Определение группы.

Группой $G(g_1, g_2, \cdots g_n)$ называют конечную или бесконечную совокупность (множество) объектов произвольной природы или операций (элементов группы), если в G определена бинарная операция (умножение), для которой выполняются следующие условия:

а) операция определена для каждой пары элементов из G: если элементы g_1 и $g_2 \in G$, и если любой паре элементов g_1 и g_2 ставится в соответствие элемент g_3, то $g_3 \in G$, при этом $g_1 g_2 = g_3$ (в определённом порядке);

б) для любых трёх элементов g_1, g_2, $g_3 \in G$ выполняется соотношение: $g_1(g_2 g_3) = (g_1 g_2) g_3$ – свойство ассоциативности;

в) в G существует элемент e, называемый единицей группы, такой, что $eg = ge = g$ для $\forall g \in G$;

г) для $\forall g \in G$ существует обратный элемент $g^{-1} \in G$, такой, что $gg^{-1} = g^{-1}g = e$.

Эти четыре свойства определяют группу. Она представляет собой совокупность, множество, замкнутую относительно заданного в ней закона умножения. Те группы, в которых умножение обладает переместительным свойством, т.е. $g_1 g_2 = g_2 g_1$, называются абелевыми.

Если число элементов группы конечно, группа называется конечной, а число элементов в группе – порядком группы. Порядок элементов обозначается ord G или $|G| = n$. Если число элементов группы бесконечно, то такая группа – бесконечная.

Примеры математических групп.

1. Совокупность всех целых чисел z вместо с нулём образуют бесконечную группу, если в качестве группового умножения взять

сложение. Единичным элементом этой группы является нуль, обратным элементом для числа А будет -А. Группа абелева.

2. Совокупность всех рациональных чисел R, за исключением нуля, образуют группу с операцией умножения, совпадающей с обычным умножением. Единичным элементом будет единица. Это также бесконечная абелева группа. Обратным элементом для А является A^{-1}.

3. Совокупность векторов n-мерного линейного пространства L_n образуют группу. Групповым умножением является сложение векторов, единичным элементом будет нулевой вектор, обратным элементом для вектора $\vec{a}$ будет вектор $-\vec{a}$.

4. Группа U_n корней n-ой степени из единицы, где n – натуральное число, число $e^{\frac{2\pi i k}{n}}$, k=0,1, 2, …n-1. Это множество комплексных чисел является решением алгебраического уравнения $Z^n=1$, причём $Z_k=\exp\left(\frac{2\pi i k}{n}\right)=(Z_i)^k$. При этом $\exp\left(\frac{2\pi i k}{n}\right)*\exp\left(\frac{2\pi i m}{n}\right)=\exp\left(\frac{2\pi i(k+m)}{n}\right)=\exp\left(\frac{2\pi i r}{n}\right)\in U_n$, где $r=k+m$. Единицей этой группы является число1, обратным элементом есть число $(Z_n)^{-1}=\exp\left(\frac{2\pi i(n-k)}{n}\right)$, т.е. это группа относительно умножение комплексных чисел. Группа абелева, порядок группы n.

5. Линейное пространство $R^n=R\times R\times R\times\cdots\times R$ (n сомножителей). Элементами группы есть последовательности действительных чисел $(x_1\cdots x_n)=\vec{x}$. Такое линейное пространство имеет структуру абелевой группы относительно операции сложения векторов $\vec{X}+\vec{Y}=(x_1+y_1,x_2+y_2\cdots x_n+y_n)$. Кроме этой операции есть ещё операция умножения на действительное число.

6. Пусть в евклидовом пространстве E^n задано скалярное произведение $(xy) = \sum_i x_i y_i$. Линейные преобразования E^n, которые сохраняют скалярное произведение, образуют группу O(n) – группу ортогональных преобразований. Преобразования O(n), которые сохраняют ориентацию пространства E^n, называются преобразованиями вращения. Они образуют подгруппу SO(n) (от слова spin – вращение). Вращения плоскости – пространства E^2 задают матрицами $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ Группа SO(2) абелева.

Примеры групп из физики.

1.Группа трансляций в 3-мерном пространстве, её элементами являются преобразования переноса начала координат на произвольный вектор $\vec{a} : \vec{r}' = \vec{r} + \vec{a}$

2. Группы симметрии молекул(точечные группы) состоят из ортогональных преобразований 3-мерного пространства.

