Вступ

Ідеї симетрії — одні з найглибших та плідних у природознавстві.

Ще за античних часів зародилися вчення про сумісності та пропорції. Ці ідеї явно та неявно були присутні в усіх природничо-філософських теоріях античності та середньовіччя. До середини 19 століття ідею симетрії розглядали як філософську категорію чи принцип світогляду, а не як самостійну науку у сучасному понятті. Лише з появою робіт Еваріста Галуа (1811 — 1832 р.р.) про роль перестанов в теорії алгебраїчних рівнянь, вірніше, з появою публікації Жордана, присвяченої теорії Галуа, через 40 років після його смерті, можна вважати приблизною датою виникнення цієї нової теорії і початком її самостійного існування.

Далі, Клейн Ф. вперше встановив зв'язок між симетріями великих багатогранників і групами перестанов. Він також запропонував ідею про те, що групи перетворень можна взяти за основу усіх різновидів геометрії, виявивши особливості кожного з них. Таким чином, було здійснено об'єднання між теорією груп, чисто алгебраїчною наукою, та симетріями геометричних об'єктів. В подальшому стверджувалось поняття того, що симетрія — це в першу чергу сукупність операцій, які зберігають точні алгебраїчні і геометричні співвідношення, і ця сукупність має структуру групи. Таким чином, ідея симетрії отримала математичне оформлення і відповідну термінологію.

Проникнення теоретико-групового мислення у фізику почалося на рубежі 19 і 20 століть. Цьому сприяли два видатні досягнення в двох різних областях природознавства — класифікації кристалів і кристалографічних симетрій Федорова і Шенфліса (1894 р.), та спеціальна теорія відносності Ейнштейна-Пуанкаре (1895 р.).

Становлення квантової теорії і квантової механіки йшло паралельно з розвитком теорії груп і теорії представлень. У роботах Гайзенберга і Дирака квантовомеханічні змінні були представлені як елементи асоціативної алгебри, які задовольняють деяким комутаційним співвідношенням, а стани системи — як вектори простору представлень цієї алгебри. Нова форма рівнянь квантової теорії вимагала і нового математичного апарату. На сьогодні теоретико-групові методи домінують в арсеналі математичних методів сучасної фізики, демонструють свою ефективність і універсальність в усіх галузях фізики.

Симетрія і її математичний апарат — теорії груп — виступають як принципово важливий евристичний принцип при побудові моделей нових явищ. Один з прикладів — відкриття унітарної асиметрії в сильних взаємодіях і виявлення на цій основі кваркової структури матерії. Це було зроблено в 60 роках минулого століття після того, як була відкрита нова характеристика елементарних часток — дивність. Група симетрії, що відповідає сильним взаємодіям, була визначена групою Su(3). Вона забезпечувала виконання збереження дивності і ізотонічного спіну. Застосування апарату теорії груп дозволило довести існування частки Ω^- (омега-мінус-гіперон), яку відкрили через декілька років.

Контакти фізики та теорії груп різноманітні.

Вже у 60 роках минулого століття для опису елементів симетрії кристалів були використані елементи представлення кінцевих груп, матричних груп, а також теорія прямих добутків цих представлень. На сучасному етапі взаємозв'язок з теоретичною фізикою означає використання апарату некласичних алгебр Лі, теорії когомології, нескінченновимірних афінних алгебр, квантових груп і алгебр.

У фізиці важливу роль відіграє поняття симетрії. Сукупність операцій симетрії складає групу. На основі вивчення цієї групи можна робити важливі висновки про властивості фізичних об'єктів. Наприклад, теорема Нетер встановлює той факт, що кожній симетрії відповідає певний закон збереження. Так, закон збереження енергії є результатом однорідності часу, закон збереження імпульсу випливає із однорідності простору, а закон збереження моменту імпульсу із ізотропності простору. Інші фізичні симетрії не настільки очевидні. У квантовій теорії поля існує поняття калібрувальних перетворень, які відповідають фундаментальним симетріям світу елементарних частинок. Сукупність фундаментальних частинок за сучасними уявленнями гомоморфна групам матриць із родини SU(n).

В кристалографії та хімії важливе значення мають операції симетрії, які описуються точковими й просторовими групами. Вивчення цих груп важливе для класифікації та визначення властивостей мінералів та молекул. Групи симетрії визначають, наприклад, структуру оптичних спектрів, спектрів раманівського розсіяння тощо.

