ТЕМА №6. Розв'язання крайових задач в MatLab

Мета: Вивчити можливості системи MatLab для розв'язання крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР).

1. Теоретичні відомості

MatLab, починаючи з версії 6.0, має засоби розв'язання крайових задач для ЗДР. Мається на увазі пошук розв’язку на заданому відрізку з крайовими (граничними) умовами на кінцях інтервалу або на кордоні області.

Крайовою задачею називається ДР вигляду $y''=f(x,y,y')$ на відрізку $a \le x \le b$, яке задовольняє таким умовам на границях відрізка: $\alpha y(a)+\beta y'(a)=A$ і $\gamma y(b)+\delta y'(b)=B$, де α, β, γ, δ, A, B – задані числа. Етапи її розв'язання наступні:

1. Перетворення ДР 2-го порядку на систему двох рівнянь 1-го порядку.
2. Написання М-функції обчислення правої частини системи.
3. Написання М-функції визначення граничних умов.
4. Формування початкового наближення за допомогою спеціальної функції bvpinit.
5. Виклик солверу bvp4c для розв'язання крайової задачі.
6. Візуалізація результату.

Перші два етапи виконуються аналогічно першим двом етапам розв’язання задачі Коші (див. тему №5).

Введення допоміжних функцій $y_1(x)$ та $y_2(x)$ призводить до формування системи рівнянь 1-го порядку відносно них: $y'_1=y_2$, $y'_2=f(x,y_1,y_2)$.

М-функція правої частини системи залежить від x та вектора y, що складається з двох компонент: y(1) відповідає y_1, а y(2) – y_2. М-функція правої частини складається аналогічно М-функції при розв'язанні задачі Коші.

Граничні умови потрібно записати для допоміжних функцій таким чином, щоб *у правих частинах стояли нулі*: $\alpha y(a)+\beta y'(a)-A=0$, $\gamma y(b)+\delta y'(b)-B=0$.

М-функція, що описує граничні умови, залежить від двох аргументів – векторів ya та yb і має вигляд: function g=bound(ya,yb)

g=[alpha*ya(1)+beta*ya(2)-A; gamma*yb(1)+delta*yb(2)-B];

Вибір початкового наближення може вплинути на розв'язок, який видає солвер bvp4c. MatLab знаходить наближений розв'язок крайових задач *методом скінченних різниць*, тобто отриманий розв'язок є *вектором значень* невідомих функцій в точках відрізка (у вузлах сітки). Аргументами функції bvpinit, призначеної для задання початкового наближення, є вектор з координатами вузлів сітки на відрізку [a b] та вектор з двох елементів, який містить постійне початкове наближення для функцій y_1, y_2. Задана сітка може бути змінена солвером у процесі розв'язання для забезпечення потрібної точності. Виклик bvpinit має такий вигляд:

initsol=bvpinit (вектор сітки, вектор постійних значень функцій).

Після визначення початкового наближення викликається солвер bvp4c, вхідними аргументами якого є імена М-функцій правої частини системи та граничних умов, початкове наближення і, в разі необхідності, додаткові параметри для керування обчислювальним процесом. Додаткові параметри формуються за допомогою функції bvpset. Вихідним аргументом є структура, що містить інформацію про сітку, обрану MatLab, значення невідомих функцій та їх похідних.

<u>Приклад</u>. Розв'язати крайову задачу для ЗДР 2-го порядку $y''=-\sin x$, $y(0)=0$, $y'(11\pi/2)+y(11\pi/2)=-1$ та порівняти отриманий розв'язок з точним: $y=\sin x$. Система ДР 1-го порядку, що відповідає нашому рівнянню, та граничні умови для неї матимуть вигляд: $\begin{cases} y'_1=y_2 \\ y'_2=-\sin x \end{cases}$, $y_1(0)=0$, $y'(11\pi/2)+y(11\pi/2)+1=0$. М-функція rside для системи ДР матиме вигляд:

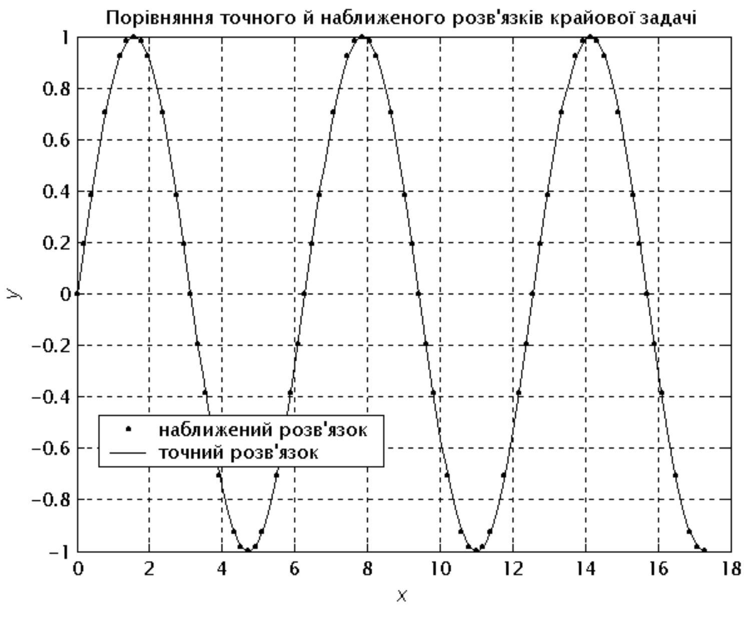
```
function f=rside (x,y)
f=[y(2); -sin(x)];
```

М-функція bound для граничних умов матиме вигляд:

```
function f=bound (ya,yb)
f=[ya(1); yb(2)+yb(1)+1];
```

Розв'язання крайової задачі оформлюється у вигляді такої програми:

```
% початкове наближення y1=1, y2=0
initsol=bvpinit(0:pi/2:11*pi/2,[1 0]);
% виклик солвера від М-функції rside
sol=bvp4c('rside','bound',initsol);
% використання полів x і y структури
% sol для побудови розв'язку
% у sol.x містяться координати сітки
% у sol.y матриця
% sol.y(1,:) відповідає значенням
% функції y1 в sol.x(:)
% sol.y(2,:) відповідає значенням
% функції y2 в sol.x(:)
plot(sol.x,sol.y(1,:),'k.'); hold on;
% виведення графіка точного розв'язку
x=0:pi/30:11*pi/2;
plot(x,sin(x),'k-');    grid;
% виведення пояснень на графік
title('Порівняння точного й наближеного розв'язків крайової задачі');
```



```
xlabel('\itx');   ylabel('\ity');
legend('наближений розв'язок', точний розв'язок',0);
```

У наведеній програмі задається початкове наближення за допомогою функції bvpinit, викликається солвер bvp4c, отриманий результат виводиться на один графік з точним розв'язком для порівняння.

Структура sol містить поля, доступ до яких здійснюється за допомогою розміщення імені поля після імені структури через крапку.

Отримані графіки свідчать про те, що для простих задач солвер bvp4c дає хороші результати.

ToolBox Symbolic Math також дозволяє знаходити аналітичний розв'язок крайових задач. Для цього, аналогічно розв'язанню задачі Коші (див. тема №5), використовується функція dsolve.

2. Порядок виконання лабораторної роботи

Виконати наступне завдання згідно з номером свого варіанту.

В задачах 1–4,12,13,16 розв'язати задану крайову задачу, взявши крок рівним 0.01.

В задачах 1–4. Побудувати графіки знайденого наближеного та наведеного аналітичного розв'язків в одній системі координат.

В задачах 5–11,14,15,17,18,20 розв'язати задану крайову задачу, взявши крок рівним 0.05. Вивести графік наближеного розв'язку системи.

Знайти також аналітичні розв'язки крайових задач 2–9,12,15,20,21 засобами ToolBox Symbolic Math і перевірити його.

Для задач 19 і 22 взяти крок рівним 0.01.

На всіх графіках виводити осі координат і заголовок з рівнянням відповідної задачі.

1. $y''(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}y'(x)-\dfrac{2}{1+x^2}y(x)+1$, $y(0)=1.25$, $y(4)=-0.95$ на відрізку [0;4]; $y(x)=1.25+0.4861x-2.25x^2+2x\,arctg(x)-\dfrac{1}{2}ln\left(1+x^2\right)+\dfrac{1}{2}x^2\,ln\left(1+x^2\right)$.

2. $y''(x)=2y'(x)-y(x)+x^2-1$, $y(0)=5$, $y(1)=10$ на відрізку [0;1]; $y(x)=x^2+4x+5$.

3. $y''+(1/x)y'+\left(1-1/\left(4x^2\right)\right)y=0$, $y(1)=1$, $y(6)=0$ на відрізку [1;6]; $y(x)=(0.2914\,cos(x)+1.0013\,sin(x))/\sqrt{x}$.

4. $y''-(1/x)y'+(1/x^2)y=1$, $y(0.5)=1$, $y(4.5)=2$ на відрізку [0.5;4.5]; $y(x)=x^2-0.2526x-2.5284x\,ln(x)$.

5. $x''=(-2/t)x'+(2/t^2)x+(10\,ln(t))/t^2$, $y(1)=1$, $y(3)=-1$ на відрізку [1;3].

6. $y''=-5y'-6y+xe^{-2x}+3.9\cos(3x)$, $y(0)=0.95$, $y(3)=0.15$ на відрізку [0;3].

7. $y''=-4y'-4y+5\cos(4x)+\sin(2x)$, $y(0)=0.75$, $y(2)=0.25$ на відрізку [0;2].

8. $y''=-2y'-2y+e^{-x}+\sin(2x)$, $y(0)=0.6$, $y(4)=-0.1$ на відрізку [0;4].

9. $y''+\frac{2}{x}y'-\frac{2}{x^2}y=\frac{\sin(x)}{x^2}$, $y(1)=-0.02$, $y(6)=0.02$ на відрізку [1;6].

10. $y''+\frac{1}{x}y'+\left(1-\frac{1}{4x^2}\right)y=\sqrt{x}\cos(x)$, $y(1)=1.0$, $y(6)=-0.5$ на відрізку [1;6].

11. $y''+x^2y=-2$, $y(-1)=0$, $y(1)=0$ на відрізку [-1;1].

12. $y''+xy'+y=-2x$, $y(0)=1$, $y(1)=0$ на відрізку [0;1].

13. $y''+(x-1)y'+3.125y=-4x$, $y(0)=1$, $y(1)=1.368$ на відрізку [0;1].

14. $y''+ychx=0$, $y(0)=0$, $y(2.2)=1$ на відрізку [0;2,2].

15. $x^2y''-xy'=3x^3$, $y(1)=2$, $y(2)=9$ на відрізку [1;2].

16. $-y''+x^2y=\left(\frac{\pi^2}{4}+x^2\right)\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$, $y(0)=1$, $y(1)=0$ на відрізку [0;1].

17. $x^2y''+xy'-y=x^2$, $y(1)=1.333$, $y(3)=3$ на відрізку [1;3].

18. $x^2y''-2y=0$, $y(1)-2y'(1)=0$, $y(2)=4.5$ на відрізку [1;2].

19. $y''+|y|=0$ з граничними умовами $y(0)=0$ и $y(4)=-2$ на відрізку [0;4].

20. $y''(x)=2y'(x)+y(x)+x^2-1$ з граничними умовами $y(-1)=2$ и $y(2)=17$ на відрізку [-1;2].

21. $x^2y''-xy'=3x^3$ з граничними умовами $y(1)=2$ и $y(3)=28$ на відрізку [1;3].

22. $y''+(x-1)y'+3.125y=4x$ з граничними умовами $y(0)=1$ и $y(1)=1.368$ на відрізку [0;1].

23. $y''+xy'+y=2x$, $y(0)=1$, $y(1)=0$ на відрізку [0;1].

3. Контрольні питання

1. Яка задача називається крайовою?
2. Наведіть схему розв'язання крайової задачі в MatLab.
3. Які функції використовуються в MatLab для розв'язання крайових задач?
4. Які засоби ToolBox Symbolic Math використовуються для розв'язання крайових задач?