3. Группы симметрии кристаллов, пространственные группы симметрии, состоят из конечного числа ортогональных преобразований, из дискретных сдвигов, трансляций и их произведений. Такой симметрией обладает бесконечной кристалл или модель кристалла с так называемыми циклическими граничными условиями.

4. Группа $SO^+(3)$ вращений трёхмерного пространства на любые углы около осей, проходящих через начало координат. Известно, что произведение вращения g_1 около оси l_1 на угол φ_1 и вращения g_2 около оси l_2 на угол φ_2 есть вращение g_3 на некоторый угол φ_3 около оси l_3. Каждое вращение можно задать тремя параметрами: углами θ, ψ, задающими положение оси вращения, и величиной угла φ поворота вокруг этой оси. Углы θ, ψ отсчитываются против часовой стрелки, $0 \le \varphi \le \pi, 0 \le \theta \le \pi, 0 \le \psi \le 2\pi$. Таким образом, группа $SO^{+3}(3)$ есть

бесконечная трёхпараметрическая группа. Так как параметры θ, ψ, φ, определяющие элементы группы, меняются непрерывно, то группа называется непрерывной.

Все групповые закономерности конечной группы сводятся к закону «умножения» элементов. Отметим при этом, что групповая операция, которая традиционно называется «умножением», на самом деле может не быть умножением в обычном смысле. Так, например, n-мерное векторное пространство R^n является группой по сложению: Единичный элемент – нуль-вектор, обратный элемент для r есть –r.

Таблица Келли.

Свойства абстрактных групп полностью определяются её таблицей умножения, называемой квадратом Келли. Для конечной группы таблица Келли имеет вид:

	G_{b1}	G_{b2}	…	G_{bn}
G_{a1}	$G_{a1}G_{b1}$	$G_{a1}G_{b2}$	…	$G_{a1}G_{bn}$
G_{a2}	$G_{a2}G_{b1}$	$G_{a2}G_{b2}$	…	$G_{a2}G_{bn}$
…	…	…	…	…
G_{an}	$G_{an}G_{b1}$	$G_{an}G_{b2}$	…	$G_{an}G_{bn}$

Так как $G_{ai}G_{dj}=G_{lk}$, то таблица задана, если указано, какому из элементов G_{lk} равен каждый из n^2 элементов $G_{ai}G_{dj}$ на пересечении i-ой строки и j-ого столбца. На этом пересечении стоит элемент $G_{ai}G_{dj}$. Таблица представляет собой квадратную матрицу.

Рассмотрим примеры.

1. При изучении симметрии физических систем важно знать их поведение при поворотах. Разнообразные наборы вращений образуют группы. Закон умножения здесь таков: Если поворот R_1 переводит систему из положения А в положение В, а поворот R_2 – из положения В в положение С, то произведение R_1R_2 переводит систему из А в С, при этом $R_1R_2 \neq R_2R_1$. При этом Е – единичный элемент – есть поворот на нулевой угол, тождественная операция.

2. Группа C_3. Пусть R_1, R_2 – повороты вокруг оси z на углы $2\pi/3, 4\pi/3$ Совокупность операций E, R_1, R_2 образуют группу с таблицей умножения (таблицей Келли)

C_3	E	R_1	R_2
E	E	R_1	R_2
R_1	R_1	R_2	E
R_2	R_2	E	R_1

3. Группа D_3. Совокупность операций E, R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, где R_1, R_2 – повороты на угол $2\pi/3, 4\pi/3$ вокруг оси z соответственно, R_3, R_4, R_5 – повороты на угол π вокруг каждой из осей, проходящей по биссектрисе угла равностороннего треугольника в плоскости (xy) и перпендикулярных оси z. Это группа симметрии равностороннего треугольника, группа его вращений, переводящих его в положение, неотличимое от исходного. Таблица умножение этой группы имеет следующий вид:

D_3	E	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5
E	E	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5

R_1	R_1	R_2	E	R_4	R_5	R_3
R_2	R_2	E	R_1	R_5	R_3	R_4
R_3	R_3	R_5	R_4	E	R_2	R_1
R_4	R_4	R_3	R_5	R_1	E	R_2
R_5	R_5	R_4	R_3	R2	R_1	E

Следствия из определения группы.

