

7. Вправи.

1. Встановити прямим обчисленням еквівалентність рівнянь Максвелла у тривимірній та чотиривимірній формі
2. Встановити прямим обчисленням еквівалентність рівнянь руху заряду в електромагнітному полі у тривимірній та чотиривимірній формі.
3. Покладаючи $\{A^\mu\} = \{A^0, \mathbf{A}\}$ (зверніть увагу на положення індексів!), де $A^0 = \varphi$ та \mathbf{A} , відповідно, звичайний (скалярний) та векторний потенціали класичної електродинаміки, встановіть тривимірну форму рівнянь

$$\text{а) } F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu; \quad \text{б) } \partial_\nu A^\nu = 0; \quad \text{в) } \square A^\nu = (4\pi/c)J^\nu.$$

4. Нехай відносно спостерігача S, що покоїться у власній системі координат $\{x, y, z, t\}$, рухається з сталою швидкістю \mathbf{v} інший спостерігач S' (власна система $\{x', y', z', t'\}$). Покажіть, що перетворення координат $S \rightarrow S'$ можна записати так

$$\mathbf{x}'_{\parallel} = \frac{\mathbf{x}_{\parallel} - \mathbf{v}t}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad t' = \frac{t - \mathbf{v} \cdot \mathbf{x} / c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (*)$$
$$\mathbf{x}'_{\perp} = \mathbf{x}_{\perp},$$

де введено представлення просторових координат у вигляді векторів $\{\mathbf{x}\} = \{x, y, z\} = \mathbf{x}_{\parallel} + \mathbf{x}_{\perp}$, де \mathbf{x}_{\parallel} та \mathbf{x}_{\perp} – це, відповідно, складові паралельні та перпендикулярні до швидкості \mathbf{v} системи S' відносно системи S (аналогічно для штрихованої системи координат).

5. Показати прямим обчисленням, що добуток одновимірних перетворень Лоренца є також перетворення Лоренца з новим параметром β .
6. Частинки рухаються в одному напрямку; кожна k -а частинка рухається з швидкістю відносно $(k-1)$ -ї; $k=2, \dots, N$. Знайти швидкість N -ї частинки відносно першої.
7. Записати перетворення Лоренца для чотиривектора (A_0, \mathbf{A}) у тривимірному векторному вигляді для довільного напрямку швидкості \mathbf{V} нової системи відліку.
8. Вектор $\{A^\mu\} = \{A^0, \mathbf{A}\}$ – часоподібний. Знайдіть перетворення Лоренца, що переводить у систему координат, де просторові компоненти цього вектора дорівнюють нулю.
9. Вектор $\{A^\mu\} = \{A^0, \mathbf{A}\}$ – просторовоподібний. Знайдіть перетворення Лоренца, що переводить у систему координат, де нульова компонента цього вектора дорівнює нулю.

10. Нехай спостерігач A вимірює електричне і магнітне поля \mathbf{E}, \mathbf{B} у власній системі координат $\{x, y, z, t\}$; відносно нього рухається з сталою швидкістю v інший спостерігач A' з власною системою $\{x', y', z', t'\}$. Покажіть, що перетворення для поперечних та поздовжніх компонент напруженості електричного поля та індукції магнітного поля, що відповідають перетворенням координат (*) (див. вище вправу 4), мають вид

$$\mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel}, \quad \mathbf{B}'_{\parallel} = \mathbf{B}_{\parallel},$$

$$\mathbf{E}'_{\perp} = \frac{\mathbf{E}_{\perp} + \frac{1}{c}[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \mathbf{B}'_{\perp} = \frac{\mathbf{B}_{\perp} - \frac{1}{c}[\mathbf{v} \times \mathbf{E}]}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

11. Отримати формулу скорочення довжини рухомого тіла.
 12. Швидкість ракети завжди менше за c . Чи можлива, з точки зору СТВ, ситуація, коли радіосигнал, що рухається за нею у тому ж напрямку, не наздоганяє ракету?
 13. Виходячи з 4-вектора густини струму, покажіть, що перетворення густини заряду та густини струму, відповідні перетворенням координат з вправи 3, мають вид

$$\rho' = \frac{\rho - (\mathbf{J} \cdot \mathbf{v}) / c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \mathbf{J}'_{\parallel} = \frac{\mathbf{J}_{\parallel} - \rho \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

$$\mathbf{J}'_{\perp} = \mathbf{J}_{\perp}.$$

14. Частинка, що рухається з швидкістю $v < c$, розпадається на два γ -кванта. Покажіть, що мінімальний кут θ між напрямками розльоту квантів визначається умовою $\cos(\theta/2) = v/c$.
 15. Дві елементарні частки перетворюються на дві інші (можливо тієї ж природи) за схемою $a + b = c + d$. Введемо позначення $s = (p_{a\mu} + p_{b\mu})(p_a^{\mu} + p_b^{\mu})$, $t = (p_{a\mu} - p_{c\mu})(p_a^{\mu} - p_c^{\mu})$, $u = (p_{a\mu} - p_{d\mu})(p_a^{\mu} - p_d^{\mu})$, де $\mu = 0, 1, 2, 3$ — імпулси часток. Доведіть, що $s + t + u = (m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_d^2)c^2$, де m_i — маси часток.
 16. Покажіть, що вільний електрон у вакуумі не може поглинути або випромінювати фотон.
 17. Ізольований атом водню, що покоївся у вакуумі, переходить із одного стану в інший (різниця енергій станів $= h\nu_0$ у системі спокою) і випромінює фотон з частотою ν у оптичному діапазоні. Оцініть відносний зсув частоти $(\nu - \nu_0)/\nu_0$; порівняйте поправку з доплерівською шириною лінії за кімнатних умов.

18. При зіткненні частинки з масою спокою m із нерухомою частинкою з масою m_1 відбувається реакція, після якої залишаються частинки з загальною масою M . Знайдіть мінімальне значення кінетичної енергії частинки, що налітає.

Література.

19. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Теория поля. М., Наука, 1967.
20. Д.Бом. Специальная теория относительности. М., "Мир", 1967.
21. В.Й.Сугаков. Електродинаміка. К., Вища школа. 1974.
22. А.М.Федорченко. Теоретична фізика. Т.1. К., Вища школа, 1992.
23. В.В.Батыгин, И.Н.Топтыгин. Сборник задач по электродинамике. М., Наука, 1970.
24. А.Лайтман, В.Пресс, Р.Прайс, С.Тюкольски. Сборник задач по теории относительности и гравитации. М., "Мир", 1979.
25. Л.Г.Гречко, В.И.Сугаков, О.Ф.Томасевич, А.М.Федорченко. Сборник задач по теоретической физике. К., Высшая школа, 1984.