

## Лекція 3а. Розповсюдження хвиль та променів через оптичне середовище

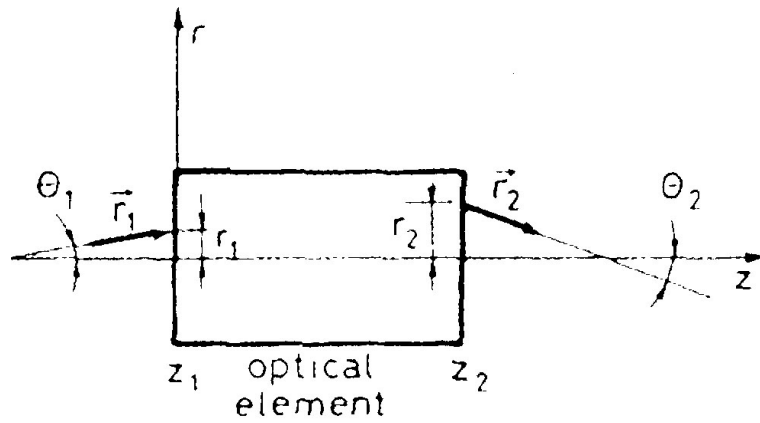
**Матричне формулювання геометричної оптики. Відбивання та пропускання хвиль на діелектричній границі розділу. Багатошарові діелектричні покриття.**

Перед тим, як перейти до детального обговорення оптичних резонаторів (що буде зроблено в окремій лекції), потрібно ввести деякі поняття з геометричної та хвильової оптики, що звичайно не обговорюються у підручниках, але дають корисне підґрунтя. Зокрема буде обговорено, матричне формулювання геометричної оптики, в рамках параксіального наближення та розповсюдження хвиль в рамках параксіально-хвильового наближення, розповсюдження гаусового променя. Також буде розглянута багатократна інтерференція, така як у багатошарових діелектричних покриттях або в інтерферометрі Фабрі-Перо.

### **1. Матричне формулювання геометричної оптики.**

Розглянемо промінь світла, який або пропущений або відбитий від оптичного елемента з взаємною та поляризаційно-незалежною поведінкою (наприклад лінзу або дзеркало). Нехай  $z$  буде оптичною віссю цього елемента (наприклад лінією, що проходить через центри кривизни двох сферичних поверхонь лінзи). Нехай промінь розповсюджується приблизно в  $z$  – напрямку в площині, що містить оптичну вісь. Вектор променю  $\mathbf{r}_1$  у даній вхідній площині  $z = z_1$  оптичного елемента (**Рис. 1**) може бути охарактеризований двома параметрами, а саме, його радіальним зміщенням  $r(z_1)$  від вісі  $z$  та кутовим зміщенням  $\theta_1$ . Подібно до цього вектор променю  $\mathbf{r}_2$  у даній вихідній площині  $z = z_2$  може бути охарактеризований двома параметрами, а саме, його радіальним зміщенням  $r_2(z_2)$  від вісі  $z$  та кутовим зміщенням  $\theta_2$ . Відмітимо, що вісь  $r$  береться тією ж самою як для вхідного так і для вихідного променів і є орієнтованою як показано на **рис. 1**. У відповідності із конвенцією знаків для кутів, кут є позитивним якщо  $\mathbf{r}$  вектор потрібно обертати по годинниковій стрілці, щоби він співпав із позитивним напрямком вісі  $z$ . Таким чином, на рисунку 1  $\theta_1$  є позитивним а  $\theta_2$  негативним.

В рамках параксіального наближення кутові зміщення  $\theta$  вважаються достатньо малими, щоби було справедливим наближення  $\sin \theta \cong \tan \theta \cong \theta$ . В цьому випадку, вихідні  $(r_2, \theta_2)$  та вхідні  $(r_1, \theta_1)$  змінні є зв'язаними лінійним перетворенням.



**Рис. 1.** Матричне формулювання для розповсюдження променю через узагальнений оптичний елемент.

Якщо ми покладемо  $\theta_1 \cong (dr_1/dz_1)_{z_1} = r_1'$  та  $\theta_2 \cong (dr_2/dz_2)_{z_2} = r_2'$ , ми можемо записати

$$r_2 = Ar_1 + Br_1' \quad (1a)$$

$$r_2' = Cr_1 + Dr_1' \quad (1б)$$

Де  $ABCD$  є константами, характеристичними для даного оптичного елемента. У матричному формулюванні, є природним записати рівняння (1) як:

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ r_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_1' \end{pmatrix} \quad (2)$$

Де  $ABCD$  матриця повністю характеризує даний оптичний елемент в межах наближення параксіальних променів.

Як перший і найпростіший випадок, ми розглянемо розповсюдження у вільному просторі променю вздовж довжини  $\Delta z = L$  матеріалу з показником заломлення  $n$  (**Рис. 2а**). Якщо вхідні і вихідні площини знаходяться поза середовищем, у середовищі з показником заломлення рівним одиниці, з використанням закону Снелла у параксіальному наближенні ми отримаємо:

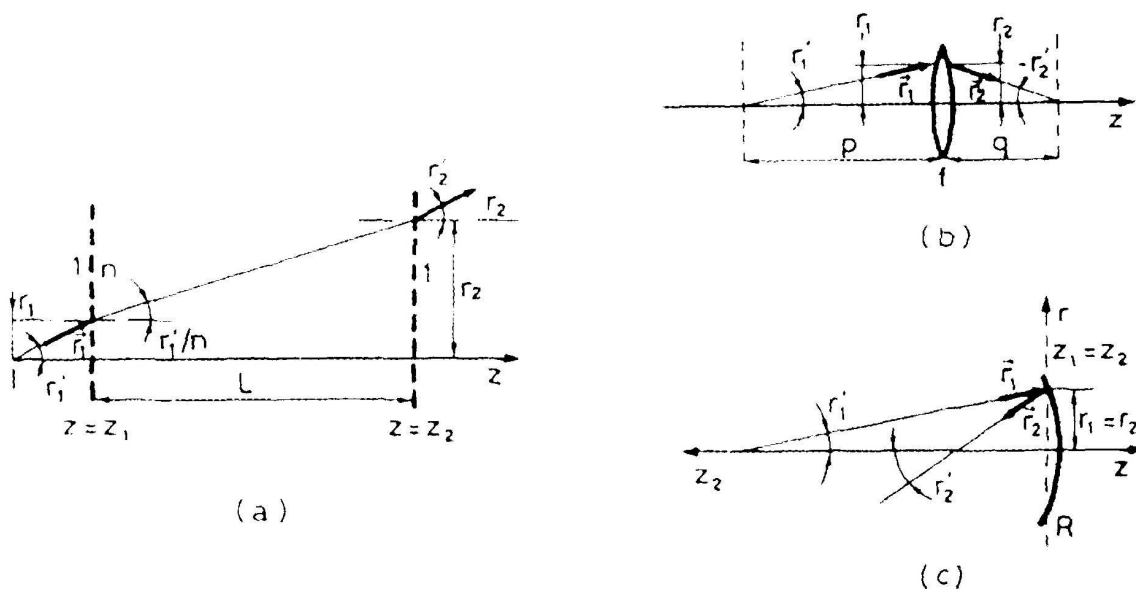
$$r_2 = r_1 + \frac{Lr_1'}{n} \quad (3a)$$

$$r_2' = r_1' \quad (3б)$$

Відповідна  $ABCD$  матриця є таким чином:

$$\begin{vmatrix} 1 & L/n \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (4)$$

В наступному прикладі ми розглянемо розповсюдження променю через лінзу з фокальною довжиною  $f$  ( $f$  є взятим позитивним для фокусуючої лінзи). У випадку тонкої лінзи, ми очевидно маємо (**Рис. 2б**).



**Рис. 2.** Обчислення матриці  $ABCD$  для (а) розповсюдженні у вільному просторі, (б) розповсюдженні через тонку лінзу, в) відбиття від сферичного дзеркала.

$$r_2 = r_1 \quad (5a)$$

Друге співвідношення отримується з відомого закону геометричної оптики,  $(1/p) + (1/q) = (1/f)$ , використав той факт, що  $p = r_1 / r_1'$  та  $q = -r_2 / r_2'$ . Використав також рівняння (5а), ми отримуємо

$$r_2' = -\left(\frac{1}{f}\right)r_1 + r_1' \quad (5б)$$

У відповідності з рівняннями (5), в цьому випадку матриця  $ABCD$ :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{vmatrix} \quad (6)$$

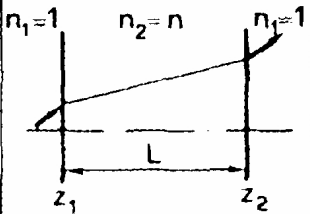
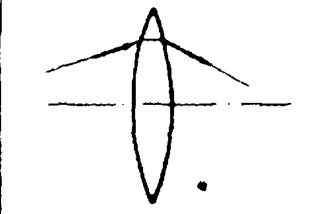
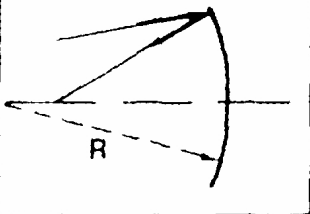
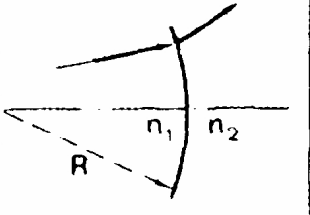
Як третій приклад ми розглянемо відбиття променю сферичним дзеркалом з радіусом кривизни  $R$  ( $R$  береться позитивним для угнутого дзеркала). В цьому випадку площини  $z_1$  та  $z_2$  вважаються співпадаючими і розміщеними прямо перед дзеркалом, і позитивний напрям вісі  $r$  взятий однаковим для падаючого та відбитого променів (**рис. 2в**). Позитивний напрямок вісі  $z$  взятий як зліва направо для падаючого вектору та справа наліво для відбитого вектору. Кут для падаючого вектору позитивний якщо вектор  $\mathbf{r}_1$  повинен повертатися по годинниковій стрілці, в той же час для відбитого променю позитивний якщо вектор  $\mathbf{r}_2$  повинен повертатися проти годинниковій стрілці для того щоби співпасти із позитивним напрямком  $z_2$  — напрямком вісі  $z$ ; наприклад,  $r_1'$  — позитивний, тоді як  $r_2'$  негативний на **рис. 2в**. З цими конвенціями, матриця променів для угнутого дзеркала з кривизною  $R$  та фокальною довжиною  $f = R/2$  може бути легко показана ідентичною позитивній лінзі з фокальною довжиною  $f = R/2$ . Матриця променів таким чином дорівнює:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{vmatrix} \quad (7)$$

**Таблиця 1** показує матриці променів для розглянутих оптичних елементів, а також для сферичної діелектричної матриці. Відмітимо, що детермінант матриці  $ABCD$  дорівнює одиниці:

$$AD - BC \quad (8)$$

При забезпеченні, що вхідна та вихідна площини знаходяться в середовищі з однаковим показником заломлення. Це справедливо для розглянутих перших трьох прикладів таблиці 1.

Free-space propagation		$\begin{bmatrix} 1 & \frac{L}{n} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Thin lens		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix}$
Spherical mirror		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{bmatrix}$
Spherical dielectric interface		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_2 - n_1}{n_2} & \frac{1}{R} \end{bmatrix}$

Таблиця 1 . Матриці променю для деяких загальних випадків.

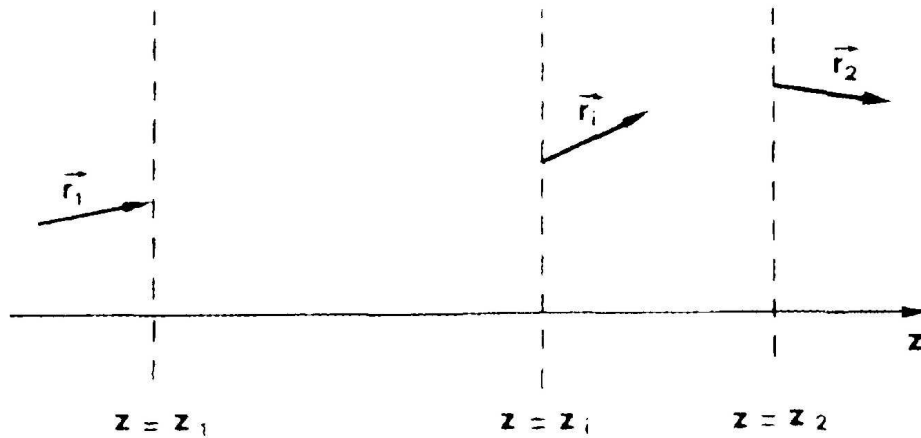
Оскільки матриці елементарних оптичних елементів є відомими, то можна отримати загальну матрицю більш складного оптичного елементу якщо розділити його на ці елементарні компоненти. Припустимо, що в межах даного оптичного елементу, ми можемо розглядати проміжну площину з координатою  $z_i$  (**Рис. 3**), таку, що відомі дві  $ABCD$  матриці, між площинами  $z = z_1$  та  $z = z_i$  та  $z = z_i$  і  $z = z_2$ . Якщо  $r_i$  та  $r_i'$  є координатами хвильового вектору в площині  $z = z_i$ , ми очевидно можемо написати

$$\begin{bmatrix} r_i \\ r_i' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_1 \\ r_1' \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} r_2 \\ r_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_i \\ r_i' \end{bmatrix} \quad (10)$$

Якщо ми підставимо рівняння (9) для вектору  $\mathbf{r}_i$  в праву частину рівняння (10) ми отримаємо

$$\begin{vmatrix} r_2 \\ r_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} r_1 \\ r_1' \end{vmatrix} \quad (11)$$



**Рис. 3.** Розповсюдження променю через три площини, коли відомі дві матриці між площинами  $z = z_1$  і  $z = z_i$  та між  $z = z_i$  і  $z = z_2$ .

Загальна матриця  $ABCD$  може бути таким чином отримана множенням матриць  $ABCD$  елементарних компонент. Відзначимо, що порядок в якому з'являються матриці є протилежним порядку в якому відповідні оптичні елементи перетинаються променем світла.

Як перший і мабуть тривіальний приклад використання попереднього результату, розглянемо розповсюдження у вільному просторі з довжиною  $L_1$  за яким слідує знову розповсюдження у вільному просторі з довжиною  $L_2$  в середовищі з показником заломлення  $n$ . У відповідності з рівнянням (4) загальне рівняння матриці може бути написано як:

$$\begin{vmatrix} r_2 \\ r_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & L_2/n \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & L_1/n \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} r_1 \\ r_1' \end{vmatrix} \quad (12)$$

Використав відомі правила множення матриць добуток двох квадратних матриць отримується як загальна матриця:

$$\begin{vmatrix} 1 & (L_1 + L_2)/n \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (13)$$

Це обчислення підтверджує очевидний результат, що загальне розповсюдження є еквівалентним розповсюдженню у вільному просторі з загальною довжиною  $L = L_1 + L_2$ .

Менш тривіальний результат і більш корисний включає вільне розповсюдження на довжину  $L$  (в середовищі з показником заломлення

$n=1$ ) за яким слідує відбивання від дзеркала з радіусом кривизни  $R$ . У відповідності з рівняннями (4), (7) та (11) загальна матриця  $ABCD$  дається:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -(2/R) & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & L \\ -(2/R) & 1-(2/R) \end{vmatrix} \quad (14)$$

Відзначимо, що детермінанти матриць (13) та (14) унітарні (дорівнюють 1), і цей результат зберігається для будь-якого довільного набору оптичних елементів, оскільки матричний добуток є добутком їх детермінантів.

Зараз перейдемо до питання знаходження матриці променів елементів  $A', B', C', D'$ , для зворотного розповсюдження через оптичну систему в термінах матричних елементів  $A, B, C, D$  для прямого розповсюдження. Якщо ми візьмемо  $-\mathbf{r}_2$  як вхідний вектор (див. **рис. 1.**), тобто якщо ми обернемо напрямок розповсюдження вектору  $\mathbf{r}_2$ , оді вихідним вектором повинен бути  $-\mathbf{r}_1$ .

Для зворотного розповсюдження ми використаємо ту ж конвенцію знаків, що була використана для променя відбитого від сферичного дзеркала (**Рис. 2в**), а саме:  $z$  – вісь обернена, в той же час вісь  $r$  залишається незмінною, і кут між вектором  $\mathbf{r}$  віссю  $z$  є позитивним якщо вектор  $\mathbf{r}$  потрібно повернути супротив годинникової стрілки для спів падіння із віссю  $z$ . При даних конвенціях, промені  $-\mathbf{r}_1$  та  $-\mathbf{r}_2$  описуються координатами  $(r_1, -r_1')$  та  $(r_2, -r_2')$ , відповідно. Таким чином маємо:

$$\begin{vmatrix} r_1 \\ -r_1' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} r_2 \\ -r_2' \end{vmatrix} \quad (15)$$

З рівняння (15) ми можемо отримати  $r_2$  та  $r_2'$  як функцію  $r_1$  та  $r_1'$ . Оскільки детермінант матриці  $A'B'C'D'$  також є унітарним (дорівнює одиниці), ми отримаємо:

$$r_2 = D'r_1 + B'r_1' \quad (16a)$$

$$r_2' = C'r_1 + A'r_1' \quad (16b)$$

Порівняння між рівняннями (16) та (1) показує, що  $A' = D$ ,  $B' = B$ ,  $C' = C$ ,  $D' = A$ , так що матриця загальна  $A'B'C'D'$  є

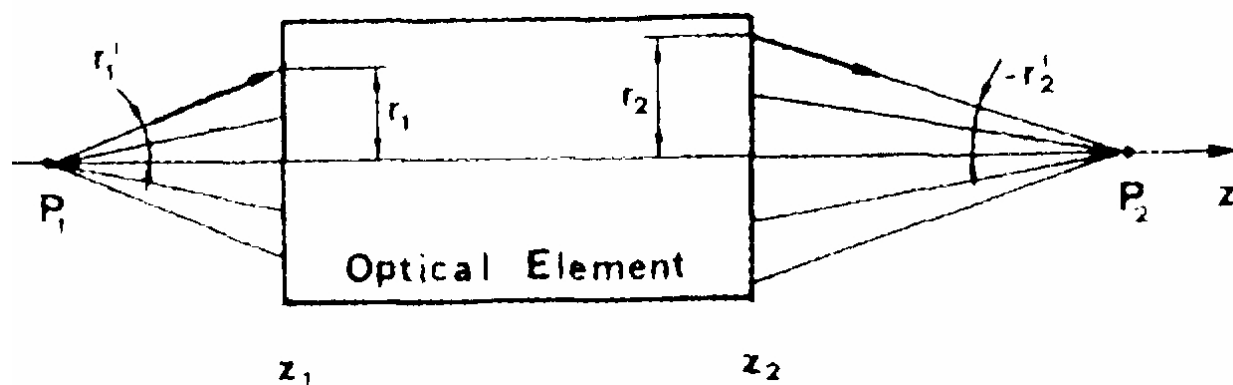
$$\begin{vmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} D & B \\ C & A \end{vmatrix} \quad (17)$$

Рівняння (17) показує таким чином, що матриця для зворотного розповсюдження отримана з матриці прямого розповсюдження взаємозаміною матричних елементів  $A$  та  $D$ .

Матричне формулювання є корисним не тільки для опису поведінки променя коли він проходить через оптичну систему, але воно також може бути використано для опису проходження сферичної хвилі. Розглянемо сферичну хвилю, що починається у точці  $P_1$  (**Рис. 4.**) і яка розповсюджується в позитивному напрямку  $z$ . Після проходження оптичного елемента, що описується даною  $ABCD$  матрицею, ця хвиля загалом кажучи перетворюється у нову сферичну хвилю з центром у точці  $P_2$ . Розглянемо два зв'язані промені  $\mathbf{r}_1$  та  $\mathbf{r}_2$  двох хвиль, що означає, що оптичний елемент перетворює падаючий (або вхідний) промінь  $\mathbf{r}_1$  у вихідний промінь  $\mathbf{r}_2$ . Радіуси кривизни  $R_1$  та  $R_2$  двох хвиль на вхідній площині  $z_1$  та вихідній площині  $z_2$  даються виразами

$$R_1 = \frac{r_1}{r_1'} \quad (18a)$$

$$R_2 = \frac{r_2}{r_2'} \quad (18b)$$



**Рис. 4.** Розповсюдження сферичної хвилі, що випромінюється з точки  $P_1$  через загальний оптичний елемент, що описується даною матрицею  $ABCD$

Відмітимо, що в рівняннях (18) було використано конвенцію, що  $R$  позитивний, якщо центр кривизни знаходиться зліва від фронту хвилі. З рівнянь (1) та (18) отримаємо

$$R_2 = \frac{AR_1 + B}{CR_1 + D} \quad (19)$$



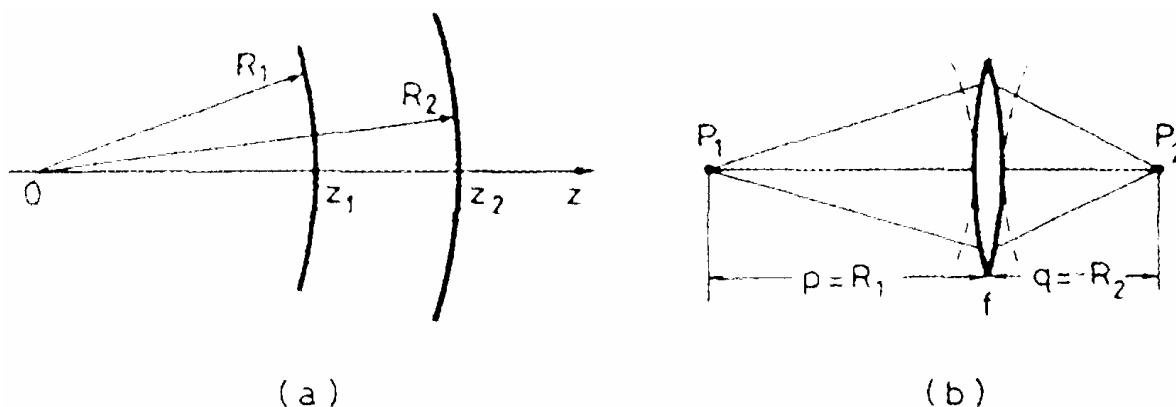
Рівняння (19) є дуже важливим результатом, оскільки воно зв'язує, простичином радіус кривизни  $R_2$  вихідної хвилі з радіусом кривизни  $R_1$  вхідної хвилі через  $ABCD$  матричні елементи даного оптичного компоненту.

Як перший елементарний приклад використання цього результату, розглянемо розповсюдження у вільному просторі сферичної хвилі між точками, які мають координати  $z_1$  та  $z_2$  на **рис. 5а**. З рівняння (4), з  $n=1$  та  $L = z_2 - z_1$  і рівняння (19) ми отримаємо  $R_2 = R_1 + (z_2 - z_1)$ , що є безумовно очевидним результатом. Далі розглянемо розповсюдження сферичної хвилі через тонку лінзу (**рис. 5б**). З рівнянь (6) та (19) отримаємо

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{f} \quad (20)$$

Що просто відповідає знайомому закону геометричної оптики  $p^{-1} + q^{-1} = f^{-1}$ .

Хоча два приклади на **рис. 5** є елементарними застосуваннями рівняння (19), корисність цього рівняння може бути оціненою, при справах з більш складними оптичними системами, зробленими, наприклад з послідовності лінз та простору між ними. В цьому випадку, загальна матриця  $ABCD$  дається добутком матриць кожної оптичної компоненти і радіус кривизни вихідної хвилі легко отримується з рівняння (19).



**Рис. 5.** Розповсюдження сферичної хвилі (а) через вільний простір (б) через тонку лінзу.

## 2. Відбивання та пропускання хвиль на діелектричній границі розділу.

Розглянемо хвилю, яка падає на границю розділу двох середовищ з показниками заломлення  $n_1$  та  $n_2$ . Якщо хвиля спочатку є у середовищі з показником заломлення  $n_1$  і нормально падає на поверхню, то відбивання електричного поля дається виразом

$$r_{12} = \frac{(n_1 - n_2)}{(n_1 + n_2)} \quad (21)$$

А пропускання поля дається

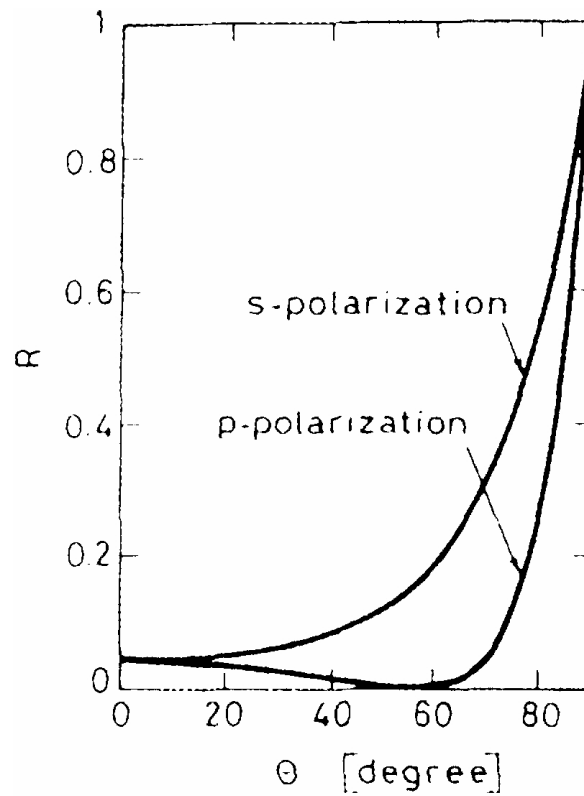
$$t_{12} = \frac{2n_1}{(n_1 + n_2)} \quad (22)$$

Відмітимо, що якщо  $n_1 < n_2$  маємо  $r_{12} < 0$ , це означає, що відбите поле маємо зсув фази  $\pi$  по відношенню до падаючого поля. Коли  $n_1 > n_2$ , тоді  $r_{12} > 0$ , так що на має зсуву фази при відбиванні. Ми також відзначимо, що у відповідності з рівнянням (22), завжди маємо  $t_{12} > 0$ , тобто не має зсуву фази при пропусканні.