1. В группе содержится только один единичный элемент.

Пусть в группе G есть два единичных элемента: *e* и *e'*. В силу третьего свойства группы имеем: $e \cdot e' = e = e' \cdot e = e'$, т.е. *e*=*e'*.

2. Если g_1 – обратный элемент по отношению к g, то элемент g будет обратным по отношению к g_1, т.е. если $g \cdot g_1 = e$, то и $g_1 \cdot g = e$.

В самом деле, пусть $g \cdot g_1 = e$. Умножим слева это выражение на g_1, получаем: $g_1 \cdot g \cdot g_1 = g_1 e = g_1$, т.е. $g_1 \cdot g \cdot g_1 = g_1$. Для элемента g_1, как и для каждой совокупности G, в этой совокупности имеется обратный элемент g_1^{-1}. Умножим полученное равенство $g_1 \cdot g \cdot g_1 = g_1$ на g_1^{-1} справа, получаем: $g_1 \cdot g \cdot g_1 \cdot g_1^{-1} = g_1 \cdot g_1^{-1}$, т.е. $g_1 \cdot g \cdot e = e$; $g_1 \cdot g = e$, а это и есть по определению то, что g и g_1 – взаимообратные элементы.

3. Для каждого элемента $g \in G$ существует только один обратный элемент.

Пусть для элемента $g_1 \in G$ есть два обратных элемента, g_2 и g_3, т.е $g_1 g_2 = e$, $g_1 g_3 = e$. Тогда $g_1 g_2 = g_1 g_3$. Умножим это равенство слева на g_1^{-1}, получаем: $g_1^{-1} g_1 g_2 = g_1^{-1} g_1 g_3$. Отсюда следует, что $g_2 = g_3$

4. Если $g_1 = g_2 g_3$, то $g_1^{-1} = g_3^{-1} g_2^{-1}$.

Доказательство очевидно при последовательном умножении слева сначала на g_2^{-1}, затем на g_3^{-1} и полученный результат, наконец, справа на g_1^{-1}

Порядок элементов в группе.

Рассмотрим группу G с конечным числом элементов. Возьмём произвольный элемент группы $g_i \in G$ и образуем степени этого элемента $g_i, g_i^2, g_i^3 ...$ Поскольку число элементов в группе конечно, члены в последовательности степеней g_i должны обязательно повторяться. Например: $g_i^{k_1} = g_i^{k_2} = g_l, k_1 > k_2$. Тогда $g_i^{k_1} = g_i^{k_1} g_i^{k_2-k_1} = g_l g_i^{k_2-k_1} = g_l$, так как $g_l g_i^{k_2-k_1} = g_l g_l (g_i^{k_1})^{-1} = g_l g_l g_l^{-1} = g_l$. Следовательно, $g_i^{k_2-k_1} = e$, т.е. $k_2 = k_1$. Наименьший показатель степени *k*, для которого имеет место $g_i^n = e$, называется порядком элемента g_i. Совокупность элементов $g_i, g_i^2, g_i^3 ... g_i^n = e$ называется периодом или циклом элемента g_i.

Лемма о сдвиге.

Пусть $g_1, g_2 ... g_N$ – все элементы группы G порядка N. Тогда для $\forall g \in G$ все элементы $gg_1, gg_2, ... gg_N$ различны и каждый из элементов последовательности появляется один и только один раз.

Доказательство.

Так как *ord G = N*, то достаточно доказать, что $gg_i \neq gg_j$ при $i \neq j$. Это очевидно, так как при $gg_i = gg_j$, умножая это соотношение на g^{-1} слева, получаем $g^{-1}gg_i = g^{-1}gg_j \to g_i = g_j$, что невозможно. Аналогичный результат имеет место для правого сдвига $g_1g, g_2g ... g_Ng$.

Подгруппа.

Часть элементов группы G, которые сами по себе образуют группу, с тем же законом умножения, называются подгруппой группы G. Оставшаяся часть группы G не может образовать группу, т.к. она не содержит, например, единичный элемент. Простейшие подгруппы группы G: единичный элемент и сама группа. Подгруппы – строительные блоки, из которых собраны группы, изучение их структуры во многом характеризует группу.

