Рух в полі центральних сил, закон збереження моменту імпульсу

Рекомендовані задачі 1
КШФ 7.8 1
КШФ 7.27 2
КШФ 7.23 4
Іродов 1.242 5
Іродов 1.239 6
Іродов 1.268 7

Рекомендовані задачі

Іродов 1.218 - https://www.youtube.com/watch?v=pjzFxTR2hVs
Іродов 1.224 - https://www.youtube.com/watch?v=voZ5cKhFs2w
Іродов 1.227 - https://www.youtube.com/watch?v=3JGyExmc0cA
Іродов 1.240 - https://www.youtube.com/watch?v=WDYwcrk-Vu8
Іродов 1.248 - https://www.youtube.com/watch?v=EMbmXkwhUoE
Загородній 9.11 - https://www.youtube.com/watch?v=2DUkrU4A2GQ

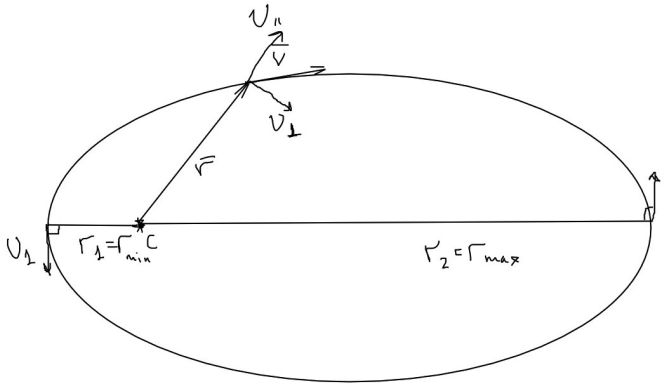
КШФ 7.8

Закон збереження енергії

$$\frac{mv_1^2}{2} - G\frac{m_c m}{r_1} = \frac{mv_2^2}{2} - G\frac{m_c m}{r_2} \tag{1.1}$$

Закон збереження моменту імпульсу:

$$\begin{aligned} &L_z = m[\vec{r} \times \vec{v}]_z = mrv\sin\alpha = mr_1v_1 = mr_2v_2 \\ &r_1v_1 = r_2v_2 \end{aligned} \tag{1.2}$$



Виражаємо v_2 з (1.2) і підставляємо у (1.1):

$$v_2 = \frac{r_1 v_1}{r_2}$$

$$v_1^2 - 2G\frac{m_c}{r_1} = \left(\frac{r_1 v_1}{r_2}\right)^2 - 2G\frac{m_c}{r_2}$$

$$v_1^2\left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2}\right) = 2Gm_c\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \tag{1.3}$$

$$v_1^2\frac{r_2^2 - r_1^2}{r_2^2} = 2Gm_c\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$$

$$v_1^2 = 2Gm_c\frac{r_2}{r_1(r_1 + r_2)}$$

Тоді момент імпульсу:

$$L = mr_1\sqrt{2Gm_c\frac{r_2}{r_1(r_1 + r_2)}} = m\sqrt{2Gm_c\frac{r_1 r_2}{(r_1 + r_2)}} \tag{1.4}$$

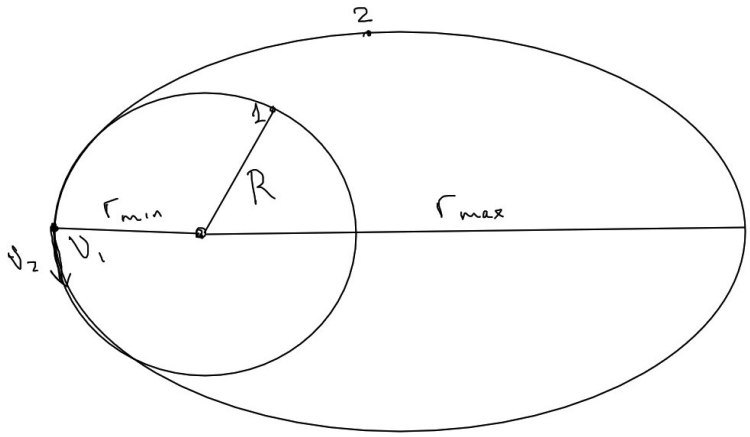
P.S.