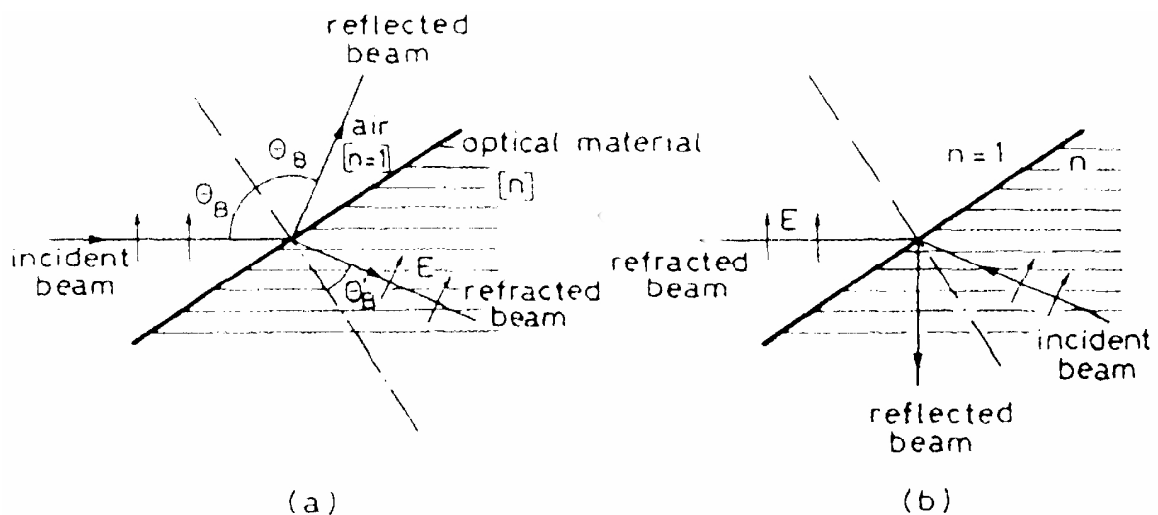
Для падінні не по нормалі, вирази для пропускання та відбивання електричного поля стають більш складними, і вони також залежать від поляризації поля. Як приклад на **рис. 6** показано інтенсивність відбиття, або відбиття,  $R = (r_{12})^2$  в залежності від кута падіння  $\theta$  для  $p$  – поляризованої хвилі (поле  $E$  у площині падіння) і для  $s$  – поляризованої хвилі (поле  $E$  ортогонально площині падіння), для  $n_1 = 1$  і  $n_2 = 1.52$ . Для  $\theta = 0$  обидва відбиття є очевидно рівними і у відповідності з (21) мають значення  $R = 4.26\%$ . Відмітимо, що для  $p$  – поляризованої хвилі існує кут ( $\theta_B = 56.7^\circ$  на рис 6) для котрого  $R = 0$ .

Ситуація в цьому випадку може бути описана за допомогою **рис. 7**. Припустимо, що кут падіння  $\theta_B$  є таким, що заломлений промінь є ортогональним відбитому променю. Поле  $E$  в оптичному матеріалі і відповідно його вектор поляризації є таким чином паралельні напрямку відбивання. Оскільки відбитий промінь може вважатися походячим з радіації емітованої вектором поляризації середовища де відбувається заломлення, то такий відбитий промінь буде дорівнювати нулю в цьому випадку, оскільки електричний диполь не випромінює вздовж свого напрямку. Обчислення на основі геометричної оптики дає вираз для кута падіння  $\theta_B$ , відомим як кут Брюстера або поляризаційним кутом. У відповідності із попереднім обговоренням маємо

$$\theta'_B + \theta_B = \frac{\pi}{2} \quad (23)$$



**Рис. 6.** Відбиття інтенсивності  $R$  від кута падіння  $\theta$  на границі розділу між повітрям та середовищем з показником заломлення  $n=1.5$ . Дві криві відповідають випадкам поляризації поля  $E$  у площині падіння ( $p$  – поляризація) і ортогональній до цієї площини ( $s$  – поляризація).



**Рис. 7.** Відбиті і заломлені промені для випадку падіння під кутом Брюстера; (а) падіння з менш щільного середовища і (б) падіння з більш щільного середовища

Де  $\theta'_B$  є кут заломленого променя. З закону Снела ми також маємо

$$n \sin \theta'_B = \sin \theta_B \quad (24)$$

Оскільки у відповідності з рівнянням (23) маємо  $\sin \theta'_B = \cos \theta_B$ , з рівняння (24) ми отримаємо наступний вираз для кута Брюстера:

$$\tan \theta_B = n \quad (25)$$

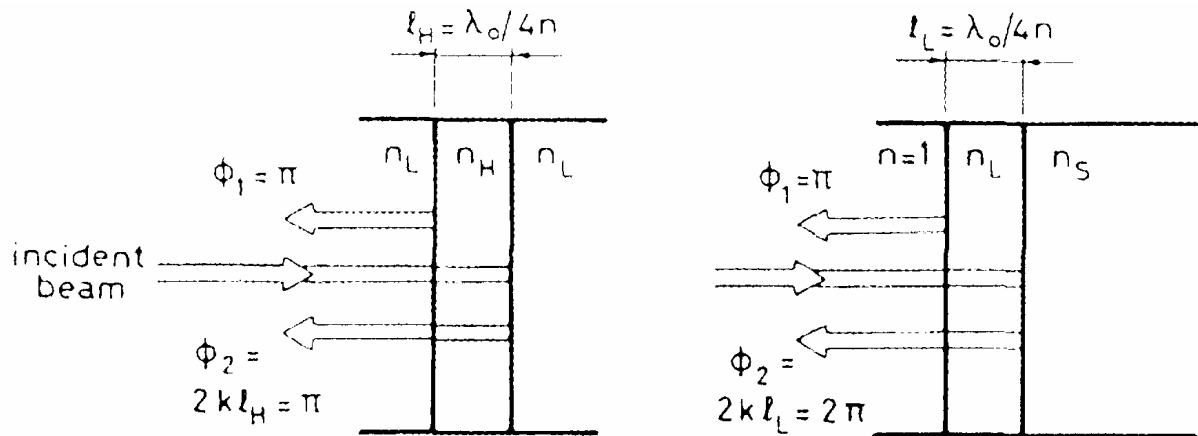
Відмітимо, що якщо напрямок променів стає зворотнім (**Рис. 76**), відбитий промінь знову нуль, оскільки заломлений та відбитий промені ортогональні. Тоді, якщо плоско-паралельна пластина даного оптичного матеріалу вставляється під кутом Брюстера у промінь поляризований в площині рис. 4.7, ніякого відбиття не відбувається на двох поверхнях пластини. Нехай плоско-паралельна пластина з показником заломлення  $n = 1.52$ , вставлена під кутом Брюстера в оптичній порожнині. У відповідності з **рис. 6** відбиття  $s$  – поляризованого променя на кожній з границь розділу є  $R \cong 15\%$ . Таким чином  $s$  – поляризований промінь має 30% втрати із-за відбивання на цих границях розділу. Якщо підсилення лазера менше ніж 30%,  $s$  – поляризація не буде осмілювати, так що лазерний промінь буде лінійно поляризований у площині падіння на пластину.

### **3. Багатошарові діелектричні покриття.**

Поверхні дзеркал, що використовуються як дзеркала з високим відбиттям або розщеплювачі променів, звичайно виготовляються нанесенням багатошарових діелектричних структур на оптичну поверхню, плоску або викривлену, матеріалу підкладки, наприклад скла. Така ж сама методика може бути використана для зниження відбивання поверхні оптичних компонент (анті відбиваючі покриття) або для виробництва таких оптичних елементів як інтерференційні фільтри або поляризатори. Покриття звичайно робиться у вакуумній камері шляхом напилення потрібних діелектричних матеріалів, які конденсуються в шар на підкладці. Широке використання багатошарових покриттів для лазерних оптичних компонентів впливає з факту, що ці шари зроблені з прозорих матеріалів, які спроможні витримати високі інтенсивності лазерних променів. Це знаходиться у контрасті з поведінкою тонких металевих шарів (наприклад,  $Ag$  або  $Au$ ), також отриманих вакуумним нанесенням і які часто використовують для звичайних оптичних компонент. В дійсності, метали та шари металів мають високе поглинання (5-10%) від ближньої ІЧ області до області ультрафіолету і вони звичайно не використовуються як матеріали для лазерних дзеркал. Але потрібно зазначити, що втрати на поглинання, для цих матеріалів, є набагато меншими у середній - далекій ІЧ області, наприклад на довжині хвилі  $CO_2$  лазера. Таким чином, мідні дзеркала з золотим покриттям, що

мають високе відбивання, або більш просто, поліровані мідні дзеркала використовуються в цій області довжин хвиль.

Розглянемо оптичну підкладку, таку як скло, яка покрита деяким числом шарів, що мають чергово високі  $n_H$  та низькі  $n_L$  показники заломлення у порівнянні з показником підкладки  $n_S$ . Якщо товщина шарів  $l_H$  та  $l_L$  така, що  $n_H l_H = n_L l_L = \lambda_0 / 4$ , де  $\lambda_0$  - довжина хвилі, то електричне поле що відбивається на всіх границях розділу, для падаючого променя з довжиною хвилі  $\lambda = \lambda_0$ , додаються у фазі. Розглянемо для прикладу дві границі розділу шару з високим показником заломлення (**рис. 8а**).



**Рис. 8.** а- перші два відбиття на двох границях розділу шару з високим показником заломлення в багатшаровому діелектричному покритті. (б) перші два відбиття на двох границях розділу шару з низьким показником заломлення в одношаровому анти-відбиваючому покритті. Багатократні відбиття також відбуваються (див., наприклад випадок інтерферометра Фабрі-Перо), але вони не показані на рисунках.

У відповідності з рівнянням (21) відбиття електричного поля на границі розділу низький-високий показник заломлення має негативний знак і електричне поле має фазовий зсув  $\phi_1 = \pi$  при відбитті. Навпаки, відбиття при границі розділу високий-низький показник заломлення є позитивним і немає зсуву фаз відбитої хвилі. Якщо оптична товщина  $n_H l_H$  шару дорівнює  $\lambda_0 / 4$ , фазовий зсув після кругової подорожі у шарі з високим показником заломлення буде

$$\phi_2 = 2kl_H = \left( \frac{2\pi n_H}{\lambda} \right) l_H = \pi$$

Це означає, що дві відбиті хвилі мають ту ж саму фазу і відповідні поля будуть додаватися. Ми можемо легко показати, що той же самий висновок є застосовним і до двох границь шару з низьким показником заломлення. Тоді

з цього випливає, що всі відбиті промені у багат шаровому покритті, а також їх багатократні відбивання додаються у фазі. Таким чином, якщо достатня кількість ( $\lambda/4$ ) з чергуючимися шарами з високим та низьким значенням показників заломлення будуть нанесені, загальне відбиття завдяки всім багатократним відбиттям досягне дуже високого значення.

**Приклад 1.** Обчислення піку відбиття у багат шаровому діелектричному покритті. Розглянемо  $TiO_2$  та  $SiO_2$  як матеріали з високим та низьким показником заломлення, відповідно. На довжині хвилі  $\lambda_0 = 1.064 \mu m$   $Nd:YAG$  лазеру ми можемо взяти  $n_H = 2.28$  та  $n_L = 1.45$ . Якщо взяти скло  $BK-7$  як матеріал підкладки, то  $n_S \cong 1.54$ . З рівняння (26) ми отримаємо  $R \cong 61.8\%$  для  $J = 3$  і  $R = 99.8\%$  для  $J = 15$ . Відмітимо, що відбиття на одній границі розділу, у відповідності з рівнянням (21) дає в нашому випадку  $[(n_H - n_L)(n_H + n_L)]^2 = 4.9\%$ .

Якщо багат шарова структура починається і закінчується з шаром з високим показником заломлення, так, що є непарне число  $J$  шарів, то відбиття потужності (на  $\lambda = \lambda_0$ ) дається виразом

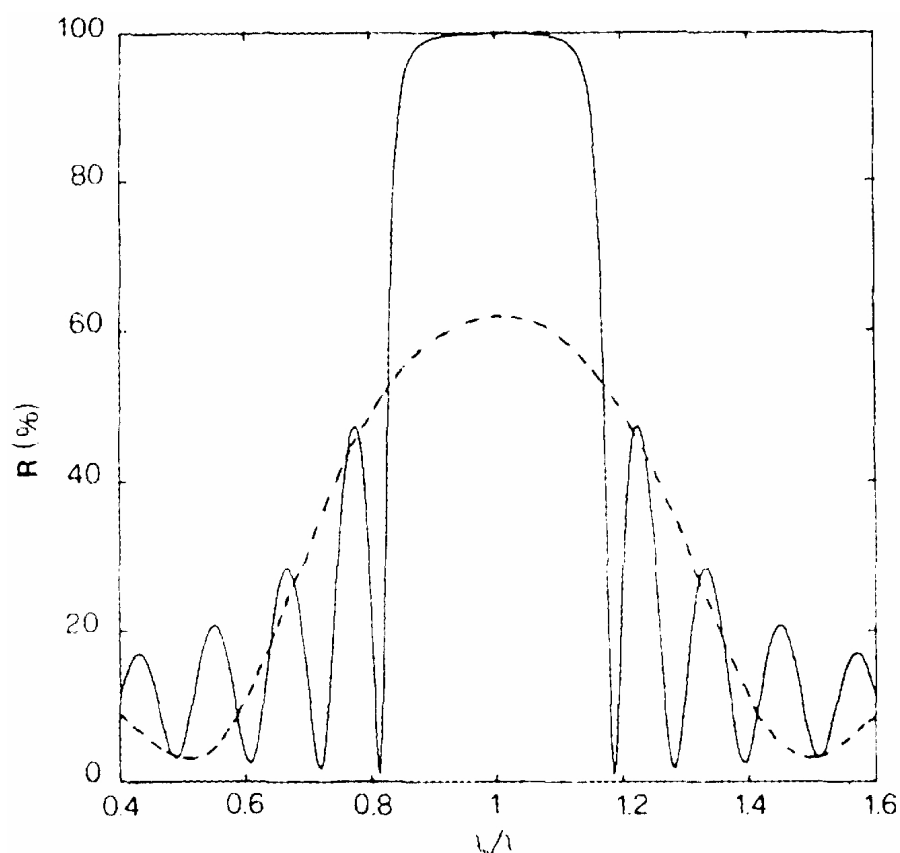
$$R(\lambda_0) = \left( \frac{n_H^{J+1} - n_L^{J-1} n_S}{n_H^{J+1} + n_L^{J-1} n_S} \right)^2 \quad (26)$$

Якщо довжина хвилі падаючої хвилі є відмінною від  $\lambda_0$ , відбиття є звичайно меншим, ніж значення, що дається рівнянням (26). Як представницький приклад **рис. 9** показує криві відбиття від довжини хвилі для  $J = 15$  та  $J = 3$ . Відмітимо, що із зростанням числа шарів, пік відбиття очевидно зростає і область високого відбиття стає ширшою і має гостріші краї. З кривої високого відбиття, можна також спостерігати, що високе відбиття підтримується в області довжин хвиль  $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 \cong \pm(10\%) \lambda_0$ .

Для зменшення відбиття даної оптичної поверхні може бути використаний один шар покриття матеріалом з показником заломлення нижчим ніж той що у підкладки. Оскільки  $n_L < n_S$ , то можна бачити з рис. 8б, що перші два відбиття зараз мають протилежні фази якщо  $n_L l_L = \lambda_0 / 4$ . Загальне відбиття є таким чином зменшеним, якщо взяти до уваги всі багатократні відбиття, то можна показати, що відбиття на  $\lambda = \lambda_0$  дається:

$$R = \left[ \frac{(n_S - n_L^2)}{(n_S + n_L^2)} \right]^2 \quad (27)$$

З цього рівняння можна бачити, що нуль відбиття отримується коли  $n_L = (n_S)^{1/2}$ , умова яку важко досягти на практиці, із-за обмеженого числа матеріалів з достатньо малим показником заломлення.



**Рис. 9.** Залежності відбиття в залежності від довжини хвилі для багат шарових структур з  $\lambda/4$  з  $TiO_2$  та  $SiO_2$  для загального числа шарів 3 (пунктирна крива) та 15 (неперервна крива) (підкладка – скло ВК – 7).

Мінімум відбиття, що дається виразом (27) відповідає  $\lambda = \lambda_0$ . Ширина області з малим відбиттям для покриття з одного шару є дуже великою. Наприклад, якщо  $\lambda_0$  відповідає середині видимої області, відбивання зменшується до значення яке нижче відбиття поверхні без покриття для всієї видимої області.

Дуже часто для лазерних застосувань, потрібні значення відбиття навіть нижчі ніж ті, що розглянуті у прикладі (2) (на рівні 0.1%). Це досягається використанням більш ніж одного шару в структурі анти-відбиваючого покриття. Часто використовують покриття, яке складається з двох шарів  $\lambda/4$  з високим та низьким значення показників заломлення матеріалів з послідовністю  $n_S/n_L/n_H$ . Дуже твердим і з високим терміном експлуатації є двошарове покриття, що складається з  $ZrO_2$  ( $n_H = 2.1$ ) та  $MgF_2$  ( $n_L = 1.38$ ). Область низького відбиття зменшується для цього типу

покрить; крива відбиття від довжини хвилі показує гострий  $V$  – подібний мінімум. Таке покриття звичайно називають  $V$  – покриттям.

**Приклад 2.** Одношарове анти-відбиваюче покриття лазерних матеріалів. Розглянемо підкладку із скла  $BK-7$ , яка має  $n_s = 1.54$  при  $\lambda = 1.06 \text{ мкм}$ . Для того, щоби досягти нульове відбиття за допомогою одного шару, показник заломлення матеріалу шару повинен бути  $n_L = (n_s)^{1/2} \cong 1.24$ . Матеріал з найнижчим показником заломлення, який забезпечує стабільну плівку є  $MgF_2$  (флюорит) з  $n_L = 1.38$ . З рівняння (27) ми отримаємо  $R \cong 1.24$ . Хоча це і не нуль, але це все ще менше ніж відбиття вільної поверхні підкладки, яке, у відповідності з рівнянням (21), дається  $R = [(n_s - 1)/(n_s + 1)]^2 = 4.5\%$ . Але флюорит є достатньо м'яким матеріалом, його легко можна пошкодити. Наступним розглянемо стрижень  $Nd:YAG$  ( $n_s = 1.82$ ) та  $\lambda/4$  шар  $SiO_2$  достатньо твердий та зносостійкий матеріал ( $n_L = 1.45$ ) для анти-відбиваючого покриття. З рівняння (27) ми маємо в цьому випадку  $R = 3.4\%$ , що все ще далеко від потрібного, але менше відбиття вільної поверхні підкладки ( $R \cong 8.5\%$ ). Відзначимо, що флюорит в цьому випадку забезпечує потрібне, оскільки відбиття у відповідності з рівнянням (27) зменшується до  $R \cong 4 \times 10^{-4}$ .

## 5. Інтерферометр Фабрі-Перо.

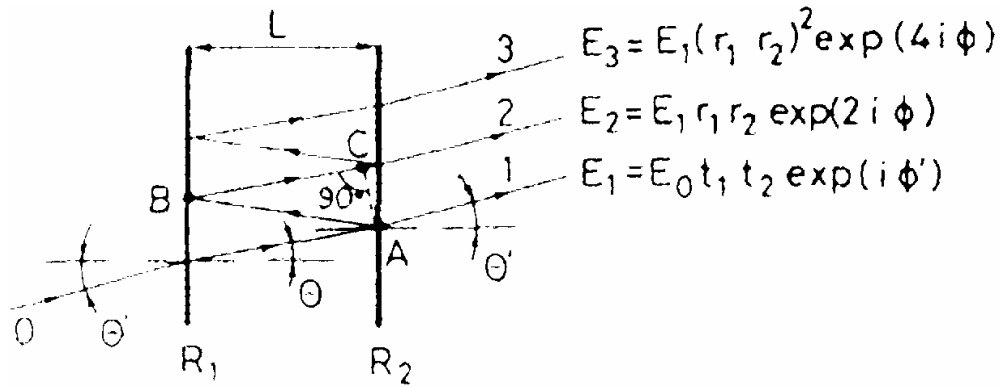
Розглянемо інший приклад багатопроменевої інтерференції, випадок інтерферометра Фабрі-Перо (ФП). Цей інтерферометр (запропонований у 1899 році) грає важливу роль у лазерній фізиці по трьох причинах:

- на фундаментальному рівні, його фізична поведінка формує базис оптичних резонаторів.
- він часто використовується як частотно-селективний елемент лазерної порожнини.
- Він часто використовується як спектрометр для аналізу спектру світла випроміненого лазером.

### Властивості інтерферометра Фабрі-Перо.

Інтерферометр ФП складається з двох плоских або сферичних дзеркал з відбиттям потужності  $R_1$  та  $R_2$ , які розділені відстанню  $L$  і містять середовище з показником заломлення  $n_r$ . Хоча для отримання найвищих параметрів застосовують сферичні дзеркала, ми розглянемо більш простий випадок двох плоских і паралельних дзеркал. Нехай плоска хвиля з частотою  $\nu$  падає на інтерферометр у напрямку під кутом  $\theta'$  до нормалі до двох дзеркал (рис. 10).





**Рис. 10.** Багатопроменева інтерференція в інтерферометрі Фабрі-Перо.

Вихідний промінь, який покидає інтерферометр складається з суперпозиції променя що проходить один раз між двома дзеркалами (промінь 1 на **рис. 10**) з променями що утворюються завдяки всім багатократним відбиттям (два з котрих є промені 2 та 3 на рисунку). Таким чином амплітуда електричного поля вихідного променю,  $E_t$  отримується підсумовуванням амплітуд  $E_l$  всіх цих променів, беручи до уваги їх відповідні фазові зсуви. Для ілюстрації цього, електричні поля перших трьох променів також показані на рисунку. Якщо всі багатократні відбиття взяти до уваги, отримуємо

$$E_t = \sum_l E_l = [E_0 t_1 t_2 \exp(j\phi')] \sum_m (r_1 r_2)^m \exp(2mj\phi) \quad (28)$$

В рівняннях (28) та **рис. 10**,  $E_0$  є амплітуда променю, що падає на інтерферометр;  $t_1$  та  $t_2$  пропускання електричного поля двома дзеркалами, і  $r_1$  та  $r_2$  є відповідні коефіцієнти відбиття електричного поля, відповідно;  $\phi'$  - є зсувом фаз для одного проходу, який включає будь-який зсув при проході між двома дзеркалами;  $2\phi$  є різниця фаз між послідовними багатократними відбиваннями, що дається  $2\phi = kL_S = 2kL \cos \theta = (4\pi n_r v / c) L \cos \theta$ , де  $L_S$  є сума довжин сегментів  $AB$  та  $BC$  на **рис. 10**. і кут  $\theta$  є зв'язаним з кутом падіння  $\theta'$  законом Снелла ( $n_r \sin \theta = \sin \theta'$ ). Відмітимо, що попередній вираз може для спрощення бути перетвореним у:

$$\phi = \frac{2\pi L' v}{c} \quad (29)$$

Де:

$$L' = n_r L \cos \theta \quad (30)$$

Геометричний ряд у виразі (28) може бути підсумований і отримаємо

$$E_t = E_0 e^{j\phi'} \frac{t_1 t_2}{1 - (r_1 r_2) \exp(2j\phi)} \quad (31)$$

Пропускання потужності  $T$  інтерферометром дається  $T = |E_t|^2 / |E_0|^2$ ; з рівняння (31) отримаємо

$$T = \frac{t_1^2 t_2^2}{1 - 2r_1 r_2 \cos(2\phi) + r_1^2 r_2^2} \quad (33)$$

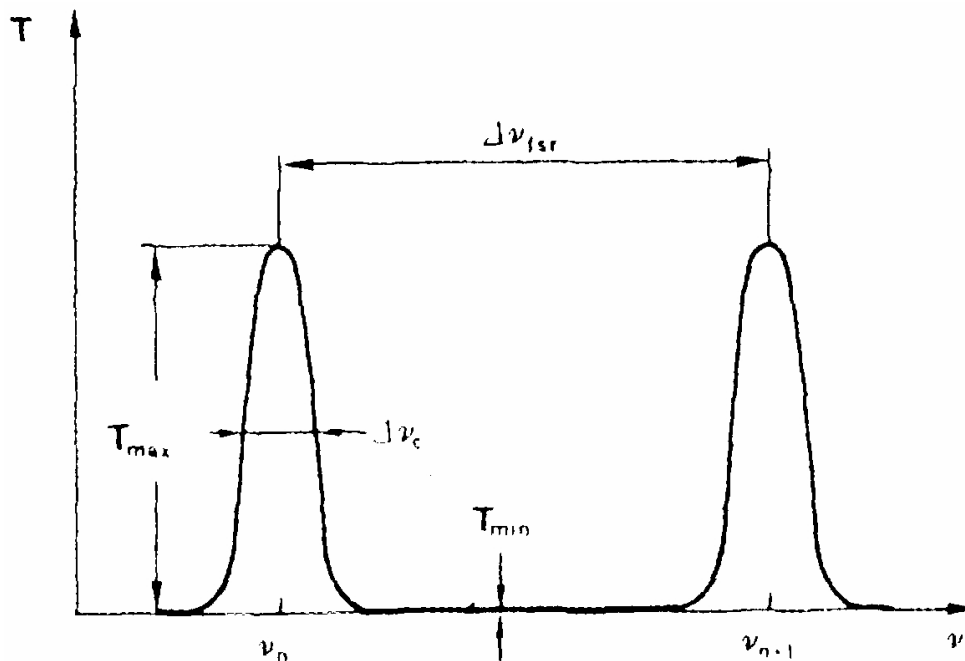
Оскільки  $R_1 = r_1^2$ ,  $R_2 = r_2^2$  і для дзеркала без втрат,  $t_1^2 = 1 - r_1^2 = 1 - R_1$  і  $t_2^2 = 1 - r_2^2 = 1 - R_2$ , рівняння (33) може бути перетворено у:

$$T = \frac{(1 - R_1)(1 - R_2)}{\left[1 - (R_1 R_2)^{1/2}\right]^2 + 4(R_1 R_2)^{1/2} \sin^2 \phi} \quad (34)$$

Що є остаточним результатом нашого обчислення.

Для ілюстрації властивостей інтерферометра ФП рис. 11 показує залежність  $T$  від частоти падаючої хвилі, для  $R_1 = R_2 = 64\%$ . Ця залежність отримана з рівняння (34) з рівнянням (29) для  $\phi$ . Ця крива складається з послідовності рівно розташованих один від одного максимумів. Ці максимуми з'являються коли  $\sin^2 \phi = 0$  в рівнянні (34), тобто коли  $\phi = m\pi$ , де  $m$  - позитивне ціле число. За допомогою рівняння (29) частоти  $\nu_m$  цих максимумів отримуються як:

$$\nu_m = \frac{mc}{2L'} \quad (35)$$



**Рис. 11.** Інтенсивність пропускання інтерферометру Фабрі-Перо від довжини хвилі падаючої хвилі.

Різниця частот між двома наступними максимумами (по причині, що стануть ясними у кінці розгляду) називається вільною спектральною областю інтерферометра  $\Delta\nu_{fsr}$ . З рівняння (35) отримуємо:

$$\Delta\nu_{fsr} = \frac{c}{2L'} \quad (36)$$

В максимумі пропускання, маємо  $\sin \phi = 0$  і значення пропускання з рівняння (34) дорівнює

$$T_{\max} = \frac{(1 - R_1)(1 - R_2)}{[1 - (R_1 R_2)^{1/2}]^2} \quad (37)$$

Відзначимо, що якщо  $R_1 = R_2 = R$ , тоді  $T_{\max} = 1$  незалежно від значення відбивання дзеркала  $R$ . Цей результат є справедливим тільки якщо дзеркала не мають поглинання як вважалось в нашому аналізі.

Мінімуми пропускання отримуються коли  $\sin^2 \phi = 1$ , тобто посередині між максимумами. Пропускання в цій мінімальній точці отримується з рівняння (34) як:

$$T_{\min} = \frac{(1 - R_1)(1 - R_2)}{[1 + (R_1 R_2)^{1/2}]^2} \quad (38)$$

Відзначимо, що при звичайних умовах значення  $T_{\min}$  є дуже малим (див. приклад 3).

Щоби обчислити ширину  $\Delta\nu_c$  піку пропускання, ми згадаємо, що у відповідності з (34), пропускання спадає на половину свого максимального значення для зміщення  $\Delta\phi$  від значення  $\phi = n\pi$  такого, що  $4(R_1R_2)^{1/2} \sin^2 \Delta\phi = [1 - (R_1R_2)^{1/2}]^2$ . Вважаючи, що  $\Delta\phi$  набагато менше ніж  $\pi$ , ми можемо зробити апроксимацію  $\sin \Delta\phi \cong \Delta\phi$ , що дає  $\Delta\phi = \pm [1 - (R_1R_2)^{1/2}] / 2[R_1R_2]^{1/4}$ . Останнє рівняння показує, дві точки половини інтенсивності, що відповідають  $\Delta\phi_+$  та  $\Delta\phi_-$  симетрично розташовані по обох боках по відношенню до максимуму. Якщо ми покладемо  $\Delta\phi_c = \Delta\phi_+ - \Delta\phi_-$  тоді ми отримуємо

$$\Delta\phi_c = \frac{1 - (R_1R_2)^{1/2}}{(R_1R_2)^{1/4}} \quad (39)$$

І з (29):

$$\Delta\nu_c = \frac{c}{2L'} \frac{1 - (R_1R_2)^{1/2}}{\pi(R_1R_2)^{1/4}} \quad (40)$$

Зараз ми визначимо *тонкість (ступінь дисперсності) F* інтерферометра як:

$$F = \frac{\Delta\nu_{fsr}}{\Delta\nu_c} \quad (41)$$

З рівнянь (36) та (40) отримаємо

$$F = \frac{\pi(R_1R_2)^{1/4}}{1 - (R_1R_2)^{1/2}} \quad (42a)$$

*Тонкість (ступінь дисперсності)* показує наскільки пік пропускання є вузьким у порівнянні з вільною спектральною областю; типово вона є набагато більша 1.

Попередні вирази і розгляди справедливі для досконалого дзеркала без втрат. Якщо ми будемо вважати, що  $A$  представляє частину падаючої потужності, яка поглинута дзеркалом (поглинання дзеркала) і вважатимемо для простоти однокове відбиття для двох дзеркал, тобто візьмемо  $R_1 = R_2 = R$ , тоді з рівняння (34) отримаємо

$$T_{FP} = \left( \frac{T}{1-R} \right)^2 \frac{(1-R)^2}{(1+R)^2 + 4R \sin^2 \phi} \quad (42б)$$

Де  $T = t^2$  є пропускання дзеркала ( $T = 1 - R - A$ ).

**Приклад. 3.** *Вільна спектральна область, тонкість (ступінь дисперсності) та пропускання еталону Фабрі-Перо.* Розглянемо інтерферометр Фабрі-Перо, який зроблений з шматка скла з двома плоско-паралельними поверхнями покритими шарами для отримання високого відбивання (часто називають еталон ФП). Якщо ми приймемо  $L=1$  та  $n_r=1.54$ , вільну спектральну область для майже нормального падіння, тобто для  $\theta \cong 0$ , то  $\Delta \nu_{fsr} = c / 2n_r L = 9.7 ГГц$ . Якщо ми зараз візьмемо  $R_1 = R_2 = 0.98$ , ми отримаємо з рівняння (42а), ступінь дисперсності  $F \cong 150$ , так що  $\Delta \nu_c = \Delta \nu_{fsr} / F = 65 МГц$ . У відповідності з рівнянням (37), для покриття без втрат, пік пропускання дорівнює  $T_{max} = 1$ , мінімальне пропускання, у відповідності з (38) є  $T_{min} \cong 10^{-4}$ . Відмітимо дуже мале значення  $T_{min}$ .

*Інтерферометр Фабрі-Перо як спектрометр.*

Розглянемо інтерферометр ФП як аналізатор спектра. Ми розглянемо найпростіший випадок коли напрямок падаючого променя є нормальним до дзеркал інтерферометра (тобто,  $\cos \theta = 1$ ). І середовище в середині інтерферометру є повітрям ( $n_r \cong 1$ ). Ми вважатимемо, що довжина  $L$  може бути змінена на декілька довжин хвиль, наприклад доданням однієї з пластин ФП до п'єзоелектричного трансд'юсера (скануючий інтерферометр ФП). Для того, щоби зрозуміти, що відбувається в цьому випадку, спочатку розглянемо монохроматичну хвилю з частотою  $\nu$  (довжина хвилі  $\lambda$ ). У відповідності з попереднім обговоренням, пропущене світло дає пік, коли  $\phi = n\pi$ , тобто коли довжина інтерферометру дорівнює  $L = n\lambda / 2$  (див. рис. 12а), де  $n$  є ціле число. Зміна в товщині  $L$ , яка потрібна щоби перейти від одного піку пропускання до наступного дається:

$$\Delta L_{fsr} = \frac{\lambda}{2} \quad (43)$$

Ширина кожного піку пропускання  $\Delta L_c$  є такою, що  $(2\pi\nu / c_0) \Delta L_c = \Delta \phi_c$ , де  $\Delta \phi_c$  дається рівнянням (39). За допомогою рівняння (42а) ми отримуємо  $\Delta L_c = \lambda / 2F$ . Таким чином ми маємо

$$\Delta L_c = \frac{\Delta L_{fsr}}{F} \quad (44)$$

Тобто співвідношення аналогічне рівнянню (41).

Тепер розглянемо випадок, коли дві хвилі з частотами  $\nu$  та  $\nu + \Delta\nu$  падають на інтерферометр. Хвиля з частотою  $(\nu + \Delta\nu)$  дає набір піків пропускання що зміщені на величину  $\Delta L$  від піків, що відповідають хвилі з частотою  $\nu$  (Рис. 12б). Оскільки  $2\pi L\nu/c = n\pi$ , то зміщення  $\Delta L$  повинно бути таким, що  $2\pi(L + \Delta L)(\nu + \Delta\nu)/c = n\pi$ . Тобто  $\Delta L = -(\Delta\nu/\nu)L$ . Дві частоти  $\nu$  та  $\nu + \Delta\nu$  розділяються спектрометром якщо  $|\Delta L| \geq \Delta L_c$ . Знак рівності в цьому виразі відповідає мінімуму частотного інтервалу  $\Delta\nu_m$ , що можуть бути розділеними, що вимагає  $(\Delta\nu_m/\nu)L = \Delta L_c$ . За допомогою рівнянь (43) та (44), ми тоді отримаємо  $(\Delta\nu_m/\nu)L = \lambda/2F$ . Використав рівняння (36) з  $L' = L$  ми отримаємо

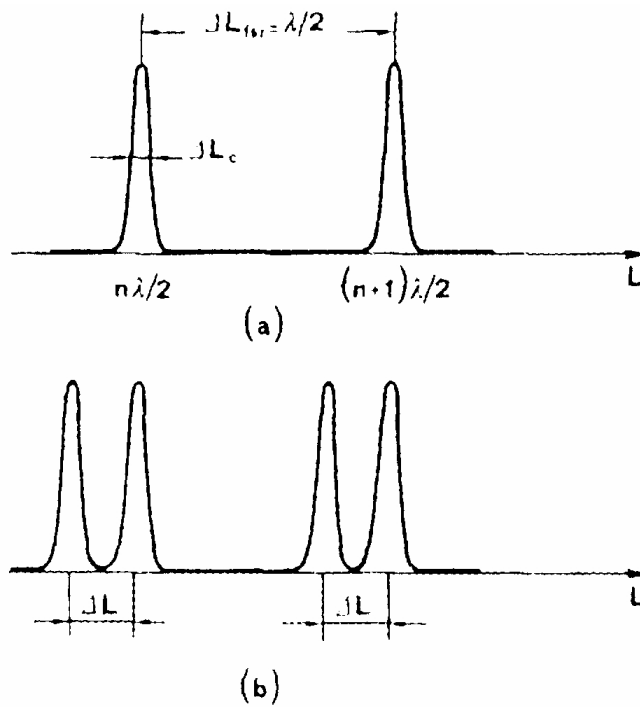
$$\Delta\nu_m = \frac{\Delta\nu_{fsr}}{F} \quad (45)$$

Таким чином тонкість (ступінь дисперсності) визначає його роздільну здатність в термінах вільної спектральної області.

Відмітимо, що коли  $|\Delta L| = \Delta L_{fsr}$ , тобто коли  $\Delta\nu = \Delta\nu_{fsr} = c/2L$  піки пропускання на частотах  $\nu + \Delta\nu$  та  $\nu$  стають співпадаючими, хоча і зсунутими відносно один одного на порядок. Таким чином, при  $\Delta\nu > \Delta\nu_{fsr}$ , відбувається неоднозначність на кратне  $\Delta\nu_{fsr}$  при вимірюванні  $\Delta\nu$ . Таким чином, при використанні інтерферометру для вимірювання різниці частот, простий та однозначний результат отримується тільки коли  $\Delta\nu < \Delta\nu_{fsr}$ . Це пояснює чому  $\Delta\nu_{fsr}$  називається вільною спектральною областю інтерферометра. Ми можемо узагальнити цей результат сказавши, що якщо  $\Delta\nu_{osc}$  є спектральною шириною падаючого світла, тоді, щоби уникнути неоднозначності частот,  $\Delta\nu_{osc} \leq \Delta\nu_{fsr}$ . Якщо виконується рівність, тоді з рівняння (45) ми отримуємо

$$\Delta\nu_m = \frac{\Delta\nu_{osc}}{F} \quad (46)$$

Таким чином тонкість (ступінь дисперсності)  $F$  також забезпечує міру як тонко ми можемо розрізняти частоти в межах загальної ширини смуги  $\Delta\nu_{osc}$ .



**Рис. 12.** Інтенсивність пропускання скануючого Інтерферометра Фабрі-Перо коли падаюча хвиля є (а) монохроматичною і (б) складається з двох близько розташованих частот.

**Приклад 4.** Спектральне дослідження вихідного променя  $Ar^+$  лазеру

Розглянемо іонний  $Ar$  лазер, що генерує на своїй зеленій довжині хвилі  $\lambda = 514.5 \text{ нм}$ . Ми вважаємо, що лазер генерує на багатьох поздовжніх модах, що охоплюють повну Допплерівську ширину лазерної лінії ( $\Delta\nu_0^* = 3.5 \text{ ГГц}$ ). Таким чином ми маємо  $\Delta\nu_{osc} = \Delta\nu_0^* = 3.5 \text{ ГГц}$ . Для того, щоби уникнути неоднозначності по частоті ми повинні мати  $\Delta\nu_{fsr} = (c/2L) \geq 3.5 \text{ ГГц}$ , тобто  $L \leq 4.28 \text{ см}$ . Якщо ми приймемо тонкість (ступінь дисперсності)  $F = 150$  і візьмемо  $L = 4.28 \text{ см}$ , у відповідності з рівнянням (46) ми матимемо для роздільної здатності інтерферометру,  $\Delta\nu_m = \Delta\nu_{osc} / F \cong 23 \text{ МГц}$ . Якщо, для прикладу, довжина лазерної порожнини є  $L_1 = 1.5 \text{ м}$ , послідовні поздовжні моди є розділеними на  $\Delta\nu = c/2L_1 = 100 \text{ МГц}$ . Оскільки  $\Delta\nu_m < \Delta\nu$ , то ФП інтерферометр є спроможним розділити ці поздовжні моди. Відмітимо, що оскільки частота лазерного світла є  $\nu = c/\lambda \cong 5.83 \times 10^{14} \text{ Гц}$ , відповідна роздільна здатність інтерферометра є  $\nu/\Delta\nu_m = 2.54 \times 10^7$ . Це є дуже високою роздільною здатністю у порівнянні, наприклад, із кращою, що може бути досягнута на спектрометрі з решіткою ( $\nu/\Delta\nu_m < 10^6$ ).

## 6. Дифракційна оптика в параксіальному наближенні.

Розглянемо монохроматичну хвилю при так-званому скалярному наближенні, коли ЕМ полі є однорідними (наприклад, лінійно або

циркулярно) поляризовані. Електричне поле хвилі може бути описано скалярною величиною:

$$E(x, y, z, t) = \tilde{E}(x, y, z) \exp(j\omega t) \quad (47)$$

Де комплексна амплітуда  $\tilde{E}$  повинна задовольняти хвильове рівняння у скалярній формі, тобто

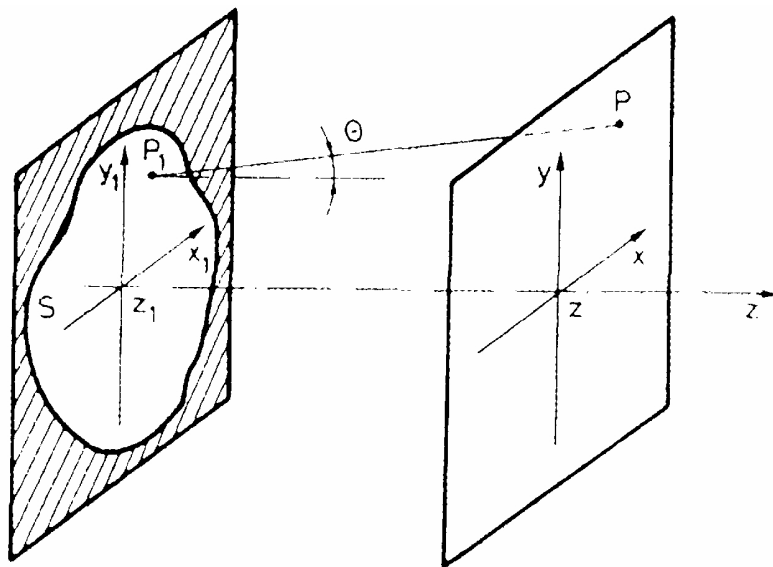
$$(\nabla^2 + k^2) \tilde{E}(x, y, z) = 0 \quad (48)$$

з  $k = \omega / c$ .

Загальне рішення для амплітуди поля може бути отримано з використанням інтегралу Френеля-Кирхгофа. Для даного розподілу поля  $\tilde{E}(x_1, y_1, z_1)$  в площині  $z = z_1$ , результуючий розподіл поля  $\tilde{E}(x, y, z)$  у загальній площині з координатою  $z$  в напрямку розповсюдження дається:

$$\tilde{E}(x, y, z) = \frac{j}{\lambda} \iint_S E(x_1, y_1, z_1) \frac{\exp[-(jkr)]}{r} \cos \theta dx_1 dy_1 \quad (49)$$

В рівнянні (49)  $r$  є відстанню між точкою  $P_1$  з координатами  $(x_1, y_1)$  і точкою  $P$  з координатами  $(x, y)$ , див. рис. 13),  $\theta$  є кутом, який утворює лінія  $P_1P$  з нормаллю до площини  $z = z_1$ , подвійний інтеграл береться по координатах  $(x_1, y_1)$  в площині  $z = z_1$ , і границі визначаються деякою загальною апертурою  $S$ , що розташована в цій площині.



**Рис. 13** Обчислення  $u(P)$  в площині  $z > z_1$  коли профіль поля  $u(P_1)$  в площині  $z = z_1$  є відомим.



Ми бачимо, що рівняння (49) є у дійсності виразом Гюйгенса у математичній формі. Дійсно  $[\tilde{E}(x_1, y_1, z_1) dx_1 dy_1] \cdot [\exp(-jkr)]/r$  представляє елементарну хвилю Гюйгенса, яка розповсюджується з елементарної площини  $dx_1 dy_1$  навкруги  $P_1$ ; поле в точці  $P$  тоді отримується підсумовуванням елементарних хвиль, що надходять з усіх точок в площині  $z = z_1$ . Член  $\cos \theta$  є так званим фактором нахилу, необхідність якого визнавав Френель. Він показує, що елементарні хвилі Гюйгенса мають фазовий зсув  $\pi/2$  у порівнянні з променем, що падає на площину  $z = z_1$ .

Тепер розглянемо рішення для  $E$  – полів, як в диференціальній (рівняння (48)) або інтегральній формі (рівняння (49)), в рамках наближення параксіальних хвиль, де вважається, що хвиля розповсюджується під малим кутом  $\theta$  у  $z$  – напрямку. В цьому випадку ми можемо написати

$$\tilde{E}(x, y, z) = u(x, y, z) \exp[-(jkz)] \quad (50)$$

Де  $u$  є повільно змінюючеюся функцією, тобто вона мало змінюється у шкалі довжини хвилі в  $z$  – координаті. В параксіальному наближенні, підстановка рівняння (50) в рівняння (48) дає

$$\nabla_{\perp}^2 u - 2jk \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (51)$$

де  $\nabla_{\perp}^2 = (\partial^2 / \partial x^2) + (\partial^2 / \partial y^2)$ . Рівняння (51) є параксіальним хвильовим рівнянням.

Для отримання наближеної форми рівняння (49), при параксіальному наближенні, ми можемо написати  $\cos \theta \cong 1$  і  $r = z - z_1$  в амплітудному факторі сферичної елементарної хвилі. Для апроксимації фазового фактору треба бути обережним. Розглянемо наприклад відстань  $r \cong 1\text{м}$  і вважатимемо, що ця відстань оцінюється з точністю  $\Delta r = 1\text{мм}$ . Для амплітудного фактору, це дає дуже хорошу відносну точність  $\Delta r / r = 10^{-6}$ . Фазова точність є  $\Delta \phi = k \Delta r = 2\pi \Delta r / \lambda$  і для  $\lambda = 1\text{мм}$  це дає  $\Delta \phi = 2\pi$ . Це є звичайно неприйнятним рівнем точності, оскільки наприклад фазова зміна  $\Delta \phi = \pi$  змінює знак всього члена в інтегралі. Таким чином більша точність є потрібною для фазового члену в рівнянні (49). Для цієї мети ми запишемо відстань між точками  $P_1$  та  $P_2$  на **рис. 13** як  $r = [(z - z_1)^2 + (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2]^{1/2}$ . При наближенні параксіальної хвилі маємо  $[|x - x_1|, |y - y_1|] \ll |z - z_1|$ . Таким чином ми можемо записати

$$r = (z - z_1) \left[ 1 + \frac{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}{(z - z_1)^2} \right]^{1/2} \cong (z - z_1) + \frac{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}{2(z - z_1)} \quad (52)$$

Підстановка рівняння (52) в фазовий член рівняння (49) тоді дає

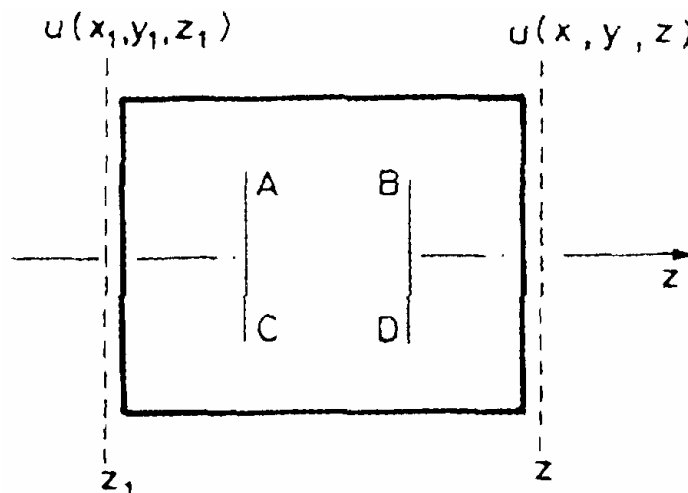
$$\tilde{E}(x, y, z) = \frac{j \exp[-jk(z - z_1)]}{\lambda(z - z_1)} \iint \tilde{E}(x_1, y_1, z_1) \exp \left\{ -jk \left[ \frac{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}{2(z - z_1)} \right] \right\} dx_1 dy_1 \quad (53)$$

Що є інтегралом Гюйгенса-Френеля-Кирхгофа в так званому наближенні Френеля. Підставив рівняння (50) в рівняння (53) отримаємо

$$u(x, y, z) = \frac{j}{\lambda L} \iint_s u(x_1, y_1, z_1) \exp \left\{ -jk \left[ \frac{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}{2L} \right] \right\} dx_1 dy_1 \quad (54)$$

Де позначено  $L = z - z_1$ . Рівняння (54) забезпечує рішення для поля  $E$  в інтегральній формі в рамках параксіального наближення, в той же час як рівняння (51) дає теж саме рішення в диференціальній формі. Ці дві форми є повністю еквівалентними.

Наступним кроком ми розглянемо розповсюдження в межах параксіального наближення в оптичній системі, що описується матрицею  $ABCD$  (**Рис. 14**). Нехай  $u(x_1, y_1, z_1)$  та  $u(x, y, z)$  є амплітуди полів в площинах  $z = z_1$  та  $z = z$  зразу перед і після оптичної системи, відповідно. Ми також вважаємо, що принцип Гюйгенса є застосовним до загальної оптичної системи на **рис. 14** при умові, що в системі не має апертур, які обмежують поле.



**Рис. 14.** Обчислення  $u(x, y, z)$  в площині  $z$  після оптичної системи, що описується  $ABCD$  матрицею, коли є відомим профіль поля  $u(x_1, y_1, z_1)$  в площині  $z = z_1$ .

Це вимагає, наприклад, що будь-яка лінза або дзеркало в оптичній системі має нескінченну апертуру, тобто апертуру набагато ширшою (більшою), ніж поперечні розміри поля (для скінчених апертур оптичної системи відбувається дифракція на цих апертурах, таким чином суттєво змінюючи пропущене поле). У відповідності з цим розширення принципу Гюйгенса до загальної оптичної системи, поле  $u(x, y, z)$  отримується суперпозицією індивідуальних елементарних хвиль випромінених з площини  $z = z_1$  і пропущених через цю систему. Тоді отримаємо

$$u(x, y, z) = \frac{j}{\lambda L} \iint_S u(x_1, y_1, z_1) \exp \left\{ -jk \left[ \frac{A(x_1^2 + y_1^2) + D(x^2 - y^2) - 2x_1x - 2y_1y}{2B} \right] \right\} dx_1 dy_1 \quad (55)$$

Що є узагальненням рівняння (54). Очевидно, для випадку розповсюдження у вільному просторі ми маємо  $A = D = A$  і  $B = L$  (див. таблицю 1). І рівняння (55) редукується до рівняння (54).

### Гаусові промені.

Ми зараз розглянемо і обговоримо дуже важливий клас рішень поля  $E$ , яких звичайно називають *Гаусовими променями*. Властивості цих променів, в параксіальному наближенні можуть бути отриманими або з рівняння параксіальних хвиль (51) або інтегралу Френеля-Кирхгофу у наближенні Френеля (див рівняння (54) та (55)). Ми будемо використовувати інтегральний підхід, оскільки він є більш зручним для опису оптичних резонаторів.

#### *Найнижчий порядок моди*

Розглянемо загальну оптичну систему, що описується відповідною матрицею  $ABCD$  (див. **рис. 14**). Поставимо питання «Чи є рішення рівняння (55) яке зберігає свою функціональну форму по мірі свого розповсюдження?». Іншими словами чи існує власне рішення (55)? Відповідь отримується якщо ми припустимо, що не має обмежуючої апертури в площині  $z = z_1$ , так, що подвійний інтеграл в рівнянні (55) може бути взятим між  $-\infty$  та  $+\infty$  для обох змінних  $x_1$  та  $y_1$ . В цьому випадку можна показати прямою підстановкою у рівняння (55), що

$$u(x, y, z) \propto \exp\left\{-jk\left[(x^2 + y^2)/2q\right]\right\} \quad (56)$$

Де  $q = q(z)$  є комплексним параметром (який часто називають комплексним параметром гаусового променя) є власним рішенням (55). Якщо ми напишемо

$$u(x_1, y_1, z_1) \propto \exp\left\{-jk\left[(x_1^2 + y_1^2)/2q_1\right]\right\} \quad (57)$$

Ми отримаємо з рівняння (55):

$$u(x, y, z) = \frac{1}{A + (B/q_1)} \exp\left[-jk\left(\frac{x^2 + y^2}{2q}\right)\right] \quad (58)$$

де  $q$  є зв'язаним з  $q_1$  простим співвідношенням:

$$q = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D} \quad (59)$$

Рівняння (59) є дуже важливим співвідношенням, відомим як *ABCD* закон розповсюдження гаусового променя. Воно дуже нагадує рівняння (19), яке показує як трансформується оптичною системою радіус кривизни сферичної хвилі. Ми повернемося до цього співвідношення у подальшому.

Розглянемо далі фізичну інтерпретацію гаусового рішення (рівн. (56)). Для цього ми використаємо рівняння (56) та (50), щоби записати

$$\tilde{E} \propto \exp\left\{-jk\left[z + \left(\frac{x^2 + y^2}{2q}\right)\right]\right\} \quad (60)$$

Розглянемо зараз сферичною хвилю з центром в координатах  $x = y = z = 0$ . Її поле в точці  $P(x, y, z)$  може бути записаним як  $\tilde{E} \propto [\exp(-jkR)]/R$ , де  $R$  - радіус кривизни хвилі. В рамках параксіального наближення, використав аргументи аналогічні використаним для рівняння (52) ми можемо записати

$$R \cong z + \left(\frac{x^2 + y^2}{2R}\right) \quad (61)$$

Поле сферичної хвилі тоді трансформується в:

$$\tilde{E} \propto \exp \left\{ -jk \left[ z + \left( \frac{x^2 + y^2}{2R} \right) \right] \right\} \quad (62)$$

Порівняння між (62) та (60) тоді показує, що гаусів промінь може розглядатися як сферична хвиля з комплексним радіусом кривизни  $q$ . Для розуміння цього комплексного параметру променю, ми відокремимо дійсну і уявну частини  $1/q$ , тобто ми запишемо

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{R} - j \left( \frac{\lambda}{\pi w^2} \right) \quad (63)$$

Підстановка рівняння (63) у рівняння (60) тоді дає

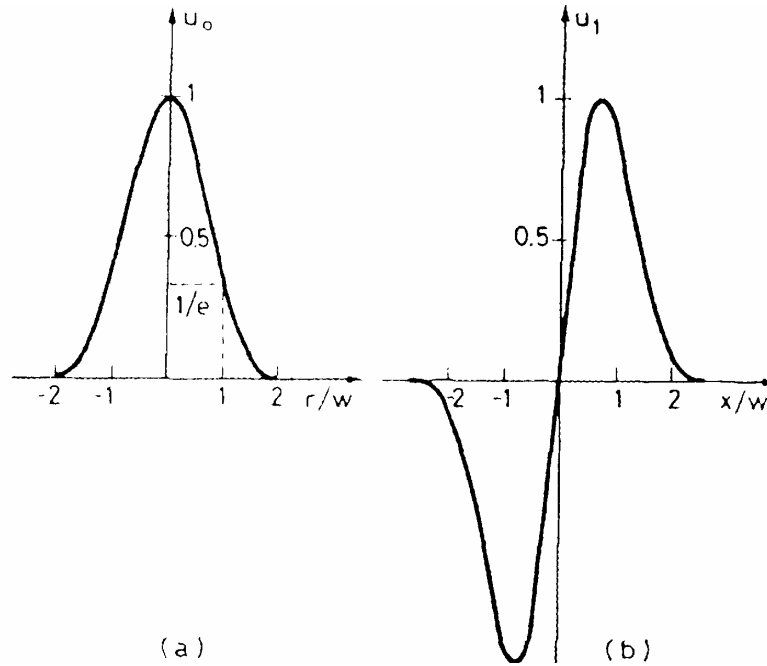
$$\tilde{E}(x, y, z) \propto \exp \left[ - \left( \frac{x^2 + y^2}{w^2} \right) \right] \times \exp \left\{ -jk \left[ z + \left( \frac{x^2 + y^2}{2R} \right) \right] \right\} \quad (64)$$

Фактор амплітуди з правого боку рівняння (64), тобто  $u_0 = \exp \left[ - \left( \frac{x^2 + y^2}{w^2} \right) \right]$  є нанесеним на **рис. 15а** в залежності від  $r/w$ , де  $r = \left[ x^2 + y^2 \right]^{1/2}$  є координата радіального променю. Максимальне значення досягається при  $r = 0$  і для  $r = w$  маємо  $u_0 = 1/e$ . Величина  $w$  таким чином визначає поперечний масштаб променю; вона називається розмір плями променю (на положенні  $z = 0$ , що розглядається). Відмітимо що, оскільки інтенсивність променю дається  $I \propto |\tilde{E}|^2$ , ми маємо  $I = I_{\max} \exp \left[ -2 \left( \frac{x^2 + y^2}{w^2} \right) \right]$ . Якщо ми визначимо розмір плями профілю інтенсивності,  $w_I$  як величину на якій  $I = I_{\max} / e$ , ми маємо  $w_I = w / \sqrt{2}$ . Відмітимо, що інтенсивність  $I$  зменшується до  $1/e^2$  свого максимуму на радіальній відстані, що дорівнює розміру плями поля.

Зараз перейдемо до фазового фактору у рівнянні (64). Порівняння з рівнянням (62), що застосовується до сферичної хвилі, показує, що два рівняння є ідентичними. Це веде нас до визначення  $R$  у рівнянні (63) як радіусу кривизни сферичної елементарної хвилі гаусового променю. Щоби побачити це більш ясно, розглянемо еквіфазну поверхню гаусового променю що перетинає вісь  $z$  у даному положенні  $z'$ . Координати  $x, y, z$  цієї поверхні тоді повинні задовольняти співвідношення  $kz + k(x^2 + y^2)/R = kz'$ , що дає

$$z = z' - \left( \frac{x^2 + y^2}{2R} \right) \quad (65)$$

Рівняння (65) таким чином показує, що еквіфазна поверхня є параболоїдом обертання навкруги вісі  $z$ . Можна показати, що радіус кривизни цього параболоїду при  $x = y = 0$ , тобто для осового променя дорівнює  $R$ . Це демонструє достатньо ясно чому в межах наближення параксіальної хвилі, фазовий член сферичної хвилі (62) та гаусового променя (64) є однаковими.



**Рис. 15.** Профіль поля (а) найнижчого порядку і (б) наступного порядку гаусової моди.

*Розповсюдження у вільному просторі.*

Розглянемо розповсюдження гаусового променя в рівнянні (56) вздовж позитивного напрямку  $z$  без будь-якої обмежуючої апертури в  $x$  – або  $y$  – Напрямку (тобто у вільному просторі). З рівняння (59) з  $A = D = 1$  та  $B = z$  ми отримаємо

$$q = q_1 + z \quad (66)$$

Приймаючи  $R = \infty$  при  $z = 0$  ми можемо записати

$$\left( \frac{1}{q_1} \right) = -j \left( \frac{\lambda}{\pi w_0^2} \right) \quad (67)$$

Де  $w_0$  є розмір плями при  $z = 0$ . Ми можемо зараз записати (66) як  $(1/q) = 1/(q_1 + z)$ , підставити  $1/q$  з рівняння (63) та  $1/q_1$  з рівняння (67), потім розділити дійсну та уявну частини отриманого рівняння. Після деяких

прозорих алгебраїчних маніпуляцій ми отримаємо вирази для розміру плями  $w$  та радіусу кривизни  $R$  еквіфазних поверхонь у вигляді:

$$w^2(z) = w_0^2 \left[ 1 + \left( \frac{\lambda z}{\pi w_0^2} \right)^2 \right] \quad (68a)$$

$$R(z) = z \left[ 1 + \left( \frac{\pi w_0^2}{\lambda z} \right)^2 \right] \quad (68b)$$

З рівнянь (58) та (67) ми можемо записати

$$u(x, y, z) = \left[ \frac{1}{1 - j(\lambda z / \pi w_0^2)} \right] \exp \left[ -jk \left( \frac{x^2 + y^2}{2q} \right) \right] \quad (69)$$

Комплексний фактор в перших скобках в рівнянні (69) зараз можна виразити в членах фази і амплітуди. Використав рівняння (63) для  $(1/q)$  ми отримаємо вираз для амплітуди поля у вигляді:

$$u(x, y, z) = \frac{w_0}{w} \exp \left[ - \left( \frac{x^2 + y^2}{w^2} \right) \right] \exp \left[ -jk \left( \frac{x^2 + y^2}{2R} \right) \right] \exp j\phi \quad (70a)$$

Де:

$$\phi = \tan^{-1} \left( \frac{\lambda z}{\pi w_0^2} \right) \quad (70b)$$

Вираз (70a) та вираз для  $w(z)$ ,  $R(z)$  та  $\phi(z)$ , що дається рівняннями (68) та (70b) вирішують нашу проблему повністю. Ми бачимо з рівнянь (68) та (70b) що  $w$ ,  $R$  та  $\phi$  (а звідси і розподіл поля) залежать тільки від  $w_0$  (для даних  $\lambda$  та  $z$ ). Це можна легко зрозуміти, коли ми згадаємо, що коли відоме  $w_0$ , є відомим розподіл поля в  $z=0$ . В дійсності ми знаємо його амплітуду, оскільки розподіл поля є гаусовою функцією з розміром плями  $w_0$ , і її фазою, оскільки ми вважаємо  $R = \infty$  для  $z=0$ . Коли відоме поле у  $z=0$ , відповідне поле при  $z>0$  встановлюється, оскільки воно може бути обчислено з використанням, наприклад, інтегралу Френеля-Кирхгофа (54). Використав знову рівняння (66) ми можемо показати, що рівняння (68) та (70b) є також справедливими для негативним значень  $z$

, тобто для прямого розповсюдження до а не від площини  $z = 0$ . Відмітимо, що якщо ми визначимо

$$z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda} \quad (71)$$

Де  $z_R$  називається *областю Релея* (її важливість буде обговорена пізніше), рівняння (68) та (70б) можуть бути записані як:

$$w^2(z) = w_0^2 \left[ 1 + \left( \frac{z}{z_R} \right)^2 \right] \quad (72a)$$

$$R(z) = z \left[ 1 + \left( \frac{z_R}{z} \right)^2 \right] \quad (72б)$$

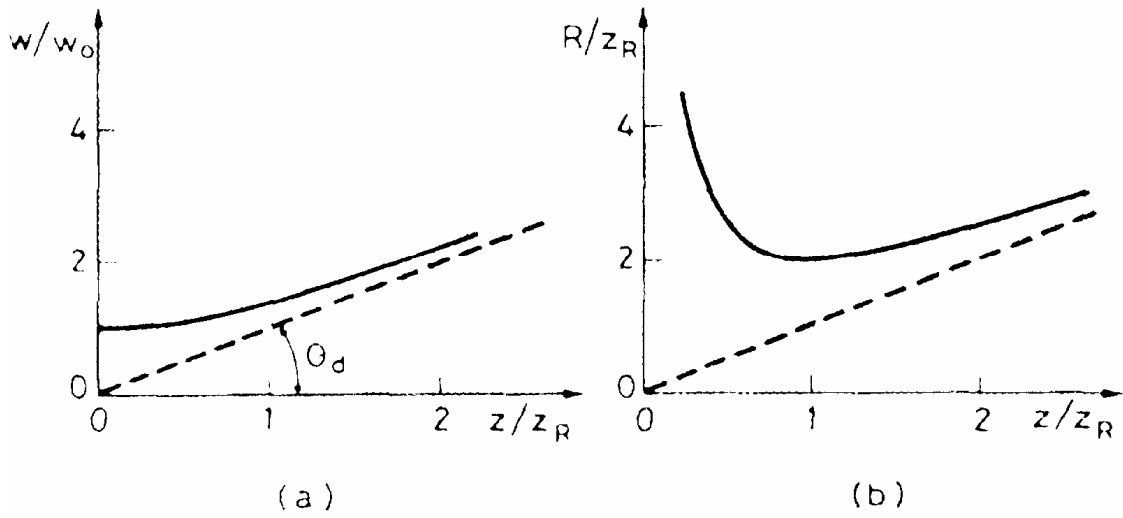
$$\phi(z) = \tan^{-1} \left( \frac{z}{z_R} \right) \quad (72в)$$

Рівняння (70а) та (72) є остаточними результатами наших обчислень. Ми бачимо, що  $u(x, y, z)$  є добутком амплітудного фактору,  $(w_0 / w) \exp - \left[ (x^2 + y^2) / w^2 \right]$  і поперечного фазового фактору,  $\exp - jk \left[ (x^2 + y^2) / 2R \right]$  та поздовжнього фазового фактору  $\exp j\phi$ . Ми обговоримо фізичне значення цих факторів у наступному.

Амплітудний фактор (член) в рівнянні (70а) показує, що при розповсюдженні (як для  $z > 0$  так і для  $z < 0$ ) промінь зберігає свою гаусову форму, але його розмір плями змінюється у відповідності з рівняння (72а). Таким чином ми можемо записати  $w^2(z)$  як суму  $w_0^2$  та  $(\lambda z / \pi w_0)^2$ , член, що має походження від дифракції променя. Нанесення нормалізованого розміру плями  $w / w_0$  в залежності від нормалізованої довжини розповсюдження є показаним суцільною лінією на рис. 16а для  $z > 0$ . Таким чином мінімум розміру плями отримується при  $z = 0$  (звідси має назву звуження променю); для  $z = z_R$  маємо  $w = \sqrt{2} w_0$ . Область Релея є таким чином відстанню від звуження променю до місця де розмір плями збільшується на множник  $\sqrt{2}$ . Для  $z \rightarrow \infty$  (тобто, для  $z \gg z_R$ ) ми можемо записати

$$w \approx w_0 \frac{z}{z_R} = \frac{\lambda z}{\pi w_0} \quad (73)$$





**Рис. 16.** (а) нормалізовані значення розміру плями променя і (б) радіусу кривизни еквіфазної поверхні  $R$  в залежності від нормалізованих значень довжини розповсюдження  $z$ .

Рівняння (73) є також нанесеним як пунктирна лінія на **рис. 16а**. При великих відстанях  $w$  лінійно зростає з  $z$ ; таким чином ми можемо визначити дивергенцію (розходження) променю із-за дифракції як  $\theta_d = w/z$ . Ми отримаємо

$$\theta_d = \frac{\lambda}{\pi w_0} \quad (74)$$

Фізична причина для присутності величини  $w_0/w$  в амплітудному факторі в рівняння (70а) є зрозумілою, коли згадаємо, що оскільки середовище вважається не маючим втрат, то загальна потужність променю повинна бути однаковою в будь-якій площині  $z$ . Це вимагає щоби інтеграл  $\iint |u|^2 dx dy$  був незалежним від  $z$ . Наявність величини  $w_0/w(z)$  забезпечує, що ця вимога виконується; дійсно, використав рівняння (70а) ми можемо записати

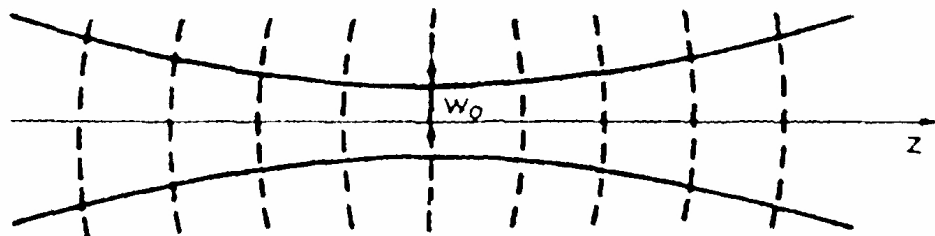
$$\iint |u|^2 dx dy = \left( \frac{w_0^2}{2} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\xi^2) d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\eta^2) d\eta \quad (75)$$

Де  $\xi = \sqrt{2}x/w$  та  $\eta = \sqrt{2}y/w$ . З цього рівняння ми бачимо, що  $\iint |u|^2 dx dy$  є незалежним від  $z$ .

Зараз розглянемо поперечний фазовий фактор і рівнянні (70а). Він показує, що для  $z > 0$ , із-за розповсюдження, промінь приймає приблизно сферичний хвильовий фронт з радіусом кривизни  $R$ . Нанесення нормалізованого радіусу кривизни  $R/z_R$  в залежності від нормалізованої

змінної  $z/z_R$  показано на рис. 16б для  $z > 0$ . Для  $z < 0$  радіус кривизни легко отримується з того ж рисунку, оскільки  $R(z)$  є антисиметричною функцією  $z$ . Ми бачимо, що  $R \rightarrow \infty$  для  $z = 0$ , коли  $R$  досягає свого мінімального значення при  $z = z_R$ . Для  $z \gg z_R$ ,  $R \approx z$  і рівняння  $R = z$  наноситься як пунктирна лінія на рис. 16б. Таким чином хвильовий фронт є плоским в  $z = 0$  і при більших відстанях він зростає лінійно з  $z$  як і у випадку сферичної хвилі.

Останнім ми розглянемо поздовжній фазовий фактор в рівнянні (70а). Використав рівняння (50) та (70б) ми бачимо, що окрім фазового зсуву  $-kz$  плоскої хвилі, гаусів промінь має додатковий член  $\phi(z)$  який змінюється від  $-(\pi/2)$  до  $(\pi/2)$  коли переходимо від  $z \ll -z_R$  до  $z \gg z_R$ . Результати **рис. 16** представлені об'єднаними на рис. 17, де показані розміри профілю променя  $2w(z)$  як суцільні криві і еквіфазні поверхні показані пунктирними лініями. Промінь має мінімальний розмір у формі звуження при  $z = 0$ ; відповідний розмір плями  $w_0$  звичайно називають розміром плями при звуженні променя або розмір плями звуження. Відмітимо, що у відповідності з конвенцією, яку використовують для знаків кривизни хвильового фронту, оскільки  $R > 0$  для  $z > 0$  та  $R < 0$  для  $z < 0$ , центр кривизни є зліва хвильового фронту для  $z > 0$  і справа хвильового фронту для  $z < 0$ .



**Рис. 17.** Профіль променю, неперервні криві, і еквіфазні поверхні, пунктирні криві, для  $TEM_{00}$  гаусової моди.

### *Гаусові промені і ABCD закон.*

Розповсюдження гаусового променя через загальне середовище, яке описується  $ABCD$  матрицею, дається рівнянням (58). Для даної  $ABCD$  матриці, рішення залежить тільки від комплексного параметру променя  $q$  вираз якого в термінах матричних елементів дається рівнянням (59). Це є дуже важливим законом розповсюдження гаусового променя, який часто називають  $ABCD$  закон для гаусових променів. Його корисність була продемонстрована у випадку розповсюдження у вільному просторі.

**Приклад 5.** Розповсюдження гаусового променя через тонку лінзу. Розглянемо тонку лінзу з фокальною відстанню  $f$ . У відповідності з (59) комплексні параметри променю  $q_1$ , що передує і  $q_2$ , що слідує, лінзу є зв'язаними співвідношенням:

$$\frac{1}{q_2} = \frac{C + (D/q_1)}{A + (B/q_1)} \quad (76)$$

За допомогою матричних елементів лінзи, які наведені у таблиці 1, ми тоді отримаємо

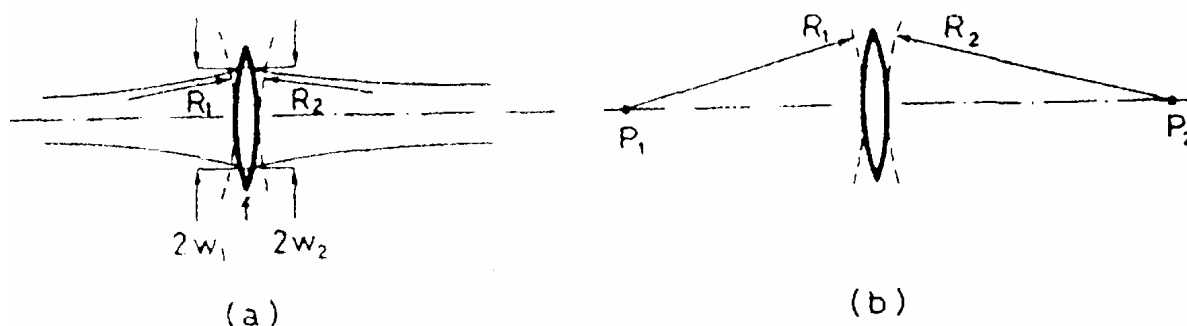
$$\frac{1}{q_2} = -\left(\frac{1}{f} + \frac{1}{q_1}\right) \quad (77)$$

Використав рівняння (63) для виразу як  $1/q_1$  так і  $1/q_2$ , ми можемо окремо прирівняти дійсну та уявну частини рівняння (77), щоби отримати наступні співвідношення між розмірами плями та радіусами кривизни перед та після лінзи:

$$w_2 = w_1 \quad (78a)$$

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{f} \quad (78b)$$

Фізичний зміст рівнянь (78) може зараз бути обговореним у зв'язку з **рис. 18**.



**Рис. 18.** Розповсюдження через лінзу (а) Гаусового променя (б) сферичної хвилі.

Розглянув спочатку рівняння (78a), ми бачимо, що його фізичний зміст є очевидним, оскільки для тонкої лінзи розподіли амплітуд безпосередньо

перед та після лінзи повинні бути однаковими; , тобто не повинно бути переривчастої зміни розміру плями (див. **рис. 18а**). Для розуміння рівняння (78б), розглянемо спочатку розповсюдження сферичної хвилі через ту саму лінзу (**рис. 18б**). Тут сферична хвиля, що виходить з точкового джерела  $P_1$  фокусується лінзою на точку зображення  $P_2$ . Радіуси кривизни  $R_1$  та  $R_2$  зразу перед і зразу після лінзи є, в цьому випадку, зв'язаними рівнянням (75). Сферична лінза може розглядатися як трансформуюча радіус кривизни  $R_1$  вхідної хвилі у радіус  $R_2$  вихідної у відповідності з (75). Оскільки це очікується справедливим незалежно від розподілу поперечної амплітуди, то рівняння (75) має бути справедливим і для гаусового променя, що дійсно показує (78б).

**Приклад 6.** Гаусів промінь сфокусований тонкою лінзою. Розглянемо гаусів промінь з розміром плями  $w_{01}$  і плоским фронтом, що входить у лінзу з фокальною довжиною  $f$  (тобто звуження променю є локалізованим на лінзі). Нам потрібно обчислити положення звуження променю після лінзи та його розмір плями  $w_{02}$ . У відповідності з рівняннями (4) та (6), матриця пропускання для лінзи з фокальною довжиною  $f$  з відстанню у вільному просторі  $z$ , дається:

$$\begin{vmatrix} 1 - \frac{z}{f} & z \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{vmatrix} \quad (79)$$

Комплексний параметр променю  $q_2$  після цієї лінзи та комбінації вільного простору, може бути знову отримано з рівняння (76), де елементи  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  отримуються з рівняння (79) і  $(1/q_1)$ , дається:

$$\left( \frac{1}{q_1} \right) = -\frac{j\lambda}{\pi w_{01}^2} = -\frac{j}{z_{R_1}} \quad (80)$$

З  $z_{R_1}$  релеївський області, що відповідає розміру плями  $w_{01}$ . Якщо зараз координата  $z_m$  після лінзи відповідає положенню де відбувається звуження променю, тоді у відповідності з рівняння (63),  $1/q_2$  повинно також бути повністю уявним. Це означає, що дійсна частина правої частини рівняння (76) повинна дорівнювати нулю. За допомогою рівняння (79) та (80) ми знаходимо, що  $z_m$  дається:

$$z_m = \left[ \frac{f}{1 + (f / z_{R_1})^2} \right] \quad (81)$$

Таким чином ми бачимо, що відстань  $z_m$  від лінзи де має місце мінімальний розмір плями є завжди меншим ніж фокальна відстань  $f$ . При типових умовах звичайно маємо  $z_{R_1} \gg f$ , так що  $z_m \approx f$ . Прирівняв уявні частини обох сторін рівняння (76) та використав рівняння (79) та (80) знову, розмір плями у фокальній площині  $w_{02}$  отримується як:

$$w_{02} = \frac{\lambda f}{\pi w_{01} \left[ 1 + (f / z_{R_1})^2 \right]^{1/2}} \quad (82)$$

Знову для  $z_{R_1} \gg f$  отримаємо з рівняння (82):

$$w_{02} \cong \frac{\lambda f}{\pi w_{01}} \quad (83)$$

*Моди більш високого порядку.*

Зараз повернемося до рівняння (54) для вільного простору або до рівняння (55) для загальної оптичної системи і запитаємо, чи є якісь інші власні рішення цих рівнянь? Відповідь знову позитивна і ми можемо показати, що корисний набір власних функцій може бути записаний як добуток поліному Герміта і гаусової функції. Дійсно можна вважати (див. рис. 14), що:

$$u(x_1, y_1, z_1) = H_l \left( \frac{\sqrt{2}x_1}{w_1} \right) H_m \left( \frac{\sqrt{2}y_1}{w_1} \right) \exp \left[ -jk(x_1^2 + y_1^2) / 2q_1 \right] \quad (84)$$

Де  $H_l$  та  $H_m$  є поліноми Герміту порядків  $l$  та  $m$ ,  $q_1$  є комплексний параметр променю при  $z = z_1$  а  $w_1$  є відповідним розміром плями. Підстановка рівняння (84) у праву частину рівняння (55) дає

$$u(x, y, z) = \left[ \frac{1}{A + (B / q_1)} \right]^{1+l+m} H_l \left( \frac{\sqrt{2}x}{w} \right) H_m \left( \frac{\sqrt{2}y}{w} \right) \exp \left[ -jk(x^2 + y^2) / 2q \right] \quad (85)$$

Де  $q$  є комплексним параметром променю після оптичної системи в рис. 14, як дається рівняння (59) і  $w$  є відповідний розмір плями.

Для розповсюдження у вільному просторі, якщо ми прийнемо, що площа  $z_1$  є площиною звуження, маємо  $q_1 = j\pi w_0^2 / \lambda$ , де  $w_0$  є розміром плями в звуженні променю. Підставив попередній вираз для  $q_1$  у рівняння (85) і використав рівняння (63) отримаємо

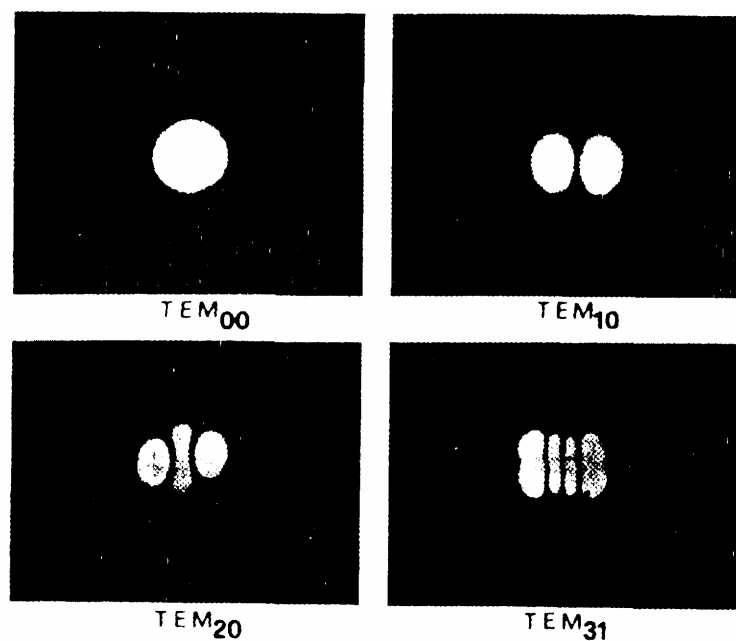
$$u_{l,m}(x, y, z) = \left(\frac{w_0}{w}\right) H_l\left(\frac{\sqrt{2}x}{w}\right) H_m\left(\frac{\sqrt{2}y}{w}\right) \exp\left[-(x^2 + y^2)/w^2\right] \times \exp\left\{-j\left[k(x^2 + y^2)/2R\right] + j(1+l+m)\phi\right\} \quad (86)$$

Де  $\phi$  дається рівнянням (70б) і використав рівняння (66) для отримання  $q = q(z)$ , ми бачимо, що  $w$  та  $R$  даються рівняннями (68а) та (68б).

Найнижчий порядок отримується з (86) коли покладемо  $l - m = 0$ . Оскільки поліном Герміта нульового порядку є константа, рівняння (86) редукується (зводиться) до гаусового рішення, що обговорювалося раніше (див. рівн. 70а). Це рішення називається  $TEM_{00}$  модою, де  $TEM$  означає Transverse Electric and Magnetic (поперечна електрична і магнітна) (в рамках параксіального наближення, як електричне так і магнітне поле електромагнітної хвилі є приблизно поперечними  $z$  – напрямку). Індеси 00 показують поліному нульового порядку як для  $H_l$  та  $H_m$  в рівнянні (86). Радіальний розподіл профілю інтенсивності гаусової моди  $TEM_{00}$  для будь-якої  $z$  – координати дається  $I_{00}(x, y) \propto |u_{00}|^2 \propto \exp\left[-2(x^2 + y^2/w^2)\right]$ . Він залежить тільки від радіальної координати  $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ . Мода таким чином відповідає круглій плямі (див. рис. 19).

Наступна більш висока по порядку мода отримується з рівняння (86) якщо покласти  $l = 1$  та  $m = 0$  (або  $l = 0$  та  $m = 1$ ). Оскільки  $H_1(x) \propto x$ , амплітуда поля зараз дається  $|u_{10}| \propto x \times \exp\left[-(x^2 + y^2/w^2)\right]$ . Таким чином, для даного  $x$ , поле описується гаусовою функцією (див. рис. 15а) вздовж  $y$  – координати, в той же час, при даному  $y$ , поле описується функцією  $x \exp\left[-(x^2/w^2)\right]$  вздовж  $x$  – координати. Ця функція, нормалізована на своє максимальне значення, є нанесеною в залежності від  $x/w$  на рис. 15б. Цю моду називають  $TEM_{10}$  і рис. 19 показує вигляд відповідного профілю інтенсивності. Мода  $TEM_{01}$  ( $l = 0$  та  $m = 1$ ) отримується поворотом моди  $TEM_{10}$  на рис. 19 на  $90^\circ$ . Дві картинки більш високих мод також показані на рисунку. Відмітимо, що  $l$  та  $m$  дають, загалом кажучи, число нулів поля

(інших ніж ті, що отримуються при  $x \pm \infty$  та  $y \pm \infty$ ) вздовж  $x$  – та  $y$  – осей відповідно.



**Рис. 19.** Картини інтенсивності деяких гаусових мод низького порядку.