Пример 1.

Пусть мы имеем множество, состоящее из четырёх матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

В качестве операции умножения возьмём операцию умножения матриц. Для доказательства того, что это множество является группой, построим квадрат Кэлли (таблицу умножения) этого множества:

	A	*B*	*C*	*E*
A	*B*	*C*	*E*	*A*

B	*C*	*E*	*A*	*B*
C	*E*	*A*	*B*	*C*
E	*A*	*B*	*C*	*E*

Видно, что множество из четырёх матриц действительно замкнуто относительно операции умножения матриц. Следовательно, матрицы *A, B, C, E* действительно образуют группу 4-ого порядка. Эта группа имеет нетривиальную подгруппу, состоящую из элементов *B, E*. Таблица Кэли этой подгруппы имеет вид:

	B	*E*
B	*E*	*B*
E	*B*	*E*

Матрицы *B* и *E* совпадают с обратными. Любая пара матриц, одна из которых есть *E*, единичная матрица (единичный элемент группы), образуют подгруппу группы G.

Пример 2.

Мы установили, что совокупность элементов $g_i, g_i^2, g_i^3 ... g_i^n = e$ называется периодом или циклом элемента g_i. Очевидно, что период элемента образует подгруппу группы G. Видно, что все элементы этой подгруппы коммутируют друг с другом. Следовательно, подгруппа абелева

Смежные классы

Пусть *H* – подгруппа группы *G*, $H \subset G$ с элементами $h_1, h_2 ... h_m$, где *m* – порядок группы *H*. Составим некую последовательность совокупностей элементов группы *G*. Сначала возьмем элементы самой подгруппы *H*, затем выберем из группы *G* какой-нибудь элемент g_1, не содержащийся в *H*, и составим совокупности элементов $g_1h_1, g_1h_2, ...g_1h_m$, которую обозначим через g_1H. Выберем из *G* элемент g_2, который не содержится ни в *H*, ни g_1H, и составим совокупность g_2H. Можно продолжить построение таких совокупностей, пока не исчерпаем всю группу *G*. В результате получаем последовательности $H, g_1H, g_2H, ...g_mH$. Совокупность элементов g_iH называется левым смежным классом по подгруппе *H*, где каждый g_i – фиксированный элемент из *G*.

Аналогичным образом можно провести разложение группы *G* на правые смежные классы $H, Hg_1, Hg_2, ...Hg_k$. Таким образом, группу *G* модно разбить на подмножества, объединяя в каждом из них те элементы группы *G*, которые отличаются один от другого на правый или левый множитель какой-либо подгруппы $H \subset G$. Такие подмножества называются смежными классами. Любой фиксированный элемент смежного класса называется его представителем. Очевидно, сама подгруппа *H* является смежным классом (одновременно правым и левым), т.к. $eH = He$. Из определения смежных классов следует, что все они имеют одинаковую численность, и это число равно порядку группы *H*: $ord(g_mH) = ord(Hg_m) = m$

Смежный класс не являются группой, т.к. он не может содержать ни единичного (тождественного) элемента *E*, ни какого-либо другого элемента группы *G*.

Процедура разбиения конечной группы на правые (левые) смежные классы продолжается, пока не будет исчерпаны все элементы группы *G*. В результате и получаем искомое разбиение, которое можно записать, как :

$$G = H \cup g_1H \cup g_2H \cup ... \cup g_kH$$

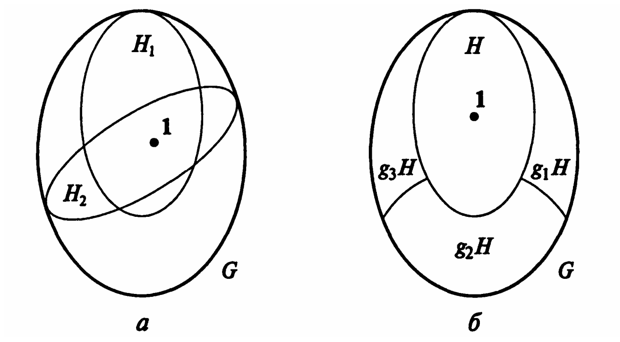

Рис. 1 Подмножества в группе G: а – подгруппы в группе G; б – разбиение G на четыре левых смежных класса по подгруппе H

<u>Теорема.</u> Левые (правые) смежные классы или совпадают, или не пересекаются.

<u>Доказательство</u>. Пусть $g \in Hg_1$ и $g \in Hg_2$, т.е. классы Hg_1 и Hg_2 имеют общий элемент. Тогда существуют такие элементы $h_1, h_2 \in H$, что $g = h_1 g_1 = h_2 g_2$. Умножив это равенство слева на h_1^{-1}, получаем: $h_1^{-1} h_1 g_1 = h_1^{-1} h_2 g_2$, или $g_1 = h_1^{-1} h_2 g_2 = h_3 g_2$, где $h_3 = h_1^{-1} h_2 \in H$. Тогда $Hg_1 = Hh_3 g_2$, и g_1 вместе со всем классом Hg_1 принадлежит к Hg_2: $Hg_1 \subset Hg_2$. С другой стороны, умножая это же равенство $g = h_1 g_1 = h_2 g_2$ слева на h_2^{-1}, получаем: $h_2^{-1} h_1 g_1 = h_2^{-1} h_2 g_2$ или $g_2 = h_2^{-1} h_1 g_1 = h_3' g_1$, где $h_3' = h_2^{-1} h_1 \in H$, что означает, что $Hg_2 \subset Hg_1$. Поэтому $Hg_2 = Hg_1$. Следовательно, классы, имеющие общий элемент, совпадают. Это утверждение аналогичным образом доказывается для правых смежных классов.

С другой стороны, пусть $h_1 g_1 = h_2 g_2$. Умножим слева на h_2^{-1}, получаем: $g_1 h_1 h_2^{-1} = g_2 h_2 h_2^{-1} = g_2$, т.е. $g_2 = g_1 h_1 h_2^{-1} = g_1 h_3$, где $h_3 \in H$. Отсюда следует, что $g_2 \in g_1 H$, что противоречит построению смежных классов, при котором выбирается элемент $g_2 \in G, g_2 \notin H, g_2 \notin g_1 H$. Отсюда следует, что каждый элемент группы G входит только в одну из совокупностей.

Если группа G – конечна, то количество смежных классов по H называется индексом подгруппы H в G и обозначается $[H : G]$

Теорема Лагранжа. Порядок и индекс подгруппы *H* является делителем порядка группы *G* и *ord G = [H:G] ord H*, т.е. порядок группы *G* есть индекс подгруппы *H* в *G*, умноженный на порядок подгруппы *H*.

Доказательство. Так как смежные классы не пересекаются, то всю группу можно представить как объединение смежных классов:

$$G = H \cup g_1 H \cup g_2 H \cup ... \cup g_k H$$

Поэтому *ord G = k ord H*, где *k = [H:G]* – количество смежных классов. Таким образом, число элементов и количество смежных классов подгруппы *H* есть делитель числа элементов группы *G*, а число элементов *G* есть произведение количества смежных классов по подгруппе *H* на порядок подгруппы *H*. Теорему Лагранжа можно использовать, чтобы найти возможные структуры группы заданного порядка. Например, группа, порядок которой есть простое число, не может иметь собственных подгрупп.

Сопряжённые элементы и классы

Во всех группах число элементов весьма велико. Исследование строения групп можно упростить, если внутри группы выделить классы элементов со сходными свойствами.

Элемент g_a группы называется сопряжённым элементу g_b, если в группе найдётся такой элемент $g_n \in G$, что $g_a = g_n g_b g_n^{-1}$.Если элементы g_b и g_c являются сопряженными элементу g_a, то отсюда следует, что элементы g_b, g_c также являются сопряжёнными друг другу. В самом деле, пусть $g_a = g_n g_b g_n^{-1}$; $g_a = g_m g_c g_m^{-1}$ для $\forall g_n, g_m \in G$. Умножим первое соотношение слева на g_n^{-1}, получаем $g_n^{-1} g_a = g_n^{-1} g_n g_b g_n^{-1}$. Затем умножим справа на g_n: $g_n^{-1} g_a g_n = g_b g_n^{-1} g_n$. Отсюда

$g_b = g_n^{-1} g_a g_n = g_n^{-1}(g_m g_c g_m^{-1}) g_n = (g_n^{-1} g_m) g_c (g_n^{-1} g_m)^{-1}$ т.е. элементы g_b, g_c оказались взаимно сопряжёнными. Для элементов группы, что сопряжены друг другу, это приводит к понятию класса, в котором все элементы сопряжены друг с другом. При этом не один из элементов не может принадлежать более, чем одному классу. Если элемент g принадлежит двум классам, он должен быть сопряжён со всеми элементами в обеих классах, и тогда элементы одного класса будут сопряжены элементам другого, т.е. два класса объединяются в один. Поэтому всякую группу можно разбить на непересекающиеся классы сопряженных элементов. Число элементов в классе называют порядком класса. Всякая конечная группа может быть разбита на несколько классов сопряжённых элементов. Один из этих классов всегда совпадает с единичным элементом, т.к. он не сопряжён ни с каким другим.

Пример 1. Рассмотрим шесть матриц:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}; F = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Эта совокупность матриц образует группу, где в качестве группового умножения выступает умножение матриц. Таблицу Кэли этой группы имеет вид:

	E	*A*	*B*	*C*	*D*	*F*
E	*E*	*A*	*B*	*C*	*D*	*F*

A	*A*	*E*	*D*	*F*	*B*	*C*
B	*B*	*F*	*E*	*D*	*C*	*A*
C	*C*	*D*	*F*	*E*	*A*	*B*
D	*D*	*C*	*A*	*B*	*F*	*E*
F	*F*	*B*	*C*	*A*	*E*	*D*

Каждая из 36 получающихся после умножения матриц совпадают с одной из них, т.е. эти матрицы образуют замкнутую группу по умножению. Разобьём эту группу на классы сопряжённых элементов. Например, образуем класс *C*. Легко видно, что

$$C = ECE^{-1}; B = ACA^{-1}; A = BCB^{-1}; C = CCC^{-1}; A = DCD^{-1}; B = FCF^{-1}$$

Следовательно, класс *C*, таким образом, состоит из элементов *A, B, C*. Он также является классом *A* или *B*. Все три элемента *A, B, C* имеет порядок два. Таким образом, один из классов группы $\{A, B, C\}$. Образуем класс *D*:

$$D = EDE^{-1}; F = ADA^{-1}F = BDB^{-1}; F = CDC^{-1}; D = DDD^{-1}; D = FDF^{-1}$$

Таким образом, класс *D* (или *F*) состоит из двух элементов *D*, *F*. Второй класс группы {*D*, *F*}

.Относительно классов сопряжённых элементов можно высказать следующие утверждения.

1. Элементы класса взаимно сопряжены.

В самом деле, для $\forall g_a, g_b \in C$, т.е., принадлежащих классу *C*, из условия $g_b = g_n g_a g_n^{-1}$ следует, что $g_n^{-1} g_b g_n = g_a$

2. Классы не имеют общих элементов, т.е. не пересекаются, и группа G может быть записана, как объединение своих классов: $G = C_0 \bigcup C_1 \bigcup C_2 \ldots$, где $C_0 = e$

Предположим обратное, т.е., предположим, что классы C_1, C_2 имеют общий элемент $g_b \in C_1 \cap C_2$. Тогда для $g_1 \in C_1$ и $g_2 \in C_2$ получаем: $g_b = g_c g_1 g_c^{-1}$ и

$g_b = g_n g_2 g_n^{-1}$, где $g_c, g_n \in G$. Отсюда следует, что $g_1 = g_c^{-1} g_b g_c$ и $g_2 = g_c^{-1} g_b g_c$, т.е g_1, g_2 принадлежат одному классу, что противоречит исходному предположению.

3. В классе все элементы имеют одинаковый порядок.

Действительно, если $g_a, g_b \in C$ т.е. классу *C*, и порядок g_a равен k, т.е. $g_a^k = e$, то $g_b^k = (g_c g_a g_c^{-1})^k = g_c^k g_a^k g_c^{-k} = g_c^k g e g_c^{-k} = e$.

Пример.

Рассмотрим группу D_3, группу преобразований симметрии правильного треугольника. Элементами группы являются: $e, C_3, C_3^2, C_2', C_2'', C_2'''$ – вращения вокруг осей 3-его порядка, перпендикулярной плоскости треугольника и 3-ёх осей второго порядка, лежащих в плоскости треугольника. Порядок группы равен шести. Порядок элементов группы равен порядку соответствующим им операциям, в данном случае, вращений. Элемент *e* имеет первый порядок, элементы C_2', C_2'', C_2''' – второй порядок, C_3, C_3^2 – третий порядок. Следовательно, каждая совокупность одного и того же порядка образует класс, всего три класса.

Инвариантная (нормальная) подгруппа.

Пусть *H* – подгруппа *G*, $H \subset G$ и $g_i \in G$. Образуем совокупность (множество) элементов вида $g_i H g_i^{-1}$. Такие совокупности называются подобными или сопряжёнными подгруппе *H* в *G*, при этом g_i – фиксировано. При этом все $h_i \in H$ пробегают группу *H*. Эта совокупность является подгруппой группы *G* и сама является группой, так как все групповые соотношение выполняются и она содержит единицу. Если $g_i \in H$, то эта совокупность, очевидно, совпадает с *H*, $g_i H g_i^{-1} \subseteq H$. Если же

$g_i \notin H, g_i \in G$, (g_i – фиксировано), то будем иметь различные совокупности, отличные от *H*. В тех случаях, когда при всех $g_i \in G, g_i H g_i^{-1} \subseteq H$, т.е. когда подгруппа, сопряжённая с *H*, совпадает с самой подгруппой *H*, *H* называется инвариантной подгруппой или нормальным делителем, или самосопряжённой подгруппой. Обозначают как $H \triangleleft G$.

Рассмотрим некоторые свойства инвариантной подгруппы.

1. Пусть *H* – инвариантная подгруппа. Так как для $\forall h \in H$ все элементы $ghg^{-1} \in H, (g \in G)$ (по определению инвариантной подгруппы), то *H* содержит весь класс элементов, сопряжённых с *h*/ Следовательно, инвариантная подгруппа состоит из целых классов сопряжённых элементов ($\forall h_i$, сопряжённый с $h_j \in H$ по определению сопряжения).

2. Для инвариантных подгрупп левый и правый смежные классы совпадают, так как $H = gHg^{-1}$, т.е. $Hg = gH$ для $\forall g \in G$. Отсюда можно дать второе определение инвариантной подгруппе: подгруппа *H* инвариантна в группе *G*, если левые и правые смежные классы по любому элементу $g \in G$ совпадают.

Пример.

Группа D_3, в ней есть один нормальный делитель $\{e, C_3, C_3^2\}$– подгруппа, состоит из класса сопряжённых элементов. Есть ещё три подгруппы: $\{e, C'_2\}, \{e, C''_2\}, \{e, C'''_2\}$, они не состоят из целых классов сопряжённых элементов и ни одна из них не является нормальным делителем. Подгруппа $H \subset G$ нормальна только в том случае, когда она является объединением классов сопряжённых элементов, т.е. когда *H* вместе с каждым своим элементом содержит все сопряжённые элементы. (является Абелевой).

Фактор-группа.

Пусть H – инвариантная подгруппа G, $H \subset G$. Разложим G на смежные классы по подгруппе H: $H, g_1 H, g_2 H \dots g_k H$. Рассмотрим два смежных класса. $g_i H, g_j H$ Определим произведение элементов этих смежных классов, как множество $g_i h' \cdot g_j h''$, где $h'', h'' \in H$ и пробегают всю группу H. В общем случае мы получаем множество, куда входят представители разных смежных классов, которые не пересекаются. Но если H – инвариантная подгруппа, то: $(g\ H) \cdot (g_j H) = (g_i H) \cdot (H g_j) = g_i H \cdot H g_j = g_i H g_j = g_i g_j H$. Очевидно, что произведение сопряжённых совокупностей H на H не меняет этой совокупности. Поэтому $g_i H \cdot g_j H = g_i g_j H$.Кроме того, $(gH) \cdot (g^{-1} H) = H$.

Следовательно, определена операция умножения на совокупность левых смежных классов по инвариантной подгрупп. Эта операция удовлетворяет аксиомам 1-4 групповых умножений. Роль единичного элемента играет класс $eH = H$, обратным для $g_i H$ является класс $g_i^{-1} H$.Следовательно, относительно инвариантной подгