, температура змінюється лінійно у часі. Всередині області немає розподілених джерел тепла, а у початковий момент температура дорівнює нулю у всій області. Розглянемо зміну температури протягом 15 с.

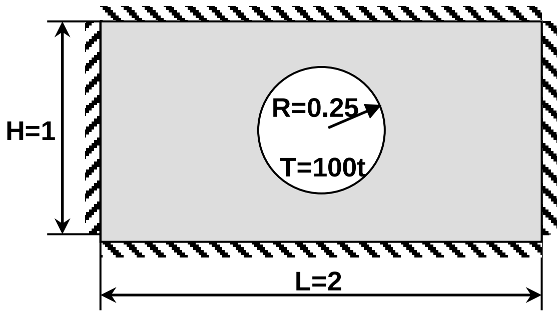

Рис. 7.4. Нестаціонарний розподіл температури

Задамо геометрію області та налаштуємо середовище pdetool на розв’язання задачі теплопровідності. Перейдемо до діалогового вікна **PDE Specification** і оберемо параболічний тип рівняння, встановивши перемикач на **Parabolic**. Введемо одиниці у рядки, що відповідають щільності rho, теплоємності C та коефіцієнту теплопровідності k, а параметри Q, h та Text зробимо нульовими. На границях прямокутника поставимо умови рівності нулю потоку тепла, а для кола введемо 100*t, змінна t використовується для позначення часу.

Для задання розподілу температури в початковий момент часу і значення часу, в які слід знайти наближений розв'язок, оберіть пункт **Parameters** меню **Solve**. З'являється діалогове вікно **Solve Parameters**, вид якого відповідає типу розв'язуваної задачі. Для нестаціонарної задачі теплопровідності, описаної параболічним рівнянням, вікно **Solve**

Parameters дозволяє встановити в рядку **Time** вектор моментів часу, а в рядку **u(t0)** – початковий розподіл температури, який у загальному випадку може залежати від x та y.

Введемо 0 для початкового розподілу і задамо вектор моментів часу від нуля до 15 з кроком 0.5, застосувавши двокрапку для генерації вектора значень.

Проведемо триангуляцію, зменшимо крок сітки у кілька разів і розв'яжемо задачу. У вікні pdetool з'явиться розподіл температури в області у кінцевий момент часу при t=15. *Прослідкувати динаміку процесу* можна, встановивши в діалоговому вікні **Plot Selection** (меню **Plot**, рядок **Parameters**) мітку **Animation** та використавши кнопку **Options** для визначення параметрів анімованих результатів. Натиснення на **Options** призводить до відкриття вікна **Animation Options**. Рядок введення **Animation rate (fps)** служить для задання кількості кадрів за секунду, що використовується при відображенні розподілу температури залежно від часу. Кількість повторів анімації встановлюється у рядку **Number of repeats**. Після введення потрібних значень натисніть кнопку **Plot** у вікні **Plot Selection**. Динамічний розподіл температури в області виведеться в окремому графічному вікні.

У ToolBox PDE є можливість розв'язання ***задачі на власні значення*** $-\nabla\cdot(c\nabla u)+au=\lambda du$, причому коефіцієнти *c*, *a* і *d* можуть залежати від x та y в області Ω. В цій задачі допустимими є лише однорідні граничні умови Дирихле $u=0$ або Неймана $n\cdot(c\nabla u)+qu=0$. Розв'язком задачі є власні значення та власні функції.

Налаштування середовища pdetool на розв'язання задачі на власні значення проводиться установкою перемикача **Eigenmodes** у діалоговому вікні **PDE Specification**. Інтервал пошуку власних значень визначається у вікні **Solve Parameters** і задається вектор-рядком або вектор-стовпцем з двох елементів.

Коли розв'язок знайдений, у вікно pdetool виводиться графік власної функції, що відповідає першому знайденому значенню з введеного інтервалу. Діалогове вікно **Plot Selection** містить список **Eigenvalue**, що розкривається та дозволяє обрати власне значення та вивести у вікно середовища pdetool графік відповідної власної функції.

