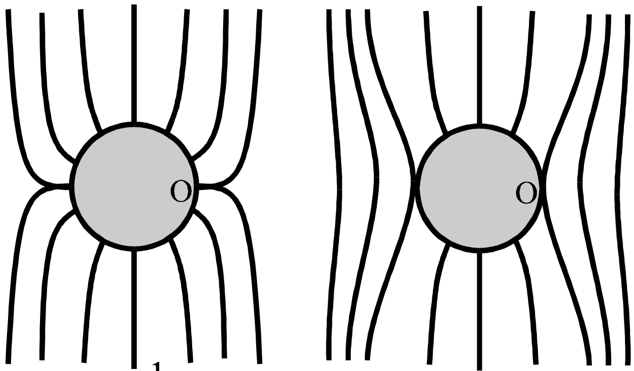
Особые точки электростатического поля на примере задачи про шар в однородном поле

С.Л.Парновский

Условие задачи



1 2

Рассмотрим однородное электростатическое поле, в которое помещен металлический шар. Если выбрать «ось» шара в направлении поля, то на «экваторе» шара выбираем точку О. Естественно, что из-за аксиальной симметрии задачи все точки на «экваторе» эквивалентны и т. О является их типичным представителем. Нарисуем теперь картину силовых линий поля и поинтересуемся линией (или линиями), проходящей через т. О. Некто, зная, что силовые линии всегда перпендикулярны поверхности проводника, рисует картину, изображенную на рис. 1. Его оппонент против рис. 1 из-за того, что силовая линия имеет угол в т. О, а в школе учат, что силовая линия не может иметь изломов. Он предлагает вариант, изображенный на рис. 2. Но на нем силовые линии не перпендикулярны поверхности проводника. Кто из них прав? Или неправы оба? Перед тем, как нарисовать искомую картинку, надо узнать, какой угол составляет силовая линия поля, проходящая через т. О, с поверхностью проводника.

Решение задачи

Введем в плоскости центрального сечения шара две системы координат – декартову (x,y) с центром в центре шара (ось y направлена вдоль направления поля, ось x проходит через точку О) и полярную (r,θ) с центром в центре шара (угол θ отсчитывается от оси y, $r^2=x^2+y^2$). Обозначим радиус шара R. Вне шара потенциал поля будет суммой потенциала однородного поля $\varphi_1 = -Ey = -Er\cos\theta$ и поля диполя, находящегося в центре шара и имеющего дипольный момент $\vec{d} = \vec{E}R^3$, то есть $\varphi_2 = \dfrac{ER^3\cos\theta}{r^2}$:

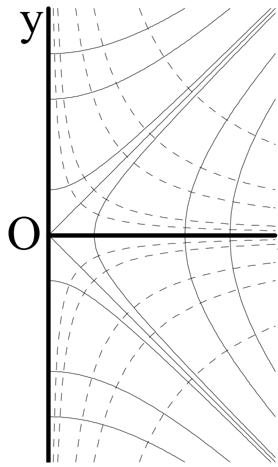
$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = E\cos\theta\, r\left(\frac{R^3}{r^3} - 1\right) = Ey\left(\frac{R^3}{r^3} - 1\right). \qquad (1)$$

Вывод формулы (1) можно найти в любом приличном задачнике. Однако он и не нужен. Решение (1) удовлетворяет уравнению Лапласа вне шара (r>R), имеет на большом расстоянии от него нужную асимптотику $\varphi \xrightarrow[r\to\infty]{} \varphi_1$ и удовлетворяет граничному условию φ=0 на поверхности шара. Поэтому, благодаря теореме об единственности решения задач электростатики, это решение будет единственно верным.

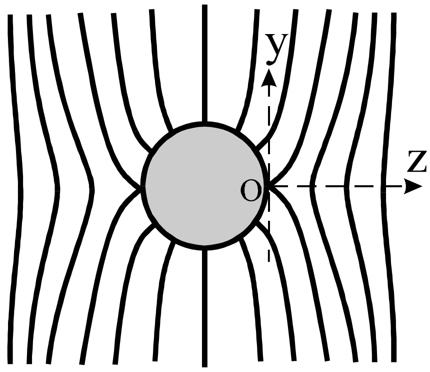
Заметим, что точка О лежит на пересечении двух взаимно перпендикулярных эквипотенциальных поверхностей – поверхности шара и плоскости y=0.

Рассмотрим поведение (1) вблизи т. О. Для этого введем новую декартовую систему координат (z.y) с началом в этой точке. Координата y совпадает с аналогичной координатой системы (x,y), а координата z получается из координаты x сдвигом $z=x-R$. При малых y, z получаем

$$\varphi = -E\cos\varphi\left(r - \frac{R^3}{r^2}\right) = -E\left(y - \frac{yR^3}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}\right) =$$
$$= -Ey\left[1 - \left(1 + \frac{2z}{R} + \frac{z^2+y^2}{R^2}\right)^{-3/2}\right] \approx -Ey\left[1 - \left(1 - \frac{3z}{R}\right)\right] = -\frac{3E}{R}yz. \tag{2}$$



Вблизи точки О эквипотенциальными поверхностями являются оси y и z, а также семейство гипербол yz=const. На рисунке справа, представляющем картину поля в малой окрестности т. О, они нарисованы штрихованными гиперболами. Силовые линии поля ортогональны эквипотенциальным поверхностям. На рисунке они обозначены сплошными линиями. Некоторые из них являются гиперболами, ортогональными поверхности шара z=0, некоторые – гиперболами, не касающимися шара. Кроме гипербол, силовыми линиями будут две прямые, начинающиеся в точке О и образующие угол 45° с поверхностью шара. Отсюда получаем ответ: искомый угол равен 45° и картина силовых линий имеет вид



В т. О напряженность поля равна нулю, как и ее тангенциальная составляющая, поэтому граничное условие $E_t=0$ выполняется, несмотря на неперпендикулярность силовых линий.

Более общий случай

Покажем, что это решение является частным случаем более общей ситуации. Особыми точками поля (не только электрического) называются точки, в которых его напряженность обращается в нуль. В общем случае вблизи произвольной точки потенциал поля можно разложить в ряд:

$$\varphi = \varphi_0 - \sum_{i=1}^{3} E_i x_i + \sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} W_{ik} x_i x_k + \dots \,, \qquad (3)$$

где φ_0 – потенциал в данной точке, а x_i=(x, y, z) – произвольные декартовы координаты с началом в данной точке. Индексы i, k принимают значение 1, 2, 3 и нумеруют координаты. E_i – компоненты напряженности электрического поля. Вблизи особой точки они зануляются. Тензор (матрица) W является симметричным и поворотом координат его можно привести к диагональному виду W=diag(A,B,C). При этом для потенциала вблизи особой точки поля получаем разложение

$$\varphi = \varphi_0 + Ax^2 + By^2 + Cz^2 + \dots \qquad (4)$$

Уравнение Лапласа $\Delta\varphi = 0$ выполняется при

$$A+B+C=0. \qquad (5)$$

В особых точках поля начинаются или кончаются силовые линии.

Если на поверхности проводника (без скачков у направления нормали к этой поверхности) у нас есть области с положительными и отрицательными зарядами (заведомо будут у незаряженного проводника в поле), то разделяющая их кривая будет состоять из особых точек поля (тангенциальная составляющая вектора напряженности обращается в ноль из-за граничных условий, а нормальная – из-за того, что поверхностная плотность зарядов зануляется). При сдвиге вдоль этой кривой потенциал не меняется. Поэтому вдоль касательной к кривой будет лежать один из собственных векторов матрицы W, например лежащий вдоль оси z. Кроме того соответствующее собственное значение обращается в ноль C=0. Вместе с условием (5) это дает разложение

$$\varphi = \varphi_0 + A(x^2 - y^2) + \dots = \varphi_0 + A\varsigma\xi + \dots \qquad (\varsigma, \xi) = x \pm y\,. \qquad (6)$$

Видно, что (6) отличается от (2) заменой координат (y,z) на (ς, ξ) и изменением константы, стоящей перед произведением этих координат. Поэтому имеем ту же картину эквипотенциальных поверхностей и силовых линий. Силовыми линиями вблизи такой особой точки будут все так же два семейства гипербол и две сепаратриссы $(\varsigma = \pm\xi)$, выходящие из особой точки и наклоненные под углом 45^{o} к поверхности проводника. Так что заветный угол в 45^{o} будет и в картине силовых линий в общем случае особых точек на поверхности, не имеющей углов и выступающих ребер.

Возможен и другой случай особых точек поля – изолированные особые точки. Если у нас есть два точечных заряда одного знака, то на соединяющей их прямой между зарядами будет точка, в которой напряженность поля обращается в ноль. Для зарядов разного знака и разных по модулю, такая точка будет лежать на соединяющей их прямой, но не между ними. Она будет лежать за меньшим по модулю зарядом. И для таких точек легко найти картину силовых линий, исходя из (4,5). Из-за аксиальной симметрии мы видим, что направление вдоль линии, соединяющей заряды, должно быть одним из собственных векторов W. Пусть вдоль него направлена ось z. Тогда в перпендикулярной плоскости мы имеем одинаковые собственные значения A=B=C/2 и (4) переходит в

$$\varphi = \varphi_0 + A\left(x^2 + y^2 - 2z^2\right) + \ldots \tag{7}$$

Найти картину силовых линий в этом случае несложно. Она будет несколько другой, чем силовые линии на поверхности проводника - гиперболы станут вида $y \sim x^{-2}$.