4. (10) Вертикальний циліндр з адіабатичними стінками розділено рухомим теплопровідним поршнем на дві частини (верхню і нижню) з об'ємами V_1та V_2. В кожній частині знаходиться по 1 молю повітря при однаковій температурі T. Циліндр перевертають до гори ногами. Знайти зміну ентропії в системі, коли вона знов прийде у рівноважне становище. Вважати, що теплоємністю поршня можна знехтувати та різниця об'ємів V_1- V_2 є невеликою порівняно з V_1та V_2.

Розв'язок

Що взагалі буде відбуватись: одразу після перевороту циліндру - система буде в нерівноважному стані, вгорі буде об'єм V_2, а внизу об'єм V_1. Сила тяжіння почне опускати поршень виконуючи роботу і так як система теплоізольована вся ця робота піде на зміну внутрішньої енергії - підвищення температури. Через зміну температури поршень опуститься не до початкового стану.

Так як за умовою різниця об'ємів не велика в порівнянні з самими об'ємами є сенс ввести малу величину $\Delta V = \frac{V_1 - V_2}{2}$ і $V = \frac{V_1 + V_2}{2}$ та для кінцевого стану $\Delta V' = \frac{V_1' - V_2'}{2}$ і через те що загальний об'єм не змінюється $V' = V = \frac{V_1' + V_2'}{2}$. Тоді наприклад $V_1 = V + \Delta V$.

В кожній частині по одному молю ідеального газу тому:

$$\begin{aligned} P_1 V_1 = RT \\ P_2 V_2 = RT \end{aligned} \tag{1.1}$$

Поршень підтримується різницею тисків:

$$mg = S(P_2 - P_1) = S\left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1}\right)RT \approx S\frac{2\Delta VRT}{V^2} \tag{1.2}$$

де S - площа перерізу циліндру.

Як вже зазначили робота яку виконає сила тяжіння піде на зміну внутрішньої енергії:

$$mg\Delta x = 2C_V(T' - T) \tag{1.3}$$

через Δx позначено на скільки опуститься поршень від моменту коли його тільки перевернули до моменту коли встановилась термодинамічна рівновага.

Тепер треба визначити як обрахувати зміну ентропії. Так як початковий стан (після перевороту) буде не рівноважним, то перехід до кінцевого стану є не рівноважним процесом, але зміну ентропії можна обрахувати за допомогою оберненого рівноважного процесу який приведе систему з стану з кінцевим значенням термодинамічних параметрів до початкового стану термодинамічних параметрів. Таким процесом може бути ізотермічне стиснення поршнем від V_2' до V_2 та відповідно $V_1' \to V_1$, після чого можна ізохорно понизити температуру до початкового значення T.

$$\begin{aligned} \Delta S = -\int \frac{dQ}{T} = -\frac{\int_{V_1'}^{V_1} dA_1 + \int_{V_2'}^{V_2} dA_2}{T'} - \int_{T'}^{T} \frac{dU}{T} = -R\int_{V'}^{V_1} \frac{dV}{V} - R\int_{V'}^{V_2} \frac{dV}{V} - 2C_V \int_{T'}^{T} \frac{dT}{T} = \\ = -R\ln\frac{V_1 V_2}{V_1' V_2'} - 2C_V \ln\frac{T}{T'} \end{aligned} \tag{1.4}$$

тут ми використали рівняння стану (1.1). Перепишемо отримане значення через введені параметри $\Delta V, \Delta V', V$:

$$\Delta S = R\ln\frac{(V - \Delta V')(V + \Delta V')}{(V - \Delta V)(V + \Delta V)} + 2C_V \ln\frac{T + \Delta T}{T} = R\ln\frac{V^2 - \Delta V'^2}{V^2 - \Delta V^2} + 2C_V \ln\left(1 + \frac{\Delta T}{T}\right) \tag{1.5}$$

та використаємо наближення:

$$\Delta S = R\left(\frac{\Delta V'^2}{V^2} - \frac{\Delta V^2}{V^2}\right) + 2C_2\frac{\Delta T}{T} \tag{1.6}$$

Очевидно, що $\Delta x = \frac{\Delta V}{S} + \frac{\Delta V'}{S}$. Також з (1.2) випливає, що

$mg = \frac{SRT\Delta V}{V^2} = \frac{SRT'\Delta V'}{V^2} \Rightarrow T\Delta V = T'\Delta V'$

Це разом з (1.3) дає що $\Delta T = \frac{mg\Delta x}{2C_V} \approx \frac{mg2\Delta V}{S2C_V} = \frac{RT}{C_V}\frac{\Delta V^2}{V^2}$, тобто зміна температури не значна і відповідно $\frac{\Delta V - \Delta V'}{\Delta V} \ll 1$. Отримуємо $\frac{\Delta V}{\Delta V'} = 1 + \frac{\Delta T}{T} = 1 + \frac{R\Delta V^2}{C_V V^2}$. Підствимо це в формулу (1.6):

$$\Delta S = R\frac{\Delta V^2}{V^2}\left(-2\frac{\Delta T}{T}\right) + 2C_V\frac{R}{C_V}\frac{\Delta V^2}{V^2} \tag{1.7}$$

бачимо, що першим доданком можна нехтувати в порівняння з другим, тоді кінцева відповідь:

$$\Delta S = 2R\frac{\Delta V^2}{V^2} = \frac{R}{2}\frac{(V_1 - V_2)^2}{(V_1 + V_2)^2}$$