Функції, що входять до ToolBox PDE, дозволяють розв'язати ***систему ДР*** *довільної розмірності*. Середовище pdetool оперує лише з системою другого порядку:

$$-\nabla\cdot(c_{11}\nabla u_1)-\nabla\cdot(c_{12}\nabla u_2)+a_{11}u_1+a_{12}u_2=f_1;$$
$$-\nabla\cdot(c_{21}\nabla u_1)-\nabla\cdot(c_{22}\nabla u_2)+a_{21}u_1+a_{22}u_2=f_2.$$

Граничні умови на різних частинах $\partial\Omega$ можуть бути трьох типів:

Дирихле $\quad h_{11}u_1+h_{12}u_2=r_1;\quad h_{21}u_1+h_{22}u_2=r_2,$

Неймана $$n\cdot(c_{11}\nabla u_1)+n\cdot(c_{12}\nabla u_2)+q_{11}u_1+q_{12}u_2=g_1;$$
$$n\cdot(c_{21}\nabla u_1)+n\cdot(c_{22}\nabla u_2)+q_{21}u_1+q_{22}u_2=g_2$$

змішані $h_{11}u_1+h_{12}u_2=r_1;\quad n\cdot(c_{11}\nabla u_1)+n\cdot(c_{12}\nabla u_2)+q_{11}u_1+q_{12}u_2=g_1+h_{11}\mu;$
$$n\cdot(c_{21}\nabla u_1)+n\cdot(c_{22}\nabla u_2)+q_{21}u_1+q_{22}u_2=g_2+h_{12}\mu.$$

Нестаціонарні задачі, описувані системами ДР, також можна розв'язати в ToolBox PDE. Вибір опції **Generic System** у підменю **Application** меню **Options** (або у списку, що розкривається, на панелі інструментів) налаштовує середовище pdetool на розв'язання подібної системи ДР. Діалогове вікно **PDE Specification** дозволяє задати коефіцієнти стаціонарних і нестаціонарних систем або перейти до розв'язання задачі на власні значення. Вікно **Boundary Condition** містить перемикачі **Neumann**, **Dirichlet** та **Mixed** для вибору одного з трьох типів умов і рядки для задання коефіцієнтів граничних умов. Розв'язком системи є вектор-функція з двох компонентів $[u_1(x,y),u_2(x,y)]$. Списки діалогового вікна **Plot Selection**, що розкриваються, дають можливість візуалізувати перший або другий компоненти розв'язку (вони позначені **u** і **v**), вивести графік заданої функції від компонентів розв'язку (опція **user entry**) або зобразити розв'язок векторним полем (мітка **Arrows**).

2. Порядок виконання лабораторної роботи

Виконати наступне завдання згідно з номером свого варіанту. При триангуляції зменшувати крок сітки у кілька разів. Вивести скріншоти вікон за алгоритмом розв’язання задачі та пояснити вибір типу рівняння, граничних умов і значень відповідних коефіцієнтів.

1. Розв'язати еліптичне ДР зі змінною правою частиною $\nabla\cdot\nabla u=16\left(x^2+y^2\right)$. (Область є колом одиничного радіусу з центром на початку координат, на границі якого задана умова Дирихле u=1). Для візуалізації контурного графіка обрати палітру jet.

2. Розв'язати рівняння Лапласа $\nabla^2 u=0$ в області $R=\{(x,y): 0\le x\le 2,\ 0\le y\le 2\}$, де $u(x,y)$ – температура в точці (x,y) та граничні умови такі: $u(x,0)=20$ і $u(x,2)=180$ для $0\le x\le 2$, та $u(0,y)=0$ і $u(2,y)=80$ для $0\le y\le 2$. Для візуалізації контурного графіка обрати палітру bone.

3. Знайти розв'язок рівняння Лапласа $\Delta u \equiv u_{xx} + u_{yy} = 0$ у прямокутнику $D = \{(x,y) | \, 0 \le x \le a, \, 0 \le y \le b\}$ для таких граничних умов: $u(0,y) = \alpha$, $u(a,y) = \alpha y$, $\frac{\partial u(x,0)}{\partial y} = \frac{\partial u(x,b)}{\partial y} = 0$. Взяти $a = b = \alpha = 1$. Для візуалізації обрати палітру jet.

4. Розв'язати рівняння Лапласа $\nabla^2 u = 0$ в області $R = \{(x,y): 0 \le x \le 1.5, \, 0 \le y \le 1.5\}$, де $u(x,y)$ – температура в точці (x,y) і граничні умови такі: $u(x,0) = x^4$ і $u(x,1.5) = x^4 - 13.5x^2 + 5$ для $0 \le x \le 1.5$, та $u(0,y) = y^4$ і $u(1.5,y) = y^4 - 13.5y^2 + 5$ для $0 \le y \le 1.5$. Для візуалізації контурного графіка використати палітру jet.

5. Розв'язати рівняння Пуасона $\nabla^2 u = 2$ в області $R = \{(x,y): 0 \le x \le 1, \, 0 \le y \le 1\}$ з граничними умовами: $u(x,0) = x^2$ і $u(x,1) = (x-1)^2$ для $0 \le x \le 1$, та $u(0,y) = y^2$ і $u(1,y) = (y-1)^2$ для $0 \le y \le 1$. Для візуалізації контурного графіка взяти палітру jet.

6. Розв'язати рівняння Пуасона $\nabla^2 u = y$ в області $R = \{(x,y): 0 \le x \le 1, \, 0 \le y \le 1\}$ с граничними умовами: $u(x,0) = x^3$ і $u(x,1) = x^3$ для $0 \le x \le 1$, та $u(0,y) = 0$ і $u(1,y) = 1$ для $0 \le y \le 1$. Для візуалізації контурного графіка використати палітру jet.

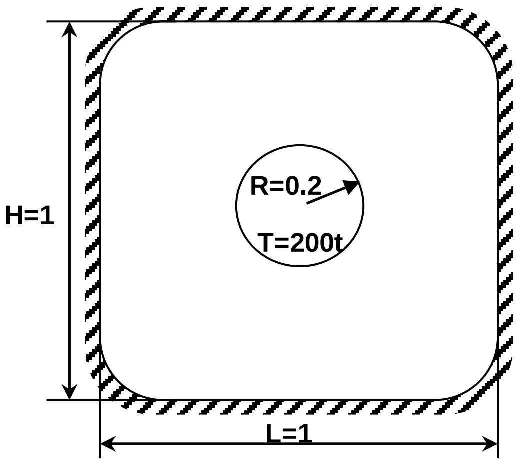

Рис. 7.5. Розподіл температури в області з округленими кутами

7. Розв'язати рівняння $\nabla^2 u = -4u$ в області $R = \{(x,y): 0 \le x \le 1, \, 0 \le y \le 1\}$ з граничними значеннями $u(x,y) = cos(2x) + sin(2y)$. Для візуалізації контурного графіка використати палітру hot.

8. Знайти розподіл температури в області на рис.7.5. Границі області теплоізольовані, а краї отвору, розміщеного в центрі області, нагріваються. Всередині області немає розподілених джерел тепла. Для візуалізації обрати палітру jet.

9. Для еліптичного рівняння загального вигляду знайти розв'язок у прямокутнику з центром на початку координат, висотою 1 і шириною 2 при f=10. На границях поставити умову Дирихле, права частина якого залежить від координат: $x^2 + y^2$. Для візуалізації контурного графіка використати палітру jet.

10. Розв'язати еліптичне рівняння $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-5\pi^2 \sin \pi x \cdot \sin 2\pi y$ в прямокутнику з центром на початку координат, висотою 1 та шириною 2. На сторонах прямокутника поставити однорідні умови Дирихле. Для візуалізації контурного графіка використати палітру bone.

11. На кінцях однорідного ізотропного стрижня довжиною l підтримується нульова температура. Вважаючи, що стінки стрижня теплоізольовані від оточуючого середовища, знайти закон розподілу температури в стрижні, якщо відомо, що в початковий момент часу є такий розподіл температури $u(x,0)=u_0\frac{x(l-x)}{l^2}$, де l=2, u_0=0.4, $t_{max}=1.5$.Для візуалізації використовувати палітру jet.

12. Знайти розв'язок рівняння Лапласа $\Delta u \equiv u_{xx}+u_{yy}=0$ в області $D=\{(x,y)|\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}$, що задовольняє таким крайовим умовам: $u(0,y)=y(1-y)$, $u(1,y)=\frac{\partial u(x,0)}{\partial y}=\frac{\partial u(x,1)}{\partial y}=0$. Для візуалізації обрати палітру jet.

13. Знайти розподіл температури у прямокутнику $D=\{(x,y)|\ 0\le x\le 2,\ 0\le y\le 1\}$, якщо на границі прямокутника підтримується задана температура: $u(x,0)=u(x,1)=0$, $u(0,y)=y(1-y)$, $u(2,y)=\sin(\pi y)$. Для візуалізації використовувати палітру jet.

14. Знайти розподіл температури в прямокутнику $D=\{(x,y)|\ 0\le x\le a,\ 0\le y\le b\}$, якщо на границі прямокутника підтримується задана температура: $u(x,0)=u(x,b)=0$, $u(0,y)=y(b-y)$, $u(a,y)=\sin(\pi y/b)$. Взяти a=1, b=a/2. Для візуалізації обрати палітру jet.