Абстрактна теорія груп

Перетворення симетрії і фізика

Перетворюванням множини x є взаємно-однозначне відображення $f : x \to x$ цієї множини на себе, тобто таке відображення, для якого існує зворотне відображення $f^{-1} : x \to x$, при цьому $f^{-1} f = f f^{-1} = e$. Тут $f\, g$ означає добуток відображень, тобто послідовне виконання:

$$(fg)(x) = f(g(x)); x \in X$$

а e — тотожне перетворення: $e(x0 = x; x \in X$

Набір тих чи інших перетворень, що зберігають деякий об'єкт незмінним, може бути інтерпретований як сукупність його симетрій.

Наприклад, як <<виміряти>> симетричність не рівностороннього, рівнобедреного, або рівностороннього трикутника? Його можна виміряти тим, що число переміщень площини, що переводять трикутник в себе, різне для кожного з типів трикутників. Воно складається:

а) з одного тотожного перетворення (для різностороннього трикутника);

б) з тотожного перетворення і відображення відносно осі симетрії (для рівнобедреного трикутника);

в) з шести перетворень: тотожного, поворотів на 120^0, 240^0 навколо центра О і відображень відносно трьох площин симетрії (для рівностороннього трикутника).

Набір симетрій плоского візерунка складається з усіх переміщень площини, які переводять його в себе: із паралельного переносу ОА; паралельного переносу ОВ разом із дзеркальним відносно осі ОВ й усіх їх комбінацій.

Під симетрією молекули розуміється рухи простору, що суміщають кожний атом молекули із атомом того ж типу і які зберігають всі валентні зв'язки між атомами.

Велику міру симетрії має кристал, набір симетрій і перетворення симетрій кристала є його важливою характеристикою.

Симетрії можуть мати вирази алгебри або арифметики. Симетрією многочлена $F(x_1, x_2, \cdots x_n)$ називається перестановка невідомих $x_1 \cdots x_n$, що зберігає F.

Симетрію у фізиці розуміють як інваріантність (незмінність) фізичної системи відносно тих чи інших перетворень, які здійснюються над нею. Самі перетворення — це елементи симетрії чи просто симетрії.

Симетрія фізичних законів є їх найважливішою характеристикою. Під цим мається на увазі перетворення координат, при якому рівняння цього закону є інваріантними (незмінними) відносно такого перетворення. Зокрема, закони механіки повинні зберігатися при переході від однієї інерціальнії системи координат до іншої. Відповідні перетворення мають у механіці Галілея-Ньютона вид (при русі по прямій): $x' = x - vt; t' = t$, а в механіці СТВ це

$$x'' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; t' = \frac{t - v/c^2\, t}{\sqrt{1 - v^2/c}}$$

\Просторово-часові симетрії виражають таким чином найбільш загальні закони природи, пов'язані з властивостями простори і часу, при цьому залишається незмінним функціонал дії.

Перетворення симетрії можна розділити на дискретні і неперервні.

Неперервні перетворення.

До неперервних можна віднести такі перетворення:

1) Трансляції в просторі — переміщення фізичної системи як цілого на деякий вектор, при цьому незмінність фізичних законів при довільних трансляціях системи в просторі є вираження принципу однорідності простору, тобто еквівалентність усіх його точок. Наслідком цього є закони збереження імпульсу замкненої системи (зміна початку відліку координат).

2) Зміна початку відліку часу (безперервна трансляція часу). Симетрія, що відноситься до такого перетворення, означає однорідність часу, а наслідком є закон збереження енергії.

3) Обертальна інваріантність є вираження ізотропії простору, наслідком чого є закон збереження моменту імпульсу.

Дискретні перетворення.

Дискретними просторовими перетвореннями є перетворення симетрії в кристалах. Елементами цих перетворень є кінцеві трансляції і ортогональні перетворення 3-мірного евклідового простору, при яких кристалічна структура суміщається сама з собою.

Більшість фізичних систем мають певну просторову або часову симетрію. Часто дослідження однієї тільки симетрії дає можливість зробити важливі висновки, не вимагаючи при цьому точного знання законів фізики. Тоді і корисно проводити дослідження, що спираються лише на властивості симетрії системи. Такі дослідження доцільно проводити методами теорії груп. У квантовій механіці її застосування найцікавіші. Квантова механіка великою мірою спрощується за наявності симетрії, наданням хвильової функції частки.

