4. Варіаційний принцип для рівнянь електродинаміки

4.1 Заряд у зовнішньому полі

Розглянемо ділянку світової лінії точкової частинки $x^\mu = x^\mu(p)$, де p – деякий неособливий параметр, між точками $a = x^\mu(p_1)$ та $b = x^\mu(p_2)$. На цій ділянці означимо інтеграл

$$S_0 = -mc\int_a^b ds = -mc\int_a^b \sqrt{\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dp}\frac{dx^\nu}{dp}}dp, \tag{4.1}$$

що має назву дії для вільної частинки (вибір коефіцієнтів забезпечує відповідність з нерелятивістським наближенням для дії), а також інтеграл

$$S_{int} = -\frac{e}{c}\int_a^b A_\mu dx^\mu = -\frac{e}{c}\int_a^b A_\mu \frac{dx^\mu}{dp}dp, \tag{4.2}$$

що описує взаємодію; тут A_μ – чотиривектор потенціалу, e – заряд частинки.

Легко перевірити , що параметр p можна вибрати довільно; при будь-якій заміні $p \rightarrow p' = p'(p)$ вигляд (4.1) та (4.2) не змінюється.

Введемо дію частинки у зовнішньому полі $S = S_0 + S_{int}$. *Варіаційний принцип стаціонарної дії* для частинки у зовнішньому полі можна сформулювати так: перша варіація δS дорівнює нулю на опорній траєкторії $x_0^\mu(p)$, якщо ця траєкторія задовольняє рівнянням руху. Покажемо, що означена дія дозволяє отримати релятивістські рівняння руху частинки в електромагнітному полі.

Розглянемо траєкторії в околі опорної світової лінії $x_0^\mu(p)$. При малих змінах траєкторії $x_0^\mu(p) \rightarrow x_0^\mu(p) + \delta x^\mu(p)$ числове значення функціоналу S змінюється. Нас цікавитимуть малі зміни

$$S(x_0^\mu(p) + \delta x^\mu(p)) - S(x_0^\mu(p)),$$

що описуються першою варіацією δS, при довільних $\delta x^\mu(p)$ за умови

$$\delta x^\mu(p_1) = \delta x^\mu(p_2) = 0. \tag{4.3}$$

Рівняння руху частинки мають вид

$$\begin{gathered} mc\frac{d^2x^\mu}{ds^2} = \frac{e}{c}F^\mu{}_\nu\frac{dx^\nu}{ds}, \\ F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu . \end{gathered} \tag{4.4}$$

Покажемо, що рівняння (4.4) випливають з умови $\delta S = 0$. Виходимо з дії

$$S = \int L(x(p), \dot{x}(p))dp,$$

де позначено

$$L(x, \dot{x}) = -mc\left(\eta_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu\right)^{1/2} - \frac{e}{c}A_\mu(x)\dot{x}^\mu,$$

$\dot{x} = dx/dp$ (ми не пишемо індекси, доки це не викликає непорозумінь). За стандартною процедурою варіаційного числення умова $\delta S = 0$ з урахуванням (4.3) приводить до рівнянь Ейлера-Лагранжа для функції $L(x, \dot{x})$

$$\frac{d}{dp}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{\mu}}\right) = \frac{\partial L}{\partial x^{\mu}},$$

або, обчислюючи похідні від L,

$$\frac{d}{dp}\left\{mc\frac{\eta_{\mu\nu}\dot{x}^{\nu}}{ds/dp} + \frac{e}{c}A_{\mu}\right\} = \frac{e}{c}\frac{\partial A_{\nu}}{\partial x^{\mu}}\dot{x}^{\nu}$$

де враховано $\dfrac{ds}{dp} = \left(\eta_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu}\right)^{1/2}$.

Переходячи від параметра p до $s = \displaystyle\int_{p_1}^{p}\frac{ds}{dp}dp$, маємо

$$mc\eta_{\mu\nu}\frac{d^2x^{\nu}}{ds^2} = \frac{e}{c}\frac{\partial A_{\nu}}{\partial x^{\mu}}\frac{dx^{\nu}}{ds} - \frac{e}{c}\frac{d}{ds}A_{\mu} = \frac{e}{c}F_{\mu\nu}\frac{dx^{\nu}}{ds},$$

що співпадає з (4.4) після підняття індексу.

4.2. Варіаційний принцип для рівнянь поля: загальні міркування

Наша мета – сформулювати варіаційний принцип, з якого випливають рівняння електромагнітного поля. В зв’язку з цим спочатку проаналізуємо загальні співвідношення для абстрактного набору полів $f_1, \ldots, f_N$. Якщо ці поля задано в усьому просторі, функціонал дії повинен містити інтегрування по чотирьохвимірному об’єму (а не тільки по траєкторіях частинок), тому ми розглянемо дію для полів у вигляді:

$$S_f = \int_{\Omega} d^4x L\Big(f_1(x), \ldots, f_N(x), f_{1,\mu}(x), \ldots, f_{N,\mu}(x)\Big), \qquad (4.5)$$

де $f_{n,\mu} = \partial_{\mu} f_n$, Ω – область чотиривимірного простору з межею $\delta\Omega$, $d^4x = dx^0 \cdot dx^1 \cdot dx^2 \cdot dx^3$, $L(f_1, \ldots, f_N)$ – густина функції Лагранжа. Розглянемо варіацію δS_f при змінах $f_n(x) \to f_n(x) + \delta f_n(x)$ в околі опорної сукупності полів $f_n(x)$, вважаючи, що зміни польових функцій δf_n обертаються в нуль на межі області інтегрування

$$\delta f_n(x) = 0 \text{ при } x \in \partial\Omega. \qquad (4.6)$$

У цьому разі

$$\delta S_f = \int\limits_{\Omega} d^4x \sum_n \left\{ \frac{\partial L}{\partial f_n} \delta f_n + \frac{\partial L}{\partial f_{n,\mu}} \delta f_{n,\mu} \right\} =$$

$$= \int\limits_{\Omega} d^4x \left\{ \sum_n \left[\frac{\partial L}{\partial f_n} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial L}{\partial f_{n,\mu}} \right) \right] \delta f_n + \sum_n \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial L}{\partial f_{n,\mu}} \delta f_n \right) \right\}.$$

Інтеграл від дивергентного члена $\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial L}{\partial f_{n,\mu}} \delta f_n \right)$ за формулою Остроградського-Гауса зводиться до інтегралу по $\partial\Omega$ і в силу умови (4.6) дає нуль.

Варіаційний принцип стаціонарної дії вимагає, за означенням,

$$\delta S_f = 0,$$

де варіація обчислюється відносно розв'язку рівнянь поля для будь-яких δf_n, що задовольняють (4.6). Звідси маємо рівняння Лагранжа для польових функцій, прирівнюючи в підінтегральному виразі усі коефіцієнти при незалежних δf_n:

$$\frac{\partial L}{\partial f_n} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial L}{\partial f_{n,\mu}} \right) = 0. \tag{4.7}$$

Зауваження: Якщо змінити підінтегральний вираз в (4.5), додавши до нього повну 4-дивергенцію

$$L \to L + \partial_\mu F^\mu,$$

де F – будь-яка функція від польових змінних f_n , то при обчисленні варіації додається вираз

$$\int \partial_\mu (\delta F^\mu)\, d^4x = 0,$$

що обертається на нуль в силу (4.6) за формулою Остроградського-Гауса.

Тому *додавання повної 4-дивергенції до L не впливає на рівняння* (*4.7*).

Тут при посиланні на умови (4.6) ми припускаємо, що δF^μ залежить від δf , але не від похідних. Можливий розгляд і з похідними від невідомих функцій, але це вимагає певних застережень (наприклад, щоб умова, аналогічна (4.6), виконувалася також і для похідних).

4.3. Дія для електромагнітного поля

Згідно з сучасними уявленнями, дія для системи "поле + джерела" має складатися з суми дій для поля, для зарядів та з доданка, що описує взаємодію поля із зарядами:

$$S = S_0 + S_{int} + S_f,$$

де вирази

$$S_0 = -\sum mc \int ds, \quad S_{int} = -\sum \frac{e}{c} \int A_\mu dx^\mu$$

отримано з (4.1), (4.2) за допомогою сумування дії для окремих частинок. У випадку неперервного розподілу зарядів у цих виразах слід перейти від сум до інтегралів. Зробимо це лише для S_{int}, оскільки S_0 не впливає на виведення рівнянь поля при обчисленні варіації δS по δA_μ. Для неперервного розподілу ми співставляємо кожному елементу заряду de його траєкторію $x_e^\mu(t)$; відповідно

$$de\frac{dx_e^\mu}{dt} = \rho(x)d^3x\frac{dx^\mu}{dt} = J^\mu(x)d^3x,$$

де ρ – об'ємна густина заряду, $x = x_e(t)$, $J^\mu = \rho dx^\mu / dt$ – чотири-вектор густини струму. Тоді, переходячи до інтегралу в S_{int}:

$$\begin{aligned} S_{int} &= -\tfrac{1}{c}\int de\int A_\mu(x_e)\frac{dx_e^\mu}{dt}dt = -\tfrac{1}{c}\int dt\int d^3x A_\mu(x)J^\mu(x) = \\ &= -\frac{1}{c^2}\int d^4x A_\mu J^\mu . \end{aligned} \qquad (4.8)$$

Покажемо, що цей вираз є калібрувально-інваріантним, тобто не змінюється при калібрувальних перетвореннях

$$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu\chi .$$

При такому перетворенні інтеграл (4.8) отримує доданок

$$-\frac{1}{c^2}\int d^4x\frac{\partial\chi}{\partial x^\mu}J^\mu = -\frac{1}{c^2}\int d^4x\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\chi J^\mu\right) + \frac{1}{c^2}\int d^4x\chi J^\mu{}_{,\mu} .$$

Інтеграл від дивергенції є несуттєвим, оскільки не дає внеску в рівняння руху, доданок із струмом також дорівнює нулю завдяки закону збереження заряду $J^\mu{}_{,\mu} = 0$. Це ілюструє зв'язок калібрувальної інваріантності із збереженням заряду.

Підберемо вираз для S_f вигляду (4.5), що приводить до рівнянь класичної електродинаміки. Поле для пошуків L значно звужується, якщо врахувати такі обставини. По-перше, рівняння електромагнітного поля повинні мати однаковий вигляд в усіх інерціальних системах відліку. Тому доцільно конструювати L за допомогою згорток вектора A_μ та його похідних $A_{\mu,\alpha}$. По-друге, в рівняннях руху фігурує не безпосередньо A_μ, а величини $F_{\mu\nu}$. Саме вони є величинами, які можливо вимірювати, тобто саме вони мають фізичний зміст, причому вони залишаються незмінними відносно калібрувальних перетворень $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu\chi$. Щоб зберегти цю незалежність в рівняннях поля, будемо конструювати L саме з $F_{\mu\nu}$. За побудовою $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ задовольняє рівняння (3.2), які запишемо у вигляді

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\cdot F_{\beta\gamma,\delta} = 0 . \qquad (4.9)$$

Нарешті, за принципом суперпозиції, рівняння поля мають бути лінійними. Тому природно обмежитися лише квадратичними комбінаціями $F^{\mu\nu}$. Таких скалярних комбінацій лише дві (з точністю до сталого множника):

$$I_1 = F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \text{ та } I_2 = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta}.$$

Точніше кажучи, I_2 – псевдоскаляр (він змінює знак при інверсіях координат). Крім того,

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta} = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}F_{\alpha\beta}(\partial_\gamma A_\delta - \partial_\delta A_\gamma) =$$
$$= 2\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}F_{\alpha\beta}\partial_\gamma A_\delta = 2\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\partial_\gamma\left[F_{\alpha\beta}A_\delta\right],$$

де було враховано антисиметрію $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = -\varepsilon^{\alpha\beta\delta\gamma}$ та рівняння (4.9), що мають місце за побудовою, завдяки вигляду $F^{\mu\nu}$.

Таким чином, I_2 зводиться до 4-дивергенції, що не дає внеску в рівняння поля.

З наведених міркувань випливає, що

$$S_f = -\frac{1}{16\pi c}\int F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}d^4x. \tag{4.10}$$

Вибір сталого множника зроблено так, щоб забезпечити відповідність гаусовій системі одиниць. Можна показати, що зміна цього множника вплине лише на визначення одиниці заряду. Враховуючи внесок взаємодії поля і зарядів, маємо

$$S_f + S_{int} = \int d^4xL, \tag{4.11}$$

де

$$L = -\frac{1}{16\pi c}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{c^2}A_\mu J^\mu$$

Нагадаємо, що незалежними польовими змінними в (4.11) вважаємо A_α, α = 0,1,2,3. Обчислимо

$$\delta I_1 = 2F^{\mu\nu}\delta F_{\mu\nu} = 2F^{\mu\nu}\left(\partial_\mu\delta A_\nu - \partial_\nu\delta A_\mu\right) = 4F^{\mu\nu}\delta A_{\nu,\mu},$$

тобто

$$\frac{\partial I_1}{\partial A_{\nu,\mu}} = 4F^{\mu\nu}.$$

Підставляючи L в рівняння Ейлера (4.7), маємо

$$-\frac{1}{c^2}J^\nu + \frac{1}{4\pi c}\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0,$$

або остаточно

$$\partial_\alpha F^{\alpha\mu} = \frac{4\pi}{c}J^\mu. \tag{4.12}$$

Разом із (4.9) це рівняння складає систему рівнянь Максвелла для тензора $F^{\mu\nu}$.