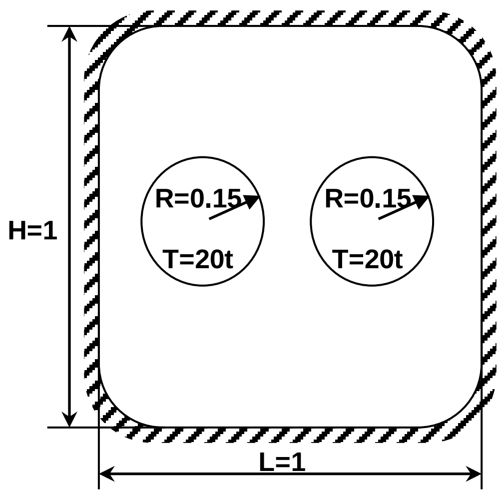

Рис. 7.6. Розподіл температури в області з округленими кутами

15. Для нестаціонарної задачі розподілу тепла в області (рис.7.6) розглянути зміну температури протягом 10 с (отримати в окремому вікні динамічний розподіл температури в області з кроком 0.5). Границі області теплоізольовані, а краї отворів

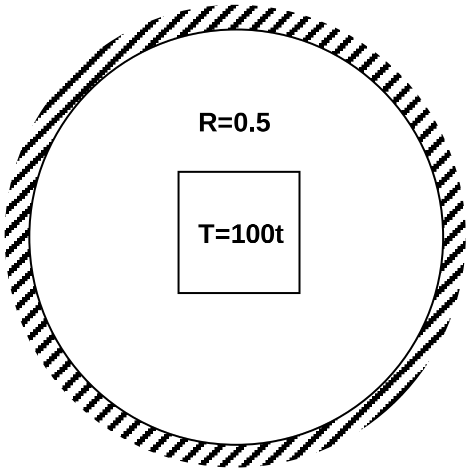

Рис.7.7. Розподіл температури у круглій області

нагріваються, температура змінюється лінійно у часі. Всередині області немає розподілених джерел тепла, в початковий момент часу температура дорівнює нулю в усій області. Для візуалізації обрати палітру jet.

16. Знайти розподіл температури в області на рис.7.7. Границі області теплоізольовані, а краї отвору, розміщеного в центрі області, нагріваються. Всередині області немає розподілених джерел тепла. Для візуалізації використати палітру jet.

17. Розв'язати рівняння $\nabla^2 u = 4u$ в області $R = \{(x,y): 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 0.5\}$ з граничними значеннями $u(0,y) = u(1,y) = 0$, $u(x,0) = u(x,0.5) = sin(\pi x) + sin(2\pi x)$. Для візуалізації контурного графіка обрати палітру hot.

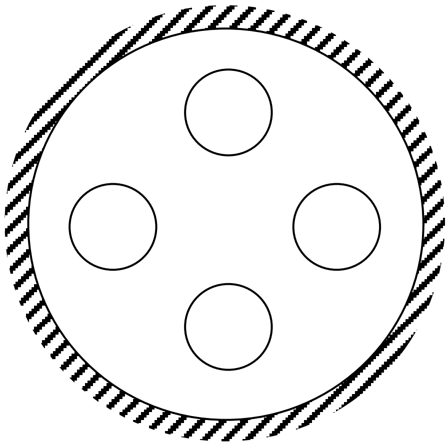

Рис.7.8. Розподіл температури у круглій області

18. Розв'язати рівняння $\nabla^2 u = -4y$ в області $R = \{(x,y): 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 0.5\}$ з граничними значеннями $u(0,y) = u(1,y) = 0$, $u(x,0) = u(x,0.5) = 1.5 - 1.5x$. Для візуалізації контурного графіка обрати палітру jet.

19. Знайти розподіл температури в області радіусу 0.5 (рис.7.8). Границі області теплоізольовані, а краї отворів, радіус яких 0.1, нагріваються (T=10t). Всередині області немає розподілених джерел тепла. Для візуалізації обрати палітру jet.

20. Розв'язати рівняння Пуасона $\nabla^2 u = 3$ в прямокутнику $R = \{(x,y): 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$ з граничними умовами: $u(x,0) = x$ і $u(x,1) = x^2$ для $0 \le x \le 1$, та $u(0,y) = y$ і $u(1,y) = y^2$ для $0 \le y \le 1$. Для візуалізації контурного графіка обрати палітру jet.

21. Розв'язати рівняння $\nabla^2 u = -y$ в області $R = \{(x,y): 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 0.8\}$ з граничними значеннями $u(0,y) = u(1,y) = 0$, $u(x,0) = 1.5 - 1.5x$, $u(x,0.8) = x$. Для візуалізації контурного графіка обрати палітру hot.

22. Розв'язати еліптичне ДР зі змінною правою частиною $\nabla \cdot \nabla u = -\left(x^2 + y^2\right)$. (Область є колом одиничного радіусу з центром на початку координат, на границі якого задана умова Дирихле u=1). Для візуалізації контурного графіка обрати палітру hot.

3. Контрольні питання

1. Які ДР називаються ДР в частинних похідних? За допомогою чого вони розв'язуються в MatLab?

2. Наведіть алгоритм розв'язання ДР в частинних похідних в MatLab.

3. Які основні правила задання структури області, складеної з геометричних примітивів?