Конечномерные представления групп. Матричные представления

Нами рассмотрены абстрактные группы, введена аксиоматика групповых соотношений, алгебра групп. Рассмотрим соотношения между элементами группы и преобразованиями векторного пространства. Вопрос здесь можно поставить следующим образом: как свойства и групповые соотношения абстрактно заданной группы могут быть охарактеризованы посредством групп линейных преобразований векторного пространства.

Один из способов решения этого вопроса заключается в гомоморфном (в частности, изоморфном) отображении абстрактной группы на подгруппу или на всю группу линейных преобразований пространства. Отсюда вытекает понятие представления данной группы с помощью подгруппы группы линейных преобразований линейного пространства.

1^{o}. Пусть L есть произвольное n-мерное линейное пространство. Пусть есть некоторая конечная группа G с элементами $g_1, g_2, \cdots g_m$. Рассмотрим в L какую-либо группу линейных операторов *T*, действующих из $L \to L$ с обычной операцией умножения между операторами: $T'T''x = T'(T''x)$ для $\forall x \in L, \forall T', T'' \in T$.

<u>Определение</u>. Пусть задан гомоморфизм группы G на группу T, $G \xrightarrow{\hom} T$, т.е. группа *T* линейных операторов в некотором пространстве *L* гомоморфна группе *G*. Тогда говорят, что группа T образует представление группы *G* в *L*.

Иными словами, если в векторном пространстве *L* можно найти группу T линейных операторов $T(g_a)$, которые соответствуют элементам g_a группы G в том смысле, что имеется линейное преобразование *T*, посредством которого каждому элементу $g_1, g_2, \cdots g_m$ этой группы ставится в соответствие линейное преобразование $T(g_a)$ из группы линейных оператор такое, что $\forall g_a, g_b \in G \quad T(g_{a)})T(g_b) = T(g_a g_b), T(E) = 1$, то такую группу Т называют представлением группы G в пространстве L. Из указанного определения очевидно, что в силу гомоморфизма, т.к. $T(g_a^{-1})T(g_a) = T(g_a^{-1} g_a) = T(E) = 1$, то, следовательно, каждый оператор $T(g_a)$ взаимно-однозначно отображает $L \to L$ и $T(g_a^{-1}) = T^{-1}(g_a)$.

Таким образом, представление группы G в пространстве L есть отображение T элементов g_a операторами $T(g_a)$ в векторном пространстве L. Если размерность пространства L равна n, то представление называют n-мерным, пространство L называют пространством представлений, а базис в этом пространстве называют базисом представления.

Представление $T(g_a)$ называют точным, если существует взаимно-однозначное соответствие (изоморфизм) между операторами $T(g_a)$ и групповыми элементами.

Гомоморфизм группы линейных операторов Т в некотором пространстве L и группы G означает, что каждому элементу группы G, $\forall g_a \in G$, соответствует только один (по определению гомоморфизма) элемент группы Т, $T(g_a)$, $g_a \to T(g_a); g_k \to T(g_k); g_n \to T(g_n)$, а каждому элементу группы Т соответствует несколько элементов группы G:

$$
\begin{array}{lll}
T(g_1) \to g_1 & T(g_2) \to g_2 & T(g_k) \to g_k \\
T(g_1) \to g_2 \ ; & T(g_2) \to g_3 \ ; \ \ldots\ldots. & T(g_k) \to g_{k+1} \\
T(g_1) \to g_3 & T(g_2) \to g_5 & T(g_k) \leftarrow g_{k+n}
\end{array}
$$

Это соответствие сохраняется при групповом умножении, т.е. это соответствие не есть взаимно-однозначное, причём групповое умножение выполняется пол правилам группы Т.

Итак, если группы Т линейных операторов $T(g_a)$ в некотором линейном пространстве L гомоморфна группе G, то группа Т образует представление группы G: между элементами Т – $T(g_a)$ – и элементами группы G – g_i – можно установить не взаимно однозначное соответствие, а между g_i и $T(g_a)$ устанавливается взаимно однозначное соответствие.

Таким образом, линейное представление группы G в конечномерном евклидовом пространстве L есть гомоморфизм этой группы на некоторое подмножество линейных преобразований этого пространства, представленных множеством ограниченных линейных операторов пространства L. Множество таких операторов образует в L группу.

2$^{\mathrm{o}}$. Выберем в пространстве L произвольный ортонормированный базис размерности n, т.е. будем считать, что L – n-мерное векторное ортонормированное пространство с базисом. Любой элемент $x \in L$ может быть разложен по ортам этого базиса: $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$. Для каждого линейного оператора $T(g_a)$, действующего из $L \to L$, его действие на произвольный элемент вектор x можно представить следующим образом:

$$T(g_a)x = \sum_k x_k T(g_a)e_k = \sum_k x_k \sum_j T_{jk}(g_a)e_j = \sum_j (\sum_k T_{jk} x_k) e_j = \sum_j x'_j e_j \ ,$$ где

$x'_j = \sum_k T_{jk} x_k$; $T(g_a)e_k = \sum_j T_{jk}(g_a)e_j$

Отсюда следует, что каждому элементу g_a группы G ставится в соответствие матрица $\|T_{jk}(g_a)\|$. Как было указано выше, каждому линейному оператору в заданном базисе линейного пространства L отвечает матрица этого оператора, также как и квадратной матрице, заданной в линейном пространстве с базисом, соответствует единственный линейный оператор, матрицей которого в этом базисе является матрица этого оператора. Т.е. группа операторов T изоморфна группе матриц $\|T_{jk}(g_a)\|$. Поэтому, если задано представление $g_a \to T(g_a), g_a \in G$, то соответствие $g_a \to \left\| T_{jk}(g_a) \right\|$ будет гомоморфизмом группы G на группу матриц $\left\| T_{jk}(g_a) \right\|$, т.е. группа матриц $\left\| T_{jk}(g_a) \right\|$ гомоморфна группе G.

<u>Определение</u>. Пусть задан гомоморфизм группы G на какую-либо группу матриц $\left\| T_{jk}(g_a) \right\|$, $g_a \in G$, $\left\| T_{jk}(g_a) \right\| \in \left\| T_{jk} \right\|$, т.е. группа матриц $\left\| T_{jk} \right\|$ гомоморфна группе G. Тогда говорят, что группа матриц $\left\| T_{jk} \right\|$ образует матричное представление группы G. Размерность матриц называют размерностью представления.

Так как каждую матрицу в n-мерном пространстве L с базисом можно рассматривать как матрицу некоторого оператора $T(g_a)$ в этом базисе, и группы T и $\left\| T_{jk} \right\|$ изоморфны, то определения преставления с помощью матриц и с помощью оператора эквивалентны, и можно пользоваться любым из них.

3°. Как и должно быть, матрицы $T(g_a)$ должны удовлетворять соотношению обычного матричного умножения: $T(g_a)T(g_b) = T(g_a g_b)$. Докажем это.

Действительно, как следует из применения к орту e_k последовательно двух операторов $T(g_a)$ и $T(g_b)$, имеем:

$$T(g_a)e_k = \sum_j T_{jk}(g_a)e_j \text{ ; } T(g_a)T(g_b)e_k = T(g_f)\sum_j T_{jk}(g_b)e_j = \sum_j T_{jk}(g_b)T(g_a)e_j =$$

$$= \sum_j T_{jk}(g_b)\sum_r T_{rj}(g_a)e_r = \sum_r \left(\sum_j T_{rj}(g_a)T_{jk}(g_b) \right) e_r = \sum T_{rk}e_r$$

Видно, что матрица произведений операторов есть обычное произведение матриц.

С другой стороны:

$$T(g_a)T(g_b)e_k = T(g_a g_b)e_k = \sum_r T_{rk}(g_a g_b)e_r$$

Отсюда следует, что

$\sum_r \left(\sum_j T_{rj}(g_a) T_{jk}(g_b) \right) = \sum_r T_{rk}(g_a g_b)$, что означает, что $T(g_a)T(g_b) = T(g_a g_b)$, и матричный элемент $T_{rk}(g_a g_b) = \sum_j T_{rj}(g_a) T_{jk}(g_b)$.

При практических расчётах для вычисления матричного элемента используют ортонормированность базиса.

Приводимые и неприводимые представления

Пусть в пространстве L определён некий оператор T, осуществляющий представление $T(g_a)$ группы G в этом пространстве. Подпространство $L' \subset L$ называется инвариантным подпространством относительно представления $G \to T(g_a)$, если для $\forall x' \in L'$ и для $g_a \in G$ выполняется $T(g_a)x' \in L'$. Иными словами, подпространство называется инвариантным отношению к преобразованиям, индуцированным группой G, если действия оператора T на элементы этого подпространства не выводят нас из этого подпространства: $\forall x' \in L'$ получаем $T(g_a)x' \in L'$ ($L' \subset L$).

Очевидно, нулевое пространство и всё пространство дают примеры тривиальных инвариантных подпространств. Сумма и пересечение инвариантных подпространств – инвариантное подпространство.

Покажем, что если известно инвариантное подпространство L', то можно упростить матрицу представления, поместив в L' несколько базисных векторов. Пусть $e_1, e_2, \cdots e_k \in L'$ Тогда их образы тоже принадлежат L' и могут быть разложены по этим же базисным векторам. Пусть $e_1 \cdots e_n$ – базис всего пространства L, а векторы $e_1 \cdots e_k$, $k \le n$ выберем в качестве базисных в L'. Тогда:

$$e_1' = Ae_1 = A_{11}e_1 + A_{21}e_2 + \cdots + A_{k1}e_k + (A_{k+1,1} = 0)e_{k+1} + \cdots + (A_{n1} = 0)e_n$$

$$e_2'' = Ae_2 = A_{12}e_1 + A_{22}e_2 + A_{32}e_3 + \cdots + A_{k2}e_k + (A_{k+1,2} = 0)e_{k+1} + \cdots + (A_{n2} = 0)e_n$$

…………………………………………………………………………………

…..

$$e_k' = Ae_k = A_{1k}e_1 + A_{2k}e_2 + \cdots + A_{kk}e_k + (A_{k+1,k} = 0)e_{k+1} + (A_{k+2,k} = 0)e_{k+2} + \cdots + (A_{nk} = 0)e_n$$

$$e_{k+1}' = Ae_{k+1} = A_{1,k+1}e_1 + A_{2,k+1}e_2 + A_{k+1,3}e_3 + \cdots + A_{k,k+1}e_k + A_{k+1,k+1}e_{k+1} + \cdots + A_{n,k+1}e_n$$

…………………………………………………………………………………

………

$$e_n' = Ae_n = A_{1n}e_1 + A_{2n}e_2 + \cdots + A_{kn}e_k + A_{k+1,n}e_{k+1} + \cdots + A_{nn}e_n$$

Т.е. для $\forall e_i$, где i=1…k $e_i'' = ae_i \in L'$, а для $\forall e_i, i = k+1 \cdots n \;\; Ae_i = 0$

Если пространство L конечномерное и в нём выбран базис $\{e_n\}$, а в L' – базис $\{e_k\}$, т.е. из n первых ортов $\{e_n\}$, $k \le n$, то инвариантность L' относительно представления $T(G)$ группы G означает, что каждый оператор $T(g_a)$, $\forall g_a \in G$, записывается в исходном базисе $\{e_n\}$ матрицей вида:

$$T(g_a) = \left(\begin{array}{c|c} A(g_a) & C(g_a) \\ \hline 0 & B(g_a) \end{array}\right)$$

в которой k строк нулей, а в матрице $B(g_a)$ – (n-k) строк, т.к. первые k базисных векторов из L попадают в L', а векторы от e_{n+1} до e_n не попадают в L', но остаются в L.

Рассмотрим, почему матрица оператора $T(g_a)$ имеет вид треугольной матрицы. Таблица коэффициентов оператора A, или матрица оператора, имеет вид:

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{k1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{k2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1k} & A_{2k} & \cdots & A_{kk} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ A_{1,k+1} & A_{2,k+1} & \cdots & A_{k,k+1} & A_{k+1,k+1} & A_{k+2,k+1} & \cdots & A_{n,k+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{kn} & A_{k+1,n} & A_{k+2,n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

По определению, в матрице $\|a_{ik}\|$ число a находится в i-ой строке и k-столбце, т.е. индекс i – это номер строки, индекс k – номер столбца. Поэтому матрица представления, или, в данном случае, матрица преобразования одного базиса в другой, является транспонированной матрицей полученной выше матрицы, в соответствии с данным выше определением матрицы:

$$A=\left(\begin{array}{cccc|ccc} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1k} & A_{1,k+1} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2k} & A_{2,k+1} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{k1} & A_{k2} & \cdots & A_{kk} & A_{k,k+1} & \cdots & A_{kn} \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & A_{k+1,k+1} & \cdots & A_{k+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & A_{n,k+1} & \cdots & A_{nn} \end{array}\right)$$

Мы пришли к понятию приводимости представления, где матрица представления имеет более простой вид, «приводится» при некотором преобразовании.

Дадим общее определение приводимости представления.

Определение. Пусть в пространстве L размерности n задано представление T группы G. Если в пространстве L существует хотя бы одно нетривиальное подпространство L_1 размерности k<n, инвариантное

относительно всех преобразований Т, т.е. если для $\forall x \in L_1 \quad Tx \in L_1$, то представление называется приводимым. Таким образом, матрица приводимого представления в исходном базисе принимает вид:

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} T_{11} & T_{12} & \cdots & T_{1k} & T_{1,k+1} & \cdots & T_{1n} \\ T_{21} & T_{22} & \cdots & T_{2k} & T_{2,K=1} & \cdots & T_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ T_{k1} & T_{k2} & \cdots & T_{kk} & T_{k,k+1} & \cdots & T_{kn} \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & T_{k+1,k+1} & \cdots & T_{k+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & T_{n,k+1} & \cdots & T_{nn} \end{array}\right)$$

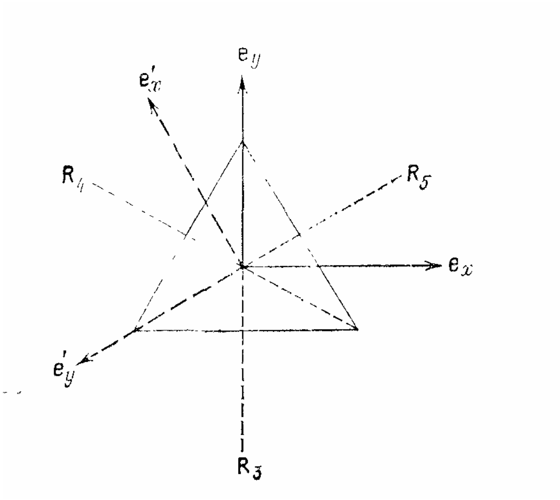
т.е. имеет блочно-треугольную структуру.

Если же в пространстве L нельзя выделить инвариантное подпространство, представление называется неприводимым.

Вопрос о приводимости связан с вопросом об описании данного представления с помощью более простых представлений, которые имеют меньшую размерность, т.е. речь идёт о выборе базиса путём его преобразования операторами из группы представления конечной группы, в котором (в новом базисе) матрица его упрощается, и имеет меньший ранг, или распадается на более простые матрицы.

Казалось бы, исходя из всё более сложного функционального пространства, можно получить матричные представления всё более возрастающего размера, т.е. изучение возможных представлений даже в простейших случаях – дело сложное. Однако, здесь на помощь приходят свойства групповых представлений: все представления конечных групп можно построить из конечного числа неприводимых преставлений.

Пример Рассмотрим пример представления, установим его физический смысл на примере группы D_3. Для неё построим матричное представление. Точное представление получится, если записать соответствующие каждой операции преобразования в обычном 3-мерном пространстве. Выберем базисные векторы e_x, e_y согласно рисунку, e_z – перпендикулярно плоскости (xy). Пусть R_1 – оператор поворота на 120^o вокруг оси z. Тогда отображение этого элемента группы примет вид:



$$T(R_1)e_x = e'_x = -e_x\cos 60^0 + e_y\cos 30^0 = -\frac{1}{2}e_x + \frac{\sqrt{3}}{2}e_y$$

$$T(R_1)e_y = e'_y = -e_x\cos 30^0 - e_y\cos 60^0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}e_x - \frac{1}{2}e_y$$

$$T(R_1)e_z = e'_z = e_z$$

Или:

$$e'_x = T(R_1)e_x = T_{11}e_x + T_{21}e_y + T_{31}e_z = -\frac{1}{2}e_x + \frac{\sqrt{3}}{2}e_y + 0\cdot e_z$$

$$e'_y = T(R_1)e_y = T_{12}e_x + T_{22}e_y + T_{32}e_z = -\frac{\sqrt{3}}{2}e_x - \frac{1}{2}e_y + 0\cdot e_z$$

$$e'_z = T(R_1)e_z = T_{13}e_x + T_{23}e_y + T_{33}e_z = 0\cdot e_x + 0\cdot e_y + 1\cdot e_z$$

Матрица преобразования (представления) имеет таким образом вид:

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Матричные элементы также можно найти из соотношения: $T_{ji}(g_a) = (e_j, T(g_a)e_i$

Какова размерность представлений оператора R_1? Она равна трём. Из вида матрицы вытекает, что построенная из первых двух строк и столбцов матрица 2х2 образует двумерное представление, а элемент, расположенный на пересечении третьей строчки и третьего столбца образует представление размерности единица. Это возможно, поскольку равны нулю элементы, расположенные на пересечении первых двух столбцов с третьей строчкой, и первых двух строк с третьим столбцом. Если говорить о векторном пространстве, это означает, что дав вектора, e_x, e_y, порождают инвариантное подпространство, а один вектор, e_z, порождает второе инвариантное векторное подпространство, ортогональное первому. Тогда говорят, что трёхмерное представление приводится к сумме двумерного и одномерного представлений. Очевидно, что представление не может быть дальше приведено дальше, а двумерное также неприводимо: невозможно выбрать новые базисные векторы $e_1 = \alpha e_x + \beta e_y; e_2 = \beta e_x + \alpha e_y$, такие, чтоб матричные элементы T_{21} и T_{22} в этом новом базисе обращались в ноль для всех преобразований R_α из группы D_3. Представления, которые нельзя привести, упростить, называются неприводимыми.

Унитарные представления в пространстве со скалярным произведением

В приложениях часто используют унитарные представления, которые возникают в теории поля, квантовой механике, физике твёрдого тела. Здесь возможны некоторые упрощения. Ясно, что унитарные представления осуществляются унитарными операторами.

Пусть L_1 – инвариантное подпространство пространства L относительно преобразований $T(g_a)$, индицированных группой G с элементами g_a. Пусть L_2 – ортогональное дополнение L_1, т.е. это подпространство, каждый элемент x_2 которого ортогонален каждому элементу x_1 подпространства L_1, т.е., если $\forall x_1 \in L_1, \forall x_2 \in L_2$, то $(x_1 \cdot x_2) = 0$, а $L = L_1 \oplus L_2$, т.е. раскладывается в прямую сумму подпространств. (см. параграф 2, гл. 4, Ильин, Поздняк). Существенно, что L_2 является ортогональным дополнением. В этом случае, если операторы $T(g_a)$ унитарны, то ортогональное дополнение L_2 подпространства L_1 также инвариантно относительно преобразований $T(g_a)$. Докажем это.

Пусть $x \in L_1, y \in L_2$, $L = L_1 \oplus L_2$. В силу ортогональности $(x, y) = 0$. В силу инвариантности L_1, т.к. $T(g_a)x \in L_1$, имеем: $\left(T(g_a)x, y\right) = 0$. Если $T^+(g_a)$ – сопряжённый оператор, то поэтому $\left(T(g_a)x, y\right) = \left(x, T^+(g_a)y\right) = \left(x, T^{-1}(g_a)y\right) = \left(x, T(g_a^{-1})y\right) = 0$, т.к. для унитарного представления, индицированного унитарным оператором $T^+ = T^{-1}$; $TT^+ = E$, унитарный оператор – сопряжённый оператор, для которого $(Ax, y) = (x, A^+y)$. Отсюда, следует, что векторы $T^+(g_a)y$ и $T^{-1}(g_a)y$ – ортогональны векторам x, и эти векторы $x \in L_2$. А в свою очередь следует, что L_2 – инвариантное подпространство относительно преобразований $T(g_a)$, т.к., если g_a пробегает всю группу, то g_a^{-1} также пробегает всю группу. Поэтому $\forall T(g_a^{-1})y \in L_2$, и, следовательно, $T(g_a)y \in L_2$, и это выполняется для всех матриц рассматриваемого представления, и инвариантность L_2 для оператора $T(g_a)$ доказана. Пространство представлений L раскладывается в прямую сумму $L = L_1 \oplus L_2$. Если теперь в n-мерном пространстве в качестве первых k ортов выбрать орты подпространства L_1, в качестве последних n-k ортов – орты подпространства L_2, его ортогонального дополнения, то матрица представления будет иметь следующий квазидиагональный вид:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}
T_{11} & T_{12} & \cdots & T_{1k} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
T_{21} & T_{22} & \cdots & T_{2k} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
T_{k1} & T_{k2} & \cdots & T_{kk} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\hline
0 & 0 & \cdots & 0 & T_{k+1,k+1} & T_{k+1,k+2} & \cdots & T_{k+1,n} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & T_{k+2,k+1} & T_{k+2,k+2} & \cdots & T_{k+2,n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & T_{n,k+1} & T_{n,k+2} & \cdots & T_{nn}
\end{array}\right)$$

В самом деле, пусть $T:G \to T(g_a)$ – конечномерное линейное представление группы G в L; L_1, L_2 – инвариантные подпространства , являющиеся ортогональным дополнением друг друга (дополнительными), $L = L_1 \oplus L_2$. Выберем базис подпространства L_1 в виде $\{e_k\}$, а базис подпространства L_2 в виде $\{e_{k+1},...e_n\}$. Их объединение $\{e_1 \ldots e_n\}$и будет базисом пространства L. В таком базисе операторы $T(g_a), \forall g_a \in G$ запишутся матрицами вида:

$$\left(\begin{array}{c|c}
T_1(g_a) & 0 \\
\hline
0 & T_2(g_a)
\end{array}\right)$$

где $T_1(g_a)$ – матрица оператора $T(g_a)$ в базисе $\{e_k\}$, а $T_2(g_a)$ – матрица оператора $T(g_a)$ в базисе $\{e_{k+1},...e_n\}$. Линейное представление $T:G \to T(g_a)$ называется вполне приводимым, если для $\forall L_1 \subset L$ инвариантного подпространства существует его ортогональное дополнение (дополнительное подпространство), при этом $L = L_1 \oplus L_2$, $L_2 \subset L$. Отсюда следует, что всякое неприводимое представление вполне приводимо.

1^o. В самом деле, для любого неприводимого представления есть только два инвариантных подпространства: всё пространство представления и нулевое подпространство. Эти два подпространства являются ортогональными дополнениями друг друга. Следовательно, для каждого инвариантного подпространства есть его ортогональное дополнение, которое тоже является инвариантным подпространством, что и требовалось доказать.

2^o. То же самое справедливо и относительно унитарного (ортогонального) представления: всякое унитарное (ортогональное) представление вполне приводимо. Докажем это. Пусть $T: G \to T(g_a)$ – унитарное представление группы G, $L_1 \subset L$ – произвольное инвариантное подпространство. Пусть L_2 – ортогональное дополнение L_1, т.е. $L = L_1 \oplus L_2$. Для $\forall g_a \in G$ оператор $T(g_a)$ – инвариантный оператор и $T(g_a)x_1 \in L$ для $\forall x_1 \in L_1$ Выше мы доказали, что L_2 в этом случае тоже является инвариантным дополнением, т.е. $\forall x_2 \in L_2$ $T(g_a)x_2 \in L_2$. Следовательно, L_2 – инвариантное подпространство, а, следовательно, L – вполне приводимо.

Теорема об унитарности

Имеет место следующая теорема: всякое представление (вещественное или комплексное) конечной группы является унитарным (ортогональным).

Пусть $T(g_a)$ – линейное представление группы G в пространстве L, т.е T: $G \to T(g_a)$. Пусть для любых $x, y \in L$ (x, y) есть скалярное произведение в L. Построим скалярное произведение вида $(x, y)' = \sum_{g_a \in G} \big(T(g_a)x, T(g_a)y\big)$ Легко проверить, что полученное скалярное произведение сохраняется при действии оператора $T(g_b), g_b \in G$:

$$\left(T(g_b)x, T(g_b)y\right)' = \sum_{g_a \in G}\left(T(g_a g_b)x, T(g_a g_b)y\right) = \sum_{g_c \in G}\left(T(g_c)x, T(g_c)y\right)$$

где $g_c = g_a g_b \in G$ в силу группового соотношения. Таким образом, каждый оператор $T_1(g_a)$, $\forall g_a \in G$ является унитарным относительно нового скалярного произведения $(x, y)'$ и поэтому представление $T(g_a)$ унитарно и относительно скалярного произведения (x, y).

Отсюда следует, что всякое представление конечной группы, как вещественное, так и мнимое вполне приводимо. Из приведенного рассмотрения следует, что унитарное представление группы всегда либо неприводимо, либо вполне приводимо.

Разложение приводимого представления на сумму неприводимых

В свою очередь, если в L_1 и L_2 существуют другие инвариантные подпространства, то процесс разложения можно продолжить, пока мы не получим прямую сумму инвариантных подпространств, в каждом из которых реализуются неприводимые представления $T(g_a)$ группы G. Такое представление тоже называется вполне приводимым.

Введём понятие суммы представлений. Пусть $L_1 \cdots L_k$ – линейные пространства, $L = L_1 \oplus L_2 \oplus \cdots \oplus L_k$ – их прямая сумма, так что каждый вектор $x \in L$ единственным образом представлен в виде суммы $x = x_1 + x_2 + \cdots + x_k$, где $\forall x_k \in L_k$. Пусть в каждом L_k задано представление $T^{(k)}(g_a)$ одной и той же группы G. Определим линейный оператор $T(g_a)$ в L, полагая $T(g_a)(x_1 + x_2 + \cdots + x_k) = T^{(1)}(g_a)x_1 + T^{(2)}(g_a)x_2 + \cdots + T^{(k)}(g_a)x_k$. Очевидно, $T(E) = 1, T(g_a g_b) = T(g_a)T(g_b)$ так что соотношение $G \to T(g_a)$ есть представление группы G в пространстве L. Представление $T(G)$ в пространстве $L = L_1 \oplus L_2 \oplus \cdots \oplus L_k$, определённое по вышеуказанному правилу, называется прямой суммой представлений $T^{(10}, T^{(2)}, \cdots T^{(k)}$: $T(g_a) = \sum^{(k)} T(g_a)$ или $T(g_a) = T^{(1)}(g_a) \oplus T^{(2)}(g_a) \oplus \cdots \oplus T^{(k)}(g_a)$. Очевидно, каждое L_k есть подпространство в L, инвариантное относительно $T^{(k)}(G)$. В свою очередь, $L_1 \oplus L_2$ инвариантны относительно представления $T^{(1)} \oplus T^{(2)}$ и т.д. В матричной записи сумма $T(g_a)$ конечномерных представлений $T^{(k)}(G)$: $G \to T(g_a)$, $k = 1 \cdots m$ можно представить следующим образом.

Пусть $\{e\}$ – базис пространства $L_1 \oplus L_2 \oplus \cdots \oplus L_k$, являющийся объединением базисов $\{e_k\}$пространств L_k. Тогда

$$T(g_a) = \begin{pmatrix} T^{(1)}(g_a) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & T^{(2)}(g_a) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & T^{(3)}(g_a) & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & T^{(k)}(g_a) \end{pmatrix}$$

т.е. матрица этого представления при таком выборе ортов имеет квазидиагональный вид, где вдоль диагонали расположены матрицы $T^{(k)}(g_a)$ в базисах $e_1^{(k)} \cdots e_{n_k}^{(k)}$. Можно сформулировать следующее.

Вполне приводимое конечномерное линейное представление изоморфно сумме неприводимых представлений. Обратно: сумма неприводимых представлений является вполне приводимым представлением. Это утверждение относится также к унитарным представлениям. Сумма $T(g_a) = \sum^{(k)} T(g_a)$ – сумма операторов в разных пространствах L_k.

Эквивалентные представления

Условие унитарности преобразований практически не ограничивает общности, поскольку почти все интересные с точки зрения физики преобразования унитарные. Приведение представления позволяет в принципе свести любое представление к составляющим его неприводимым представлениям. Поэтому в дальнейшем ограничимся исследованием свойств неприводимых представлений, зная, что из них можно вывести свойства любого приводимого представления, даже если число возможных неприводимых представлений остаётся бесконечным. Если пространство неприводимо, то по-другому выбрав базисные векторы с том же пространстве, мы получим иной набор матриц $T(g_a)$. Выбор базиса в пространстве представлений важен ещё и потому, что в каком-либо базисе матрицы, отвечающие элементам группы, могут иметь достаточно простой вид, и можно сделать важные заключения об исследуемом представлении.

Введём понятие эквивалентного представления. Пусть $T(g_a)$ есть представление группы G в пространстве L. Если существует невырожденное линейное взаимнооднозначное отображение A пространства L на L’ той же размерности, т.е. если для $\forall g_a \in G$ справедливо соотношение $T'(g_a) = AT(g_a)A^{-1}$, то оператор $T'(g_a)$, действующий в пространстве L’, также образует представление группы G в L’. В L’ таким образом, определён новый оператор $T'(g_a)$.

В самом деле, покажём, что $T'(g_a)$ удовлетворяет правилам группового умножения. Так как $T(g_a)T(g_b) = T(g_a g_b)$,то

$$T'(g_a)T'(g_b) = AT(g_a)A^{-1}AT(g_b)A^{-1} = AT(g_a)T(g_b)A^{-1} = AT(g_a g_b)A^{-1} = T'(g_a g_b)$$

Такие два представления называются эквивалентными. Необходимо, чтобы для всех групповых элементов применялась одна и та же операция отображения. Если L и L’ конечны, то матрицы операторов $T'(g_a)$ и $T(g_a)$ одинаковы, т.е одного ранга (размера).

Преобразование базиса матричного представления даёт эквивалентное матричное представление. Пусть в пространстве L выбран базис e'_i, связанный с базисом e_i линейным преобразованием вида: $e'_i A e_i + \sum_k A_{ki} e_k$: $e_i = \sum_k A^{-1}_{ki} e'_k$: $\det(A_{ik}) \neq 0$. Подействуем на орты e'_i оператором $T(g_a)$:

$$T(g_a)e'_i = \sum_k A_{ki} T(g_a) e_k = \sum_k A_{ki} \sum_j T_{jk}(g_a) e_j = \sum_k A_{ki} \sum_j T_{jk}(g_a) \sum_s A^{-1}_{sj} e'_s = \sum_s \left(A^{-1} T(g_a) A\right)_{si} e'_s$$

Таким образом, при переходе к новому базису в том же пространстве матрицы представления испытывают преобразование подобия. Представления матрицами $A^{-1}T(g_a)A$, где А – невырожденная матрица, одна и та же для всех $g_a \in G$, называется эквивалентным по отношению к представлению матрицами $T(g_a)$. Здесь $T(g_a)$ задан в новом базисе, а для эквивалентных представлений определён новый оператор. Таким образом, представления $T(g_a)$ и $T'(g_a)$ группы эквивалентны $\left(T(g_a) \approx T'(g_a)\right)$, если они имеют одинаковую размерность и существует такая неособенная матрица А, что $T'(g_a) = A^{-1}T(g_a)A$ для $\forall g_a \in G$. Эквивалентные матрицы можно рассматривать, как одно и то же операторное представление, матрицы которого записаны в различных базисах одного и того же пространства. Важнейшие свойства любых двух эквивалентных представлений совпадают.

Два представления $T(g_a)$ и $T'(g_a)$ называют неэквивалентными, если не существует такого оператора А, который удовлетворяет соотношению $T'(g_a) = AT(g_a)A^{-1}$ для $g_a \in G$.

Эквивалентны неприводимые представления можно рассматривать как одно представление с точки зрения разложения приводимого представления на его неприводимые части. Это означает, что если вполне приводимое представление $T(g_a)$ есть прямая сумма неприводимых представлений, среди которых есть m_1 представлений, эквивалентных $T^{(1)}(g_a)$, m_2 – эквивалентных $T^{(2)}(g_a)$, m_p – эквивалентных $T^{(p)}(g_a)$ и нет никаких других неприводимых представлений, то можно написать, что $T(G)=\sum_\alpha^{\oplus} m_\alpha T^{(\alpha)}(g_a)$, где α пробегает неэквивалентные неприводимые представления, а целое число m_α показывает, сколько раз данное неприводимое представление $T^{(\alpha)}$ появляется в разложении.

Теорема Машке

Выше было введено понятие эквивалентных представлений. Также было показано, что всякое представление (вещественное или мнимое) конечной группы является унитарным (ортогональным).

Докажем следующее: всякое представление конечной группы эквивалентно унитарному.

Пусть мы имеем представление T: $G \to T(g_a)$ в пространстве L. Для данного представления $T(g_a)$ мы должны найти такой оператор S, чтобы эквивалентное представление $T'(g_a)=ST(g_a)S^{-1}$ было унитарным.

Покажем, что этому условию удовлетворяет оператор $S=\left(\sum_b T^+(g_b)T(g_b)\right)^{\frac{1}{2}}$, где $T^+(g_b)$ – оператор, сопряжённый $T(g_b)$. Ясно, что $S^+=S$ – оператор эрмитов (самосопряжённый). Таким образом, нам надо показать, что $T'^+(g_a)=T'^{-1}(g_a)$. При этом $T^+(g_a)S^2T(g_a)=\sum_b T^+(g_a)T^+(g_b)T(g_b)T(g_a)=\sum_b \left(T(g_b)T(g_a)\right)^+\left(T(g_b)T(g_a)\right)=\sum_b T^+(g_bg_a)T(g_bg_a)=$ $=\sum_c T^+(g_c)T(g_c)=S^2$, где $g_c=g_bg_a$, согласно групповому умножению. При этом, если g_a – фиксировано, а g_b пробегает всю группу, а каждый элемент встречается один раз, то и g_c пробегает все групповые элементы, причём каждый из них встречается тоже один раз.

Обе части выражения $T^{+}(g_a)S^2T(g_a)=S^2$ умножим: справа – на $T^{-1}(g_a)S^{-1}$, а слева – на S^{-1}. Имеем:

$$S^{-1}T^{+}(g_a)S^2T(g_a)T^{-1}(g_a)S^{-1}=S^{-1}T^{+}(g_a)SSS^{-1}=S^{-1}T^{+}(g_a)S$$

С дугой стороны:

$S^{-1}S^2T^{-1}(g_a)S^{-1}=S^{-1}SST^{-1}(g_a)S^{-1}=ST^{-1}(g_a)S^{-1}$ или $S^{-1}T^{+}(g_a)S=ST^{-1}(g_a)S^{-1}$.

Отсюда:

$\left(ST(g_a)S^{-1}\right)^{+}=\left(ST(g_a)S^{-1}\right)^{-1}$, где учтено, что $S^{+}=S;(S^{-1})^{+}=S^{-1}$. Последнее означает, что

$T'^{-1}(g_a)=ST(g_a)S^{-1}$, что и требовалось доказать.

Леммы Шура

Получим критерии приводимости и неприводимости и оценим число неэквивалентных неприводимых представлений. На основании выше сказанного можно сделать вывод, что задача исследования представлений группы сводится к изучению неэквивалентных неприводимых представлений , обладающих, как мы увидим ниже, важным свойством ортогональности. Эти свойства – ядро математической теории представлений и лежат в основе большинства физических проявлений симметрии. Свойства ортогональности следуют из двух лемм Шура. Лемма – это некое промежуточное заключение, которое необходимо сделать при выводе теоремы.

Лемма 1.

Пусть $T(G_a)$ – неприводимое представление группы G в пространстве L, и пусть A – фиксированный оператор в L. Тогда если для всех элементов G_a группы G выполняется равенство $T(G_a)A = AT(G_a)$, то $A = \lambda \cdot 1$, где 1 – тождественный или единичный оператор.

Иными словами: всякий фиксированный оператор, коммутирующий с операторами $T(G_a)$ неприводимого представления для любых G_a из группы G, является единичным оператором с точностью до постоянного множителя, т.е. только единичный оператор коммутирует с операторам $T(G_a)$ неприводимого представления для $\forall G_a \in G$.

Доказательство.

Пусть r – собственный вектор оператора A, $r \in L$, с собственным значением λ, т.е. $Ar = \lambda r$. Образуем вектор $r_a = T(G_a)r$. Операторы A и $T(G_a)$ коммутируют друг с другом., следовательно, вектор r_a тоже является собственным вектором оператора A:

$$Ar_a = AT(G_a)r = T(G_a)Ar = T(G_a)\lambda r = \lambda T(G_f)r = \lambda r_a$$

Пусть G_a пробегает всю группу. В этом случае набор векторов r_a образует инвариантное подпространство $L_1 \subset L$ оператора $T(G_a)$, так как $T(G_b)r_a = T(G_b)T(G_a)r = T(G_aG_b)r = T(G_c) = r_c$, где $G_c = G_bG_a$ из таблицы группового умножения операторов $T(G_a)$. В то же время, набор r_a, для любого r_a, являются собственными векторами оператора A, коммутирующего с оператором $T(G_a)$. Наличие инвариантного подпространства L_1 свидетельствует о том, что представление $T(G_a)$ – приводимо. Но так как по определению пространство L неприводимо, оно не может содержать инвариантных подпространств., либо L_1 совпадает со всем пространством. Таким образом, пространство векторов r_a обязано совпадать со всем пространством L. Следовательно, для любого произвольного вектора $R=\sum_a C_a r_a$ имеем:

$$AR = A\sum_a C_a r_a = \sum_a C_a A r_a = \sum_a C_a \lambda r_a = \lambda R$$

Но так как R – произвольный вектор пространства L, то $A = 1\cdot\lambda$. В матричной форме A просто равно величине λ, умноженной на единичную матрицу:

$$(A) = \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Следствие.

Если единственно матрицей, коммутирующей со всеми матрицами некоторого представления группы является матрица, кратная единице, то такое представление неприводимо.

<u>Лемма 2</u>

Пусть $T^{(1)}(G_a)$ и $T^{(2)}(G_a)$ – два неприводимых представления группы G в пространствах L_1 и L_2 соответственно размерности n_1 и n_2, пусть A – оператор, переводящий векторы из L_1 в L_2. Пусть представления $T^{(1)}(G_a)$ и $T^{(2)}(G_a)$ неэквивалентны и для всех элементов G_a группы G выполняется равенство $T^{(2)}(G_a)A = AT^{(1)}(G_a)$. Тогда A=0, т.е. A – нулевой оператор.

Доказательство.

1. Рассмотрим вначале случай, когда $n_1 \le n_2$. Тогда A переводит элементы пространства L_1 в подпространство L_A некоторой размерности $n_A \le n_1 \le n_2$ в пространстве L_2: $\forall r \in L_1, Ar \in L_A \subset L_2$. Таким образом, подпространство L_2 состоит из векторов Ar, где r – произвольный вектор, $r \in L_1$. Отсюда тут же следует, что подпространство L_A инвариантно

относительно преобразований группы G, поскольку по условию $T^{(2)}(G_a)A = AT^{(1)}(G_a)$, и поэтому для $\forall Ar \in L_a \subset L_2$ имеем:

$$T^{(2)}(G_a)Ar = A\left(T^{(1)}(G_a)r\right) = Ar_a \quad (L_A \subset L_2)$$

где $r_a = T^{(1)}(G_A)r$ и полученный вектор $Ar_a \in L_A$, т.к. $r_a = T^{(1)}(G_a)r \in L_1$, а вектор A переводит векторы из L_1 в L_2. Однако, представление $T^{(2)}(G_a)$ по определению неприводимое, а поэтому L_2 не может иметь инвариантного подпространства. Таким образом, мы приходим к противоречию, если только L_A не является ни 0-мерным (n_A=0), ни полным пространством L_2 (n_A=n_2). Иными словами, мы доказали, что либо: 1) $Ar = 0$ для $\forall r \in L_1$ – а это значит, что A=0, либо 2) n_A=n_1=n_2. Последнее равенство вытекает из неравенства $n_A \le n_1$ и условия $n_1 \le n_2$. Вторая альтернатива (n_A=n_1=n_2.) исключается в силу того, что $T^{(1)}(G_a)$ и $T^{(2)}(G_a)$ – неэквивалентные представления. Эквивалентность представлений означала бы, что L_1 и L_2 имеют одинаковую размерность, отсюда следовало бы существование оператора A^{-1}, и поэтому из допущения $T^{(2)}(G_a)A = AT^{(1)}(G_a)$ следовало бы, что $T^{(2)} = AT^{(1)}A^{-1}$, т.е. $T^{(1)}(G_a)$ и $T^{(2)}(G_a)$ – эквивалентные операторы. Остаётся заключить, что A=0.

2. Случай n_1>n_2 lдоказывается аналогично. В этом случае с необходимостью n_A<n_1, т.к. n_A<n_1, а поэтому должны существовать векторы $r \in L_1$, которые переводятся преобразованием A в нуль, т.е. $Ar = 0$. Подпространство этих векторов в L_1 обозначим $L_B \subset L_1$, его размерность будет равна $n_B = n_1 - n_A$. Тогда L_B обязано быть инвариантным подпространством относительно преобразований группы G, так как, если $r_a = T^{(1)}(G_A)r$, где $r \in L_B \subset L_1$, то $Ar_a = AT^{(1)}(G_a)r = T^{(2)}(G_a)Ar = 0$, из чего видно, что r_a тоже принадлежит пространству $L_B, r_a \in L_B \subset L_1$. Это противоречит условию неприводимости представления $T^{(2)}(G_a)$, если только не

выполняется равенство $r \in L_1$, другими словами, $Ar = 0$ для всех векторов $r \in L_1$. Отсюда опять приходим к выводу что А=0. Таким образом, два различных представления, одинаковой или разной размерности, могут быть связаны только нулевыми матрицами, или различные неприводимые представления не могут быть связаны друг с другом.

Свойства ортогональности неприводимых представлений (теорема Вигнера)

Используя леммы Шура, можно получить соотношения между элементами матриц неприводимых представлений. Рассмотрим два неприводимых представления $T^{(\alpha)}(G_a)$ и $T^{(\beta)}(G_a)$ группы G, причём $T^{(\alpha)}(G_a)$ определено в пространстве L_α, а $T^{(\beta)}(G_a)$ – в пространстве L_β. Пусть X – некоторый оператор, преобразующий векторы пространства L_β в векторы пространства L_α. Мы можем теперь показать, что оператор вида $A = \sum_b T^{(\alpha)}(G_b) X T^{(\beta)}(G_b^{-1})$ как раз обладают свойством оператора А в леммах Шура, т.е. покажем, что $T^{(\alpha)}(G_a) A = A T^{(\beta)}(G_a)$.

В самом деле, имеем:

$$
\begin{aligned}
T^{(\alpha)}(G_a) A &= \sum_b T^{(\alpha)}(G_a) T^{(\alpha)}(G_b) X T^{(\beta)}(G_b^{-1}) = \\
&= \sum_b T^{(\alpha)}(G_a G_b) X T^{(\beta)}(G_b^{-1}) T^{(\beta)}(G_a^{-1}) T^{(\beta)}(G_a) = \\
&= \sum_b T^{(\alpha)}(G_a G_b) X T^{(\beta)}(G_a G_b)^{-1} T^{(\beta)}(G_a) = \\
&= \sum_b T^{(\alpha)}(G_c) X T^{(\beta)}(G_c^{-1}) T^{(\beta)}(G_a) = A T^{(\beta)}(G_a)
\end{aligned}
$$

Мы использовали тот факт, что $G_a G_b = G_c$ в силу наличия группового умножения, а G_b пробегает всю группу и при этом пробегает все групповые элементы. Таким образом, $T^{(\alpha)}(G_a)A = AT^{(\beta)}(G_a)$.

Рассмотрим два случая.

1. Пусть $T^{(\alpha)}(G_a)$, $T^{(\beta)}(G_a)$ – одно и то же представление, откуда по первой лемме Шура $A = \lambda \cdot 1$

2. Пусть $T^{(\alpha)}(G_a)$, $T^{(\beta)}(G_a)$ – неэквивалентные и неприводимые представления, и по второй лемме Шура А=0.

Эти два случая можно объединить в одно равенство:

$$A = \lambda \delta_{\alpha\beta} 1,\ \delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, \alpha = \beta \\ 0, \alpha \neq \beta \end{cases}$$

Т.е. считая, что в нём $\delta_{\alpha\beta} = 0$, когда $T^{(\alpha)}(G_a)$, $T^{(\beta)}(G_a)$ неприводимые неэквивалентные представления, и $\delta_{\alpha\beta} = 1$, когда $T^{(\alpha)}(G_a)$, $T^{(\beta)}(G_a)$ – одно и то же представление.

Содержание леммы Шура при выборе оператора А в форме

$$A = \sum_b T^{(\alpha)}(G_b) X T^{(\beta)}(G_b^{-1}) = 1 \cdot \lambda \cdot \delta_{\alpha\beta}$$

можно свести к одному равенству в матричной форме вида:

$$A_{ij} = \sum_{a=1}^{g} \sum_{m=1}^{S_\beta} \sum_{k=1}^{S_\alpha} T_{ik}^{(\alpha)}(G_a) X_{km} T_{mj}^{(\beta)}(G_a^{-1}) = \lambda \delta_{\alpha\beta} \delta_{ij} = \lambda(X) \delta_{\alpha\beta} \delta_{ij}$$

где X в левой части – совершенно произвольная прямоугольная матрица, но множитель λ зависит от выбора X. Здесь S_α, S_β – размерности представлений α и β соответсвенно.

Воспользуемся свободой выбора матрицы X и положим её элементы равными $X_{km} = \delta_{kp} \delta_{mq}$. Таким образом, мы выбираем матрицу X такой, в которой – нули, кроме одного, расположенного на пересечении p-ой строки и q-ого столбца, который равен единице. При таком выборе в матричном элементе оператора А исчезают два знака суммирования, т.е. по сути, проведём суммирование по k,m с левой стороны:

$$\sum_{a=1}^{g} T_{ip}^{(\alpha)}(G_a) T_{qj}^{(\beta)}(G_a^{-1}) = \lambda \delta_{\alpha\beta} \delta_{ij}$$

Величина λ имеет смысл только тогда, если $\alpha = \beta$ и $i = j$, в этом случае, принимая $\alpha = \beta$ и просуммировав по i обе части, получаем слева:

$$\sum_{i=1}^{S_\alpha} \sum_{a=1}^{g} T_{ip}^{(\alpha)}(G_a) T_{qj}^{(\alpha)}(G_a^{-1}) = \sum_{a=1}^{g} \sum_{\alpha=1}^{S_\alpha} T_{ip}^{(\alpha)}(G_a) T_{qj}^{(\alpha)}(G_a^{-1}) = \sum_{a=1}^{g} T_{qp}^{(\alpha)}(E) = g\delta_{pq}$$

При этом справа получаем:

$$\lambda \cdot \delta_{\alpha\beta} \delta_{ij} = \lambda \cdot \sum_{i=1}^{S_\alpha} 1 = \lambda \cdot S_\alpha$$

и, следовательно, $g \cdot \delta_{pq} = \lambda \cdot S_\alpha$. Отсюда $\lambda = {g\delta_{pq}}/{S_\alpha}$, ибо образом тождественной операции является единичная матрица. Подставляя в исходное соотношение полученное выражение для λ, получаем:

$$\sum_{a=1}^{g} T_{ip}^{(\alpha)}(G_a) T_{qj}^{(\beta)}(G_a^{-1}) = {g\delta_{\alpha\beta}\delta_{pq}\delta_{ij}}/{S_\alpha}$$

Если матричное представление $T^{(\beta)}(G_a)$ унитарно, то возможно дальнейшее упрощение. Так как $T^{(\beta)}(G_a^{-1}) T^{(\beta)}(G_a) = T^{(\beta)}(E) = 1$, и так как $T^{(\beta)}(G_a^{-1}) = \left(T^{(\beta)}(G_a)\right)^{-1}$ в силу гомоморфизма, а матричные элементы для унитарной матрицы $\left(T_{qj}^{(\beta)}(G_a)\right)^{-1} = \left(T_{jq}^{(\beta)}(G_a)\right)^{*}$, а потому. Если матрица (T) унитарна, то $T_{qj}^{(\beta)}(G_a^{-1}) = T_{jq}^{(\beta)*}(G_a)$ и при подстановке в последнее полученное соотношение получаем:

$$\sum_{a=1}^{g} T_{ip}^{(\alpha)}(G_a) T_{jq}^{(\beta)*}(G_a) = {g\delta_{\alpha\beta}\delta_{ij}\delta_{pq}}/{S_\alpha}$$

Данное полученное соотношение есть чрезвычайно мощное соотношение ортогональности, так как индексы матричных элементов в левой части выбраны совершенно произвольно, а суммирование производится только по элементам группы. Это соотношение показывает, что полученная сумма обращается в ноль, если 1) α и β – неэквивалентные неприводимые представления. Даже если $\alpha = \beta$, сумма равна нулю, пока 2) в левую часть входят различные матричные элементы, т.е. если $i \neq j$, или $p \neq q$. Единственная ситуация, при которой сумма отличается от нуля при произвольных индексах *i, p* можно представить так:

$$\sum_{a=1}^{g} \left| T_{ip}^{(\alpha)}(G_a) \right|^2 = g \big/ S_\alpha$$

полученное при $i = j, p = q, \alpha = \beta$. Суммирование по g – по всем элементам группы – называют усреднением по группе.

Термин ортогональность означает, что в некотором пространстве некое скалярное произведение обращается в ноль. Использование этого термина оправдано, если рассматривать набор матричных элементов $T_{ip}^{(\alpha)}(G_a)$ для фиксированных α, i, p как обозначенные индексом a компоненты вектора g-мерного пространства. Скалярное произведение двух векторов в этом пространстве определяется обычно как сумма компонентов. Тогда полученное выражение констатирует ортогональность таких векторов с разными наборами индексов α, i, p. Важно, что соотношение ортогональности выполняется только для неприводимых представлений.

Характеры представлений

Для каждого данного представления можно построить бесконечное число эквивалентных матричных представлений путём изменения базиса, т.е. преобразования подобия. Найдём некоторые вполне определённые свойства представлений, которые не зависят от таких преобразований. В принципе можно поострить много инвариантов, поскольку преобразование подобия не изменяют собственных значений матрицы. В большинстве случаев одной-единственной характеристики. Наиболее подходящей для этой цели характеристикой оказывается сумма всех собственных значений, называемая «следом» матрицы и равная сумме её диагональных элементов в любом базисе.

Пусть $T: G \to T(G_a)$– некоторое линейное представление группы G. Функция $\chi: G \to tr\left(T(G_a)\right)$называется характером представления – сумма диагональных компонентов матрицы представления $T_{ij}(G_a)$. Такой след матричного представления $T(G_a)$ будем через $\chi(G_a)$. Набор чисел $\chi(G_a)$, где $\chi(G_a)$ пробегает все элементы группы, называется характером представления *T*. Имеем, таким образом, что для одного представления

$$\chi(G_a) = \sum_{i=1}^{S} T_{ii}(G_a)$$

Установим некоторые свойства характеров представлений.

1. Сразу видно, что характер представления инвариантен по отношению к преобразованию подобия, т.к. из равенства (для эквивалентных представлений) $T'(G_a) = AT(G_a)A^{-1}$ следует:

$$\chi'(G_a) = \sum_i T'(G_a) = \sum_i \sum_j \sum_k A_{ij} T_{jk}(G_a) A_{ki}^{-1} =$$

$$= \sum_j \sum_k T_{jk}(G_a)(AA^{-1})_{kj} = \sum_j T_{jj}(G_a) = \chi(G_a)$$

2. Таким же образом можно показать, что все элементы одного и того же класса C_p должны иметь одинаковый характер, который мы обозначим через χ_p. Действительно, Предположим, что элементы G_a, G_b принадлежат одному и тому же классу, т.е связаны соотношением $G_a = G_m G_b G_m^{-1}$. Тогда для любого представления T имеем:

$$\chi(G_a) = \sum_i T_{ii}(G_a) = \sum_i T_{ii}(G_m G_b G_m^{-1}) =$$

$$= \sum_i \sum_j \sum_k T_{ij}(G_m) T_{jk}(G_b) T_{ki}(G_m^{-1}) = \sum_j \sum_k T_{jk}(G_b) T_{kj}(G_m^{-1} G_m) = \sum_j T_{jj}(G_b) = \chi(G_b)$$

3. <u>Теорема.</u> Характеры неприводимых представлений обладают свойством ортогональности.

В случае неприводимых представлений для вывода соотношения между характерами воспользуемся соотношением ортогональности матричных элементов неприводимых представлений:

$$\sum_{a=1}^{g} T_{ip}^{(\alpha)}(G_a) T_{jq}^{(\beta)*}(G_a) = g\delta_{\alpha\beta}\delta_{ij}\delta_{pq} / S_\alpha$$

Положим в этом соотношении $p = i, q = j$ и просуммируем левую и правую части по i и j, при этом получаем:

$$\sum_g \sum_i T_{ii}^{(\alpha)}(G_a) \sum_j T_{jj}^{(\beta)*}(G_a) = g\delta_{\alpha\beta} \text{ ,}$$

поскольку $\sum_i \sum_j \delta_{ii}\delta_{jj} / S_\alpha = 1$. Поэтому, после суммирования по диагональным элементам матриц имеем:

$$\sum_g \chi^{(\alpha 0}(G_a) \chi^{(\beta)*}(G_b) = g\delta_{\alpha\beta}$$

Для элементов одного и того же класса, как показано выше, $\chi(G_a)$ имеет одно и то же значение. Поэтому, если число элементов в классе C_p, то это соотношение можно переписать в виде:

$$\sum_p C_p \chi_p^{(\alpha)} \chi_p^{(\beta)*} = g\delta_{\alpha\beta}$$

где суммирование проводят по числу классов p группы G, т.к. $\chi^{(\alpha)} = \sum_p C_p \chi_p^{(\alpha)}$. В частном случае, при $\alpha = \beta$ имеем для неприводимых представлений соотношения:

$$\sum_g \left|\chi^{(\alpha)}(G_a)\right|^2 = \sum_p C_p \left|\chi_p^{(\alpha)}(G_a)\right|^2 = g$$

Соотношение $\sum_g \chi^{(\alpha 0}(G_a)\chi^{(\beta)*}(G_b) = g\delta_{\alpha\beta}$ будем называть соотношением ортогональности для характеров. Характеры в соотношении $\sum_p C_p \chi_p^{(\alpha)} \chi_p^{(\beta)*} = g\delta_{\alpha\beta}$ можно рассматривать как векторы в векторном пространстве размерности p, где C_p – число классов в группе G. В этом пространстве характеры неприводимых представлений образуют набор ортогональных векторов. Отсюда следует, что число неприводимых неэквивалентных представлений не может превышать числа классов группы.