Якщо записати 2-й закон Ньютона:

$$G\frac{m_c m}{r_1^2} = \frac{mv_1^2}{R_1} \tag{1.5}$$

r_1 - відстань до центру поля, R_1 - радіус кривизни траєкторії (який треба шукати у випадку еліпса)

КШФ 7.27



3-й закон Кеплера:

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \frac{a_1^3}{a_2^2} = \left(\frac{2R}{r_{\min} + r_{\max}}\right)^3 = \left(\frac{2R}{R + r_{\max}}\right)^3 \tag{1.6}$$

Максимальна віддаль 2-го тіла від центру Землі:

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{2R}{R+r_{\max}}\right)^3$$

$$\frac{1}{2^2} = \left(\frac{2R}{R+r_{\max}}\right)^3 \qquad (1.7)$$

$$2^{2/3} = \frac{R+r_{\max}}{R}$$

$$r_{\max} = R(2^{2/3}-1)$$

Використовуємо задачу КШФ 7.8 . За формулою (1.3) виражаємо швидкість 2-го тіла на еліптичній орбіті в точці максимального наближення:

$$v_2 = \sqrt{2GM\frac{R(2^{2/3}-1)}{R(R+R(2^{2/3}-1))}} = \sqrt{2GM\frac{(2^{2/3}-1)}{R2^{2/3}}} \qquad (1.8)$$

Виражаємо швидкість 1-го тіла:

$$G\frac{Mm}{R^2} = m\frac{v_1^2}{R}$$

$$v_1^2 = G\frac{M}{R} \qquad (1.9)$$

1-е та 2-е тіло стикаються , відбувається не пружній удар:

$$mv_1 + mv_2 = (m+m)u$$

$$v_1 + v_2 = 2u \qquad (1.10)$$

$$u = \frac{v_1+v_2}{2} = \frac{\sqrt{GM/R} + \sqrt{2GM\frac{(2^{2/3}-1)}{R2^{2/3}}}}{2}$$

Сукупне тіло почне рухатись зі швидкістю u та найменшою відстанню R тоді знов використовуємо (1.3):

$$u^2 = 2GM\frac{r_x}{R(R+r_x)}$$

$$R + r_x = \frac{2GMr_x}{Ru^2} \qquad (1.11)$$

$$r_x = R\Big/\left(1-\frac{2GM}{Ru^2}\right)$$

U можемо підставити з (1.10)

P.S.

Уточнення 3-го закону Кеплера:

$$\frac{T^2}{a^3} = const \qquad (1.12)$$

Визначимо константу для колової орбіти:

$$G\frac{Mm}{R^2} = ma_n = m\omega^2 R = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R$$

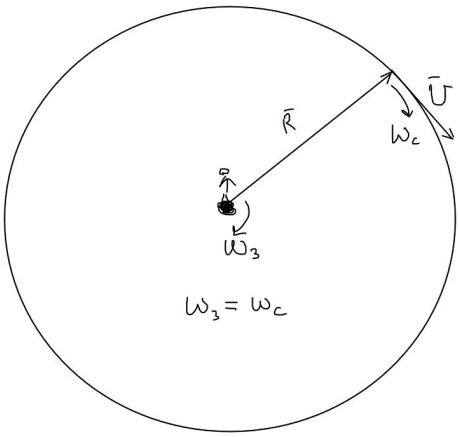
$$G\frac{M}{R^3} = \frac{4\pi^2}{T^2} \qquad (1.13)$$