Хвильова функція відображує симетрію фізичної системи при різних перетвореннях координат. Наприклад, якщо частка знаходиться у полі з потенціалом $U(x)$, потенціал може бути інваріантним відносно перетворення $x \to (-x)$, тобто $U(x) = U(-x)$. Для 3-мірного випадку потенціал може мати сферичну симетрію, тобто мати вигляд $U(r)$ і не залежати від кута. Такий потенціал інваріантний відносно будь-якого перетворення повороту на будь-який кут навколо довільної осі, що проходить через початок координат. Число таких перетворень нескінченне. Приклад: пов'язані стани багато-часткових квантових систем описують власними функціями відповідного Гамільтоніана:

$$HU = \lambda U$$

з відповідними граничними умовами. Вид Гамільтоніана H залежить від характеру взаємодії часток системи між собою і з зовнішніми полями. Нехай оператор H інваріантний відносно деяких лінійних перетворень у 3-мірному просторі. Це є перетворення симетрії, якщо всі властивості системи, що описуються рішенням рівняння, однакові як для початкової, так і для перетвореної системи. Власні функції оператора H також будуть інваріантні відносно цих же перетворень, якщо, зокрема, це перетворення парності (непарності). В загальному випадку відповідь на це питання дає представлення груп симетрії.

Таким чином, знання симетрії дозволяють дати природну класифікацію власних значень енергії власних функцій і отримати представлення про характер спектра Гамільтоніана, що досліджується.

Перетворення симетрії і елементи симетрії скінченних систем. Визначення групи

Розглянемо симетрію тіла скінченого розміру. Вона визначається сукупністю тих переміщень, які суміщають тіло з самим собою. Такі переміщення називаються перетвореннями симетрії або операціями симетрії. Існують три основні типи перетворення:

1. Поворот тіла на певний кут навколо деякої осі.

Якщо тіло суміщається саме з собою при повороті навколо деякої осі на кут $\frac{2\pi}{n}$, то така вісь називається віссю симетрії n-го порядку. Якщо n=1, то виконується тотожне перетворення. Операцію повороту навколо даної осі на кут $\frac{2\pi}{n}$ символічно позначають C_n. Поворот на кут $p\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ позначають $C_n^p = C_{n/p}$, при цьому $C_n^n = E$ — тотожне перетворення.

2. Дзеркальне відображення в деякій площині.

Якщо суміщення тіла з самим собою відбувається при дзеркальному відображення в деякій площині, ця площина називається площиною симетрії і вона позначається σ. Подвійне дзеркальне відображення позначається σ^2. Очевидно, що $\sigma^2 = E$ (E — тотожність). В цьому випадку елемент симетрії — площина дзеркального відображення, операція симетрії — відображення в площині.

Комбінація (одночасне застосування) двох перетворень — повороту і відображення — призводить до дзеркально-поворотних осей. Тіло має дзеркально-поворотну площину n-го порядку, якщо воно суміщається з самим собою при повороті навколо цієї вісі на кут $\frac{2\pi}{n}$ і подальшому відображенні в площині, перпендикулярній осі σ_h. В цьому випадку у σ з'являється індекс h.

Дзеркально-поворотне перетворення позначають символом S_n. Очевидно, що $S_n = C_n\sigma_h = \sigma_h C_n$. Для n=2 парного з'являється новий вид симетрії. Для n=2 перетворення S_2 — перетворення інверсії I, точка $P_1 \to P'$, тіло має центр інверсії, $I = S_2 = C_2\sigma_2$. Сукупність всіх перетворень симетрії певного об'єкта складає деяку сукупність, множину перетворень, замкнену відносно набору операцій перетворення.

3. Паралельне перенесення (трансляція) тіла на деяку відстань.

До операцій симетрії відносяться також перестанови ти зсуви, переходи між інерційними системами відліку, зміни масштабування і перенормування, інверсія часу, заміна частинок античастинками та інше. Для того, щоб ці перетворення були зрозумілими, необхідно знати, як влаштована безліч перетворень симетрії будь-якого об'єкту, тобто в найзагальнішому випадку абстрактна математична множина, елементи якої взаємопов'язані так само, як операції симетрії, що послідовно виконуються. Іншими словами, потрібно знати основні співвідношення алгебри теорії груп і уявляти, як і навіщо вони застосовуються в реальних системах. Симетрія фізичної системи заснована на ідентичності її складових частин. В багатьох випадках дослідження моделі симетрії значно спрощують опис фізичних систем. На цьому засновано більшість сучасних додатків теорії груп. Симетрія широко використовується для опису деяких фізичних дисциплін — атомної фізики, фізики твердого тіла,. Тому знання теорії груп допомагає сприйняти фундаментальні фізичні теорії.

Таким чином, під симетрією системи розуміється інваріантність її властивостей відносно будь-яких перетворень (інваріантність рівнянь руху, інваріантність форми чи відстані її елементів), чи відносно деякої сукупності перетворень. При цьому, якщо властивість інваріантна відносно перетворень A і B, то воно інваріантне і відносно перетворень C, яке є результатом послідовного застосування перетворень A і B: $C = AB$, тобто перетворення симетрії повинні бути відносно операцій перетворення. Така сукупність називається групою перетворень симетрії фізичної системи.