4. Характер приводимого представления T равен сумме характеров неприводимых представлений, на которые оно может быть разложено.

Это следует из того, что матрица приводимого представления имеет квазидиагональный вид, а все эквивалентные представления имеют одинаковые характеры. Так как $T = T^{(1)}(G_a) \oplus T^{(2)}(G_a) \oplus \cdots = \sum_\alpha^\oplus m_\alpha T^{(\alpha)}$, то просуммировав диагональные элементы матрицы, сразу видно, что характер χ приводимого представления связан с характером неприводимого представления таким же соотношением:

$$\chi(G_a) = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \chi^{(\alpha)}$$

где m_{α} указывает, сколько раз данное неприводимое представление входит в разложение приводимого. Для элементов одного класса C_p получаем:

$$\chi_p = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \chi_p^{(\alpha)}$$

где m_{α} – число неэквивалентных неприводимых представлений $T^{(\alpha)}$.

Если в приводимом представлении $T(G_a)$ известны характеры неприводимых представлений $\chi^{(\alpha)}$, то используя соотношение ортогональности, можно получить:

$$\sum_{g} \chi(G_a) \chi^{(\beta)*}(G_a) = \sum_{g} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \chi^{(\alpha)} \chi^{(\beta)*} =$$

$$= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \sum_{g} \chi^{(\alpha)} \chi^{(\beta)*} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} g \delta_{\alpha\beta} = m_{\beta} g$$

Отсюда $m_{\beta} = \dfrac{1}{g} \sum_{g} \chi(G_a) \chi^{(\beta)*}(G_a)$. Если $\chi(G_a) = \sum_{p} C_p \chi(G_a)$, т.е. $g = \sum_{p} C_p$, где C_p – число элементов в классе *p*, то $m_{\beta} = \dfrac{1}{g} \sum_{p} C_p \chi_p(G_a) \chi_p^{(\beta)*}(G_a)$. Здесь $\chi_p(G_a)$ – характер приводимого представления.

В частности, отсюда следует, что разложение приводимого представления на неприводимые части может быть выполнено единственным образом. Символически это записывается, как:

$$T = \sum\nolimits^{\oplus} m_{\alpha} T^{(\alpha)}$$

где значок $\oplus$ напоминает, что выражение в правой части не является суммой матриц в обычном смысле.

5. Если представление T неприводимо, то $\sum_p C_p \left|\chi_p^{(\alpha)}\right|^2 = g$, с другой стороны, если последнее условие выполняется, то представление T неприводимо. Таким образом, это есть необходимое и достаточное условие неприводимости.

В самом деле. Пусть Т – неприводимое представление, тогда

$$\sum_p C_p \left|\chi_p\right|^2 = \sum_\alpha \sum_\beta \sum_p C_p m_\alpha m_\beta \chi_p^{(\alpha)} \chi_p^{(\beta)*} = \sum_\alpha \sum_\beta m_\alpha m_\beta \sum_p C_p \chi_p^{(\alpha)} \chi_p^{(\beta)*} =$$

$$= \sum_\alpha \sum_\beta m_\alpha m_\beta g \delta_{\alpha\beta} = g \sum_\alpha m_\alpha^2$$

С другой стороны, $\sum_p C_p \left|\chi_p^{(\alpha)}\right|^2 = g$. Отсюда следует, что $\sum_\alpha m_\alpha^2 = 1$. Поскольку все m_α – целые числа по своему смыслу, то все $m_\alpha = 0$, кроме одного из них, которое обозначим $m_\gamma = 1$. Отсюда видно, что $T = T^{(\gamma)}$, а последнее означает, что представление T есть неприводимое представление.

Регулярное представление

Важной задачей теории групп является определение всех неприводимых представлений данной конкретной группы. Рассмотрим для этого специальный вид представления – регулярное представление.

Пусть имеется группа G. Возьмём её произвольный элемент g_s и произведём операцию сдвига по группе, т.е. каждый из элементов группы умножим слева на g_s. Тогда мы получим последовательности вида:

$$g_s g_1, g_s g_2, \cdots g_s g_m$$

Согласно лемме о сдвиге, в этой последовательности каждый элемент группы встречается один и только один раз. Если $g_s = E$, то никакого сдвига не произойдёт

Сдвиг, соответствующий любому элементу g_s формаольно можно записать с помощью оператора $T(g_s)$ и его матрицы $\|T_{ij}(g_s)\|$ порядка m:

$$\forall s : T(g_s)g_i \sim g_s g_i = \sum_k T_{ki}(g_s) g_k$$

Здесь индексы нумеруются по тому элементу, который получается в результате действия оператора $T(g_s)$. Посмотрим, что собой представляет матрица этого оператора. При $g_s = E$ очевидно, что в каждом столбце матрицы T есть только один элемент, отличный от нуля и равный единице. Если $g_s g_i = g_k$ (а фактически, $g_k = g_i$ при $g_s = E$) – элемент группы, то матричный элемент $T_{ki}(g_s) = 1$, а матричный элемент $T_{li}(g_s) = 0$ при $k \neq l$ $(T(g_s)g_i \sim g_s g_i = \sum_k T_{ki}(g_s) g_k$, $T_{ki}(g_s) = 1 \forall g_k)$. Матрицы , построенные таким образом, дают представление порядка *g* группы *G*, так как все столбцы матрицы $\|T_{ij}(g_s)\|$ будут состоять из нулей и одной единицы, кроме того, эта единица будет располагаться на диагонали только тогда g_s есть единичный элемент, $g_s = E$. Такое представление называется регулярным. Следовательно, характеры регулярного представления будут равны нулю для всех элементов группы, кроме единичного, для которого характер равен размерности представления (а размерность представления совпадает с числом элементов в группе, ord G):

$\chi^{(R)}(E) = g, \chi^{(R)}(g_s) = g$, если $g_s = E$

$\chi^{(R)}(g_s) = 0$, если $g_s \neq E$

Разложим регулярное представление $T^{(R)}$ на неприводимые части, т.е. выясним, сколько раз в нём содержится каждое неприводимое представление $T^{(\alpha)}$. Так как $T^{(R)} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} T^{(\alpha)}$, то $m_{\alpha} = \frac{1}{g}\sum_{g} \chi^{(R)}\chi^{(\alpha)*}(g_s)$, или $\frac{1}{g} g \sum_{\alpha} \chi^{(\alpha)*}(E) = S_{\alpha}$, т.к. $\chi^{(R)} = g$, и единичному элементу в любом представлении отвечает диагональная единичная матрица и её $Sp = S_{\alpha}$, где S_{α} – размерность приводимого представления $T^{(\alpha)}(g_s)$. Отсюда следует, что каждое неприводимое представление содержится в регулярном представлении столько раз, каков порядок (размерность) неприводимого преставления. Таким образом, регулярное представление долждно содержать все неприводимые представления.

Первая теорема Бернсайда.

С помощью регулярного представления докажем первую теорему Бернсайда: сумма квадратов размерностей всех неприводимых неэквивалентных представлений равна порядку группы, т.е. $\sum_{\alpha} S_{\alpha}^2 = g$.

Так как $\chi^{(R)} = g$, с другой стороны, $\chi^{(R)} = \sum_{\alpha} m_{\alpha}\chi^{(\alpha)}$, то $m_{\alpha} = S_{\alpha}$, следовательно, $\chi^{(\alpha)}(E) = S_{\alpha}$ для неприводимых неэквивалентных представлений, что содержаться в регулярном, отсюда и получаем, что $\sum_{\alpha} S_{\alpha}^2 = g$, т.е. размерность у представления $T^{(R)}$ равнв суммарной размерности его составляющих. Это результат справедлив и в общем случае: сумма квадратов размерностей всех возможных неприводимых неэквивалентных представлений равна порядку группы.

Число неприводимых представлений (вторая теорема Бернсайда)

Итак, для матричных элементов неприводимых представлений выполняется условие ортогональности:

$$\sum_{a=1}^{g} T_{ip}^{(\alpha)}(G_a) T_{jq}^{(\beta)*}(G_a) = \frac{g}{S_\alpha}\delta_{\alpha\beta}\delta_{ij}\delta_{pq}$$

Это условие показывает, что матричные элементы неприводимых представлений можно рассматривать в пространстве элементов группы, и они в этом пространстве образуют систему ортогональных векторов. Ортогональность выполняется по строкам i, j, столбцам p, q и представлениям α, β. При $\alpha = \beta, j = i, q = p$ имеем:

$$\sum_{a=1}^{g} \left| T_{ip}(G_a) \right|^2 = \frac{g}{S_\alpha}$$

т.е. длина вектора в пространстве элементов группы равна $\sqrt{\frac{g}{S_\alpha}}$. Если умножить матричные элементы на $\sqrt{\frac{S_\alpha}{g}}$, то условие ортогональности можно записать в виде:

$$\sum_{a=1}^{g} \sqrt{\frac{S_\alpha}{g}} T_{ip}^{(\alpha)}(G_a) T_{jq}^{(\beta)*}(G_a) \sqrt{\frac{S_\alpha}{g}} = \delta_{\alpha\beta}\delta_{ij}\delta_{pq}$$

Из ортогональности матричных элементов неприводимых представлений вытекает соотношения ортогональности характеров элементов групп:

$$\sum_{a=1}^{g} \chi^{(\alpha)}(G_a) \chi^{(\beta)*}(G_a) = g\delta_{\alpha\beta}$$

$$\sum_{a=1}^{g} \sqrt{\frac{1}{g}} \chi^{(\alpha)}(G_a) \chi^{(\beta)*}(G_a) \sqrt{\frac{1}{g}} = \delta_{\alpha\beta}$$

Характеры неприводимых представлений группы удовлетворяют условию ортогональности по различным неприводимым представлениям, что можно трактовать аналогично с матричными элементами неприводимых представлений, рассматривая их в пространстве элементов группы. Длина вектора в этом пространстве равна $\sqrt{g}$, т.к при $\alpha = \beta$ имеем:

$$\sum_{a=1}^{g} \left|\chi^{(\alpha)}(G_a)\right|^2 = g$$

Вспомним, что характеры элементов одного класса совпадают. Пусть число классов в группе есть P, число элементов в классе C_p. В таком случае сумму по элементам группы можно свести к сумме по классам:

$$\sum_{p} C_p \chi_p^{(\alpha)}(G_a) \chi_p^{(\beta)*}(G_a) = g\delta_{\alpha\beta}$$

Это можно переписать в виде:

$$\sum_{a=1}^{g} \sqrt{\frac{C_p}{g}} \chi_p^{(\alpha)}(G_a) \chi_p^{(\beta)*}(G_a) \sqrt{\frac{C_p}{g}} = \delta_{\alpha\beta}$$

т.е., как разложение вектора с компонентами $\sqrt{\frac{C_p}{g}} \chi_p^{(\alpha)}$ по ортам $\sqrt{\frac{C_p}{g}} \chi_p^{(\beta)*}$,

т.е. величины $\sqrt{\frac{C_p}{g}} \chi_p^{(\beta)*}$ можно рассматривать как ортонормированные векторы в пространстве классов. Число классов в группе P, следовательно, размерность пространства классов есть P. Но в пространстве P измерений не может быть более, чем P линейно независимых (ортогональных) векторов. А это означает, что число неприводимых представлений группы равно числу классов группы. Таким образом, число классов определяет число неприводимых неэквивалентных представлений, а вместе с тем и их размерность $\sum_{\alpha} S_\alpha^2 = g$. Это и есть вторая теорема Бернсайда.

Второе соотношение ортогональности характеров групп

Для каждого неприводимого представления каждой конечной группы можно составить таблицу характеров. Равенство числа классов числу неэквивалентных неприводимых представлений означает, что в таблице характеров столбцы соответствуют классам, а строчки – неприводимым представлениям. Такая таблица должна быть квадратной:

	C_1	C_2	C_3	C_4
$T^{(1)}$	$\chi_1^{(1)}$	$\chi_2^{(1)}$	$\chi_3^{(1)}$	$\chi_4^{(1)}$
$T^{(2)}$	$\chi_1^{(2)}$	$\chi_2^{(2)}$	$\chi_3^{(2)}$	$\chi_4^{(2)}$
$T^{(3)}$	$\chi_1^{(3)}$	$\chi_2^{(3)}$	$\chi_3^{(3)}$	$\chi_4^{(3)}$
$T^{(4)}$	$\chi_1^{(4)}$	$\chi_2^{(4)}$	$\chi_3^{(4)}$	$\chi_4^{(4)}$

В силу соотношения ортогональности

$$\sum_{a=1}^{g} \chi^{(\alpha)}(G_a)\chi^{(\beta)*}(G_a) = g\delta_{\alpha\beta}$$

$$\sum_{p} C_p \chi_p^{(\alpha)}(G_a)\chi_p^{(\beta)*}(G_a) = g\delta_{\alpha\beta}$$

Таким образом, любые две строки в этой таблице ортогональны, а отсюда можно заключить, что и для столбцов таблицы существует соотношение ортогональности. Для этого построим матрицу B размером $n \times n$ с элементами $B_{\alpha p} = \left(\frac{C_p}{g}\right)^{1/2} \chi_p^{(\alpha)}$, тогда $B^*_{\beta p} = \left(\frac{C_p}{g}\right)^{1/2} \chi_p^{(\beta)*}$, где n – число неэквивалентных неприводимых представлений. Из соотношения ортогональности строк следует, что при любых α, β для элементов этой матрицы имеем:

$$\sum_{p} B_{\alpha p} B^*_{\beta p} = \delta_{\alpha\beta}$$

что в операторной форме $BB^{+}=1$. Так как B – квадратная матрица, из этого соотношения следует, что *det* B=1, и существует боратная матрица B^{-1}, и $B^{-1}=B^{+}$. Поэтому также $B^{+}B=1$, что для матричных элементов означает, что

$$\sum_{\alpha} B^{*}_{\alpha p} B_{\alpha q} = \delta_{pq}$$

Возвращаясь к характерам групп, получаем:

$$\sum_{\alpha} \chi_{p}^{(\alpha)*} \chi_{q}^{(\alpha)} = \frac{g}{C_p} \delta_{pq}$$

Это и есть соотношение ортогональности для столбцов таблицы характеров.

Составление таблицы характеров неприводимых представлений

Элементы таблицы характеров (например, группы D_3) можно найти, суммируя диагональные элементы построенных ранее матриц представлений. Это не самый простой способ построения таблицы характеров.

Рассмотрим, как из априорных соображений можно построить таблицу характеров для конечных групп. Это делается на основе свойств характеров неприводимых представлений.

1. Число неприводимых представлений равно числу классов.

2. Размерность S_α неприводимых представлений должны удовлетворять равенству $\sum_{\alpha} S_{\alpha}^{2} = g$, которое во многих случаях даёт для S_α единственное решение. Так как характер единичного элемента E равен размерности представления, числа в первом столбце таблицы характеров – это просто целые числа S_α, $\chi^{(\alpha)}(E) = S_\alpha$.

3. Для каждой группы существует одномерное тождественное представление, для которого $T(G_a)=1$, и следовательно, $\chi(G_a)=1$. Этим соотношением определяется одна из строк таблицы, обычно это перваы строка.

4. Каждая строка таблицы преобразование координат физической системы, т.е. неприводимые представления, в ней. – её характеры. Строки таблицы взаимно ортогональны с весами C_p и нормированы к числу элементов группы g, т.е.

$$\sum_p C_p \chi_p^{(\alpha)}(G_a)\chi_p^{(\beta)*}(G_a) = g\delta_{\alpha\beta}$$

$$\sum_p C_p \left|\chi_p^{(\alpha)}\right|^2 = g$$

В частности, если β – тождественное представление, то для всех представлений α, не совпадающих с тождественным, $\sum_p C_p \chi_p^{(\alpha)} = 0$. Число строк определяет количество неприводимых представлений.

5. Столбцы таблицы взаимно ортогональны и нормированы к g/C_p:

$$\sum_\alpha \chi_p^{(\alpha)*}\chi_q^{(\alpha)} = \frac{g}{C_p}\delta_{pq}$$

В частности,, если в качестве класса выбран единичный элемент Е, то для всех остальных столбцов имеем:

$$\sum_\alpha S_\alpha \chi_p^{(\alpha)} = 0$$

Таким образом можно построить таблицу характеров простейших групп. О группе следует знать её порядок g, число классов и число элементов в каждом классе. Для более сложных групп необходима дополнительная информация. Для Для дополнительных соотношений между характерами требуется знание групповой таблицы умножения. Для большинства физических приложений необходимо просто взглянуть на таблицу характеров. В таблице характеров неприводимых представлений для представлений используют следующие обозначения: А или В с индексами – для одномерных, Е – для двумерных, F или T – для трёхмерных, представления большей размерности в трёхмерном евклидовом пространстве не встречаются. Таблица характеров содержит обозначение группы в левом верхнем ряду, состав группы по классам – в верхней правой строке., обозначения представлений – в левом столбце, сами характеры находятся на пересечении строки – представления и столбца – класса. Другими словами: строки таблицы содержат характеры всех классов в одном представлении, а столбцы – характеры одного и того же класса во всех неприводимых представлениях.

Неприводимые представления абелевых и циклических групп

Для абелевой группы каждый элемент сопряжён только самому себе, поэтому число классов сопряжённых элементов равно порядку группы.g, а каждый класс состоит из одного элемента g_k, поскольку $g_i = g_m g_k g_m^{-1} = g_k g_m g_m^{-1} = g_k$, чего не может быть., т.е. при составлении соотношения сопряжения элемент g_i оказывается равным g_k, но $g_k \neq g_i$

Рассмотрим циклические группы. Выше мы рассмотрели совокупность элементов $g_i, g_i^2, g_i^3 ... g_i^n = e$, которую определили, как период или цикл элемента g_i.В общем случае, циклической называют группу, порождённую одним элементом g:

$$C_n = \left\{T, g, g^2, g^3 \cdots g^{n-1}\right\}$$

В ней $g^i \neq g^j$ при $i \neq j$ и $g^n = E$

Если n – простое число, C_n не имеет собственных подгрупп, если n – не простое число, каждому делителю n отвечает подгруппа в C_n. Элемент g называется порождающим элементом. Очевидно, множество всех элементов группы создаёт систему порождающих элементов. Минимальную систему таких соотношений называют определяющими соотношениями. Группы с заданными порождающими элементами и определяющими соотношениями обозначают символом

$$G = \langle \cdots / \cdots \rangle$$

где элемент справа – порождающий элемент, слева – определяющее соотношение. Например, циклическая группа C_n записывается в виде:

$$C_n = \langle g / g^n = E \rangle$$

Это означает, что g – порождающий элемент, он один, и одно определяющее соотношение.

Условие $\sum_{\alpha} S_{\alpha}^2 = g$ для абелевых, и тем самым для циклических групп означает, что все неприводимые представления одномерны, а их число равно порядку группы, т.к. каждый элемент абелевой группы образует свой собственный одномерный класс. Так как матрицы неприводимых представлений одномерны, то характеры представлений совпадают с самими представлениями. Операторы представлений $T(g)$ действуют в одномерном пространстве V=1. Условие унитарности представлений требует, чтобы эти числа по модулю были равны единице. Таким требованиям удовлетворяют операторы вида:

$$T^{(m)}(g) = e^{\frac{2\pi i}{n} m}$$

где $m = 0, 1, 2. \cdots n-1$, m нумерует неприводимые представления. При m=0 – тождественное представление. Так как все представления одномерные, операторы $T(g)$ являются одновременно и характерами:

$$\chi^{(m)}(g^k) = T^{(m)}(g^k) = e^{\frac{2\pi i m}{n}k}$$

$m = 0,1,2.\cdots n-1$, k – степень элемента, n – степень элемента, при которой $g^n = E$. При m=1 получаем первое (одномерное) представление, при m=2 – второе представление и.т.д. Таблица характеров абелевых и циклических групп имеет размерность, таким образом, $g \times g$, где g – порядок группы.

Прямое (тензорное) произведение матриц

Рассмотрим две квадратные матрицы: матрицу А размером $n \times n$, и матрицу В размером $m \times m$ с элементами

$$a_{ik},\ \ i,k = 1,2,\ldots n$$

$$b_{\alpha\beta},\ \alpha,\beta = 1,2,\ldots m$$

Прямым произведением матрицы А на матрицу В называют суперматрицу $A \times B$ размерности $mn \times mn$ (иногда прямое произведение обозначают $A \otimes B$) с матричными элементами

$$(A \times B)_{i\alpha,k\beta} = a_{ik} b_{\alpha\beta}$$

Например, прямое произведение двух матриц второго порядка:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B \\ a_{21}B & a_{22}B \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

Отсюда следует, что $(A \times B)_{i\alpha,k\beta} = a_{ik} b_{\alpha\beta} = c_{i\alpha,k\beta}$. Каждый элемент матрицы прямого произведения обозначается двойным индексом $c_{i\alpha,k\beta}$, причём первый индекс *i* относится к строке матрицы *A*, второй индекс *α* – к строке матрицы B, а индекс $k\beta$ – соответственно к столбам матриц A и B. Элементами матрицы $A\times B$ являются всевозможные произведения элементов матриц A и B. Из определения прямого произведения следует, что прямое произведение диагональных матриц будет диагональной матрицей, а прямое произведение единичных матриц – единичной матрицей.

Приведём без доказательства некоторые свойства прямого произведения матриц.

1. Если $A^{(1)}, A^{(2)}$ – матрицы порядка n, а $B^{(1)}, B^{(2)}$ – матрицы порядка m, то $\left(A^{(1)}\times B^{(1)}\right)\left(A^{(2)}\times B^{(2)}\right)=A^{(1)}A^{(2)}\times B^{(1)}B^{(2)}$

2. Если матрицы А и В – унитарны, то матрица $A\times B$ – тоже унитарная.

3. Пусть матрицы А и В имеют обратные матрицы, т.е. $\det(A)\neq 0, \det(B)\neq 0$, матрицы не вырождены. Тогда прямое произведение матриц $A\times B$ имеет обратную матрицу и если $A\times B=C$, то $C^{-1}=A^{-1}\times B^{-1}$.

Прямое произведение представлений группы

Пусть даны два представления – $T^{(\alpha)}$ и $T^{(\beta)}$ (не обязательно неприводимые) группы G. Будем рассматривать матрицы этих представлений как матрицы преобразований соответственно в L_1 и L_2 - мерных пространствах R_{L_1}, R_{L_2}. Для ортов u_i пространства R_{L_1} имеем $T^{(\alpha)}u_i=\sum_m T^{\alpha}_{mi}(G)u_m$, а для ортов v_k пространства R_{L_2} получаем $T^{(\beta)}v_k=\sum_n T^{(\beta)}_{nk}v_k$.

Выберем в пространстве R_{L_1} вектор $\mathbf{X(x_1,x_2 \cdots x_{L_1})}$, а в пространстве R_{L_2} вектор $\mathbf{Y(y_1,y_2 \cdots y_{L_2})}$. Образуем L_1L_2 произведений вила $x_i y_k$ составляющих векторов $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$, и будем рассматривать эти числа как компоненты вектора в пространстве $R_{L_1} \times R_{L_2}$. Этот вектор будем называть прямым произведением векторов $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$. Пространство будем называть прямым произведением пространств R_{L_1} и R_{L_2} и обозначать $\left(R_{L_1} \times R_{L_2}\right)$. Ясно, что базис пространства $\left(R_{L_1} \times R_{L_2}\right)$ может быть образован из прямых произведений базисных ортов u_i и v_k пространств R_{L_1} и R_{L_2}:

$$w = u \times v;\ w_{ik} = u_i \times v_k$$

Определим теперь линейные операторы $T^{(\alpha\times\beta)}(G)$, действующие в пространстве $\left(R_{L_1} \times R_{L_2}\right)$ соотношением:

$$T^{(\alpha\times\beta)}(G)w_{ik} = T^{(\alpha)}(G)u_i \times T^{(\beta)}(G)v_k =$$
$$= \sum_m \sum_n T^{(\alpha)}_{mi}(G)u_m \times T^{(\beta)}_{nk}(G)v_k = \sum_m \sum_n T^{(\alpha)}_{mi}(G)T^{(\beta)}_{nk} w_{mn}$$

Видно, что операторам $T^{(\alpha\times\beta)}(G)$ соответствуют матрицы, являющиеся прямым произведением матриц $T^{(\alpha)}(G)$ и $T^{(\beta)}(G)$: $T^{(\alpha\times\beta)}(G) = T^{(\alpha)}(G) \times T^{(\beta)}(G)$. Проверить, что матрицы $T^{(\alpha)}(G) \times T^{(\beta)}(G)$ образуют представление группы G можно, используя свойство 1) прямого произведения матриц.

Представление матрицами $T^{(\alpha)}(G) \times T^{(\beta)}(G)$ композицией или прямым произведением представлений $T^{(\alpha)}(G)$ и $T^{(\beta)}(G)$. Если представления $T^{(\alpha)}(G)$ и $T^{(\beta)}(G)$ унитарны, то по свойству 2) их прямое произведение также унитарно.

Если представления $T^{(\alpha)}(G)$ и $T^{(\beta)}(G)$ неприводимы, то их прямое произведение в общем случае приводимо. Разложение композиции представлений на неприводимые части называется разложением Клепша-Гордана:

$$T^{(\alpha)}(G)\times T^{(\beta)}(G)=\sum\nolimits_{l}^{\oplus}\gamma_{\alpha\beta l}T^{(l)}(G)$$

где $T^{(l)}(G)$ – неприводимые представления группы G. Известно, что с помощью соотношений ортогональности для характеров неприводимых представлений и по известным характерам приводимого представления можно определить, сколько раз в нём содержится каждое неприводимое представление. По аналогии имеем:

$$\gamma_{\alpha\beta l}=\frac{1}{g}\sum_{g}\chi^{(l)*}(G)\chi^{(\alpha,\beta)}(G)$$

где через $\chi^{(\alpha,\beta)}(G)$ обозначены характеры представления $T^{(\alpha)}(G)\times T^{(\beta)}(G)$. Найдём выражение для характера $\chi^{(\alpha,\beta)}(G)$. Так как элементы матрицы $T^{(\alpha)}(G)\times T^{(\beta)}(G)$ имеют вид

$$\left(T^{(\alpha)}(G)\times T^{(\beta)}(G)\right)_{lm,kn}=T^{(\alpha)}_{lk}(G)T^{(\beta)}_{mn}(G)$$

то, очевидно, характер $\chi^{(\alpha,\beta)}(G)$ этого представления равен:

$$\chi^{(\alpha,\beta)}(G)=Sp\left(T^{(\alpha)}(G)\times T^{(\beta)}(G)\right)=\sum_{l}\sum_{n}\left(T^{(\alpha)}(G)\times T(G)^{(\beta)}\right)_{lm,kn}=$$

$$=\sum_{l}\sum_{m}T^{(\alpha)}_{ll}(G)T^{(\beta)}_{mm}(G)=\chi^{(\alpha)}(G)\chi^{(\beta)}(G)$$

Таким образом, характер композиции двух представлений равен произведению характеров сомножителей. Подставляя это в выше полученное выражение, получаем для числа неприводимых представлений:

$$\gamma_{\alpha\beta l} = \frac{1}{g}\sum_{g}\chi^{(l)*}(G)\chi^{(\alpha)}(G)\chi^{(\beta)}(G)$$

Прямое произведение групп

Рассмотрим понятие прямого произведения групп и исследуем неприводимые представления прямого произведения.

Пусть даны две группы: $G^{(1)}$ с элементами $G_{\alpha}^{(1)}$, и $G^{(2)}$ с элементами $G_{\beta}^{(2)}$. Определим новую группу $G^{(1)} \times G^{(2)}$, элементами которой являются пары $\left(G_{\alpha}^{(1)} G_{\beta}^{(2)}\right)$, причём порядок расположения элементов в паре несущественен. Такая группа называется прямым произведением групп $G^{(1)}$ и $G^{(2)}$. Закон умножения для неё определяется следующим образом:

$$\left(G_{\alpha}^{(1)} G_{\beta}^{(2)}\right) \cdot \left(G_{\alpha'}^{(1)} G_{\beta'}^{(2)}\right) = \left(G_{\alpha''}^{(1)} G_{\beta''}^{(2)}\right)$$

где $G_{\alpha''}^{(1)} = G_{\alpha}^{(1)} G_{\alpha'}^{(1)}$; $G_{\beta''}^{(2)} = G_{\beta}^{(2)} G_{\beta'}^{(2)}$. Легко показать, что единичный элемент прямого произведения групп – это пара единичных элементов сомножителей. Обратным элементом по отношению к паре ($G_{\alpha}^{(1)}$, $G_{\beta}^{(2)}$) будет элемент $\left(G_{\alpha}^{(1)-1} G_{\beta}^{(2)-1}\right)$. Если группы $G^{(1)}$ и $G^{(2)}$ являются коммутирующими подгруппами одной и той же группы, то пара элементов ($G_{\alpha}^{(1)}$, $G_{\beta}^{(2)}$) понимается. как результат группового умножения элементов. Можно показать, что из не коммутирующих подгрупп таким образом нельзя составить прямого произведения. Также можно показать, что число классов группы $G^{(1)} \times G^{(2)}$ равно произведению числа классов сомножителей.

Неприводимые представления прямого произведения групп

Рассмотрим две группы: G и H. Пусть заданы два неприводимых матричных представления: $T^{(\alpha)}(G_a)$ группы G и $U^{\beta}(H_b)$ группы H. Покажем, что прямое произведение матриц $\Gamma^{(\alpha\times\beta)} = T^{(\alpha)}(G_a)\times U^{\beta}(H_b)$ также образуют неприводимые представления группы $G\times H$. Согласно определению, прямое произведение $G\times H$ состоит из всевозможных пар произведений $\left(G_a H_b\right)$. Действительно, неприводимость представления $\Gamma^{(\alpha\times\beta)}$ следует из его характера, который согласно установленному выше соотношению, равен произведению характеров представлений $T^{(\alpha)}(G_a)$ и $U^{\beta}(H_b)$:

$$\chi^{(\alpha\times\beta)}(G_a H_b) = \chi^{(\alpha)}(G_a)\chi^{(\beta)}(H_b)$$

Если просуммировать оп всем групповым элементам обеих групп и использовать критерий необходимого и достаточного условия неприводимости в виде $\sum_g \left|\chi^{(\alpha)}\right|^2 = g; \sum_h \left|\chi^{(\beta)}\right|^2 = h$, то получим:

$$\sum_{a,b}\left|\chi^{(\alpha\times\beta)}(G_a H_b)\right|^2 = \sum_a \left|\chi^{(\alpha)}(G_a)\right|^2 \sum_b \left|\chi^{(\beta)}(H_b)\right|^2 = gh$$

Но поскольку gh есть порядок прямого произведения групп G и H, тэеэ группы $G\times H$, отсюда следует, что представление $\Gamma^{(\alpha\times\beta)}$ неприводимо.

Представлениями прямых произведений $\Gamma^{(\alpha\times\beta)}$ исчерпываются все неприводимые представления группы $G\times H$, если α и β пробегают все неприводимые представления G и H. Это просто доказать, если просуммировать квадраты размерностей, пользуясь соотношением:

$$g = \sum_\alpha S_\alpha^2; h = \sum_\beta S_\beta^2$$

$$\sum_{\alpha,\beta}(S_\alpha^2 S_\beta^2) = \sum_\alpha S_\alpha^2 \sum_\beta S_\beta^2 = gh$$

т.е. снова применяя к произведению групп $G \times H$ последнее соотношение, убеждаемся, что $\Gamma^{(\alpha\times\beta)}$ исчерпывает все неэквивалентные непрвидимые представления групп $G \times H$.