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

Тоді для еліптичної орбіти також (1.12) :

$$\frac{T_1^2}{a_1^2} = \frac{T_2^2}{a_2^2} = \frac{4\pi^2}{GM} \tag{1.14}$$

КШФ 7.23



Запишемо 2-й закон Ньютона в проекції на нормальний напрямок:

$$G\frac{Mm}{R^2} = m\omega^2 R = m\frac{v^2}{R} \tag{1.15}$$

Тоді лінійна швидкість:

$$v = \sqrt{G\frac{M}{R}} \tag{1.16}$$

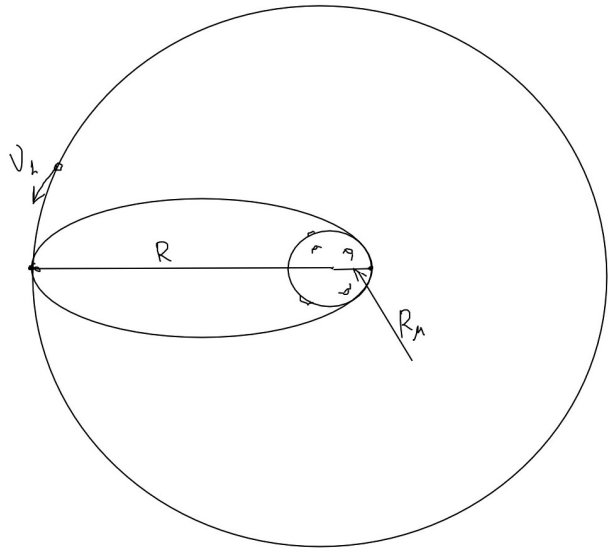
У стаціонарного супутника кутова швидкість обертання має бути рівною кутовій швидкості обертання Землі навколо власної осі:

$$\begin{gathered} G\frac{Mm}{R^2} = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R \\ R^3 = G\frac{MT^2}{4\pi^2} \end{gathered} \tag{1.17}$$

Підставляємо радіус (1.17) у формулу для швидкості (1.16):

$$v = \sqrt{G\frac{M\sqrt[3]{4\pi^2}}{\sqrt[3]{GMT^2}}} \tag{1.18}$$

Іродов 1.242



Третій закон Кеплера:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3} \tag{1.19}$$

Час падіння на Місяц:

$$T_n = \frac{T_2}{2} \tag{1.20}$$

Велика вісь еліптичної траєкторії:

$$a_2 = r_{\min} + r_{\max} = R_м + R \tag{1.21}$$

Тоді:

$$\left(\frac{T_1}{2T_n}\right)^2 = \left(\frac{2R}{R+R_м}\right)^3 \tag{1.22}$$

Період обертання по коловій орбіті:

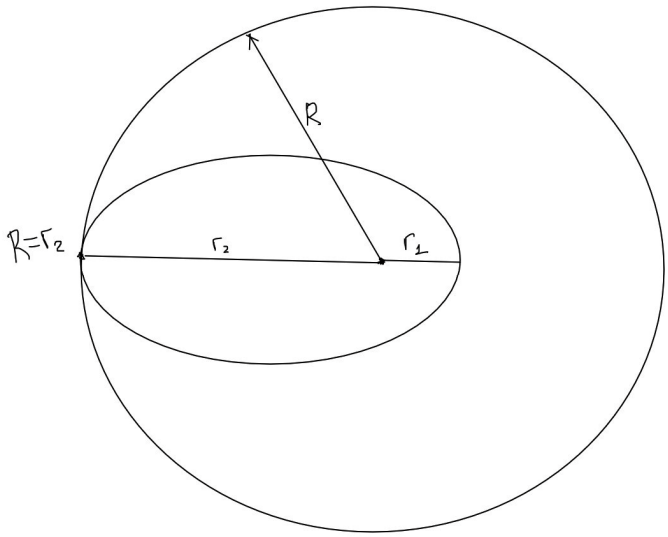
$$T_1 = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi R}{\sqrt{G\frac{M_м}{R}}} \tag{1.23}$$

Час падіння на Місяц:

$$T_n = \frac{T_1}{2}\sqrt{\left(\frac{2R}{R+R_м}\right)^3} = \frac{\pi R}{\sqrt{G\frac{M_м}{R}}}\sqrt{\left(\frac{2R}{R+R_м}\right)^3} = \frac{\pi R^3 2\sqrt{2}}{\sqrt{GM_м(R+R_м)^3}} \tag{1.24}$$

Іродов 1.239

Добудуємо колову траєкторію іншого тіла таку що дотикається еліптичної.



Запишемо 3-й закон Кеплера:

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3 \tag{1.25}$$

За малюнком:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \left(\frac{r_1 + r_2}{2R}\right)^3 = \left(\frac{r_1 + r_2}{2r_2}\right)^3 \tag{1.26}$$

$$T_1 = T_2\left(\frac{r_1 + r_2}{2r_2}\right)^{3/2} \tag{1.27}$$

Для колової орбіти запишемо 2-й закон Ньютона:

$$G\frac{Mm}{R^2} = m\frac{v^2}{R} = m\omega^2 R = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R$$

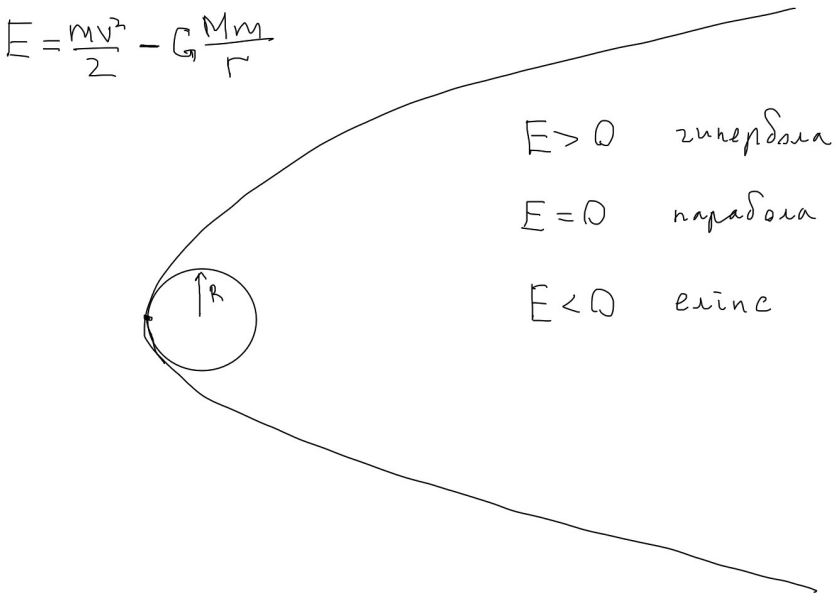
$$T^2 = \frac{4\pi^2 R^3}{GM} \tag{1.28}$$

$$\frac{T^2}{(2R)^3} = \frac{\pi^2}{2GM}$$

Підставляємо (1.28) у (1.27):

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}\left(\frac{r_1 + r_2}{2r_2}\right)^{3/2} = 2\pi\sqrt{\frac{r_2^3}{GM}}\left(\frac{r_1 + r_2}{2r_2}\right)^{3/2} = \pi\sqrt{\frac{(r_1 + r_2)^3}{2GM}} \tag{1.29}$$

Іродов 1.268



У параболічної траєкторії E=0. Нехай v_{II} це швидкість в момент найбільшого наближення по параболічній траекторії:

$$\frac{mv_{II}^2}{2} - G\frac{Mm}{r} = 0$$
$$v_{II} = \sqrt{2G\frac{M}{r}} \tag{1.30}$$

Для колової орбіти пишемо 2-й закон Ньютона (v_I швидкість на коловій орбіті):

$$G\frac{Mm}{r^2} = m\frac{v_I^2}{r}$$
$$v_I = \sqrt{G\frac{M}{r}} \tag{1.31}$$

Зміна швидкості:

$$\Delta v = v_I - v_{II} = \sqrt{G\frac{M}{r}}(1-\sqrt{2}) \tag{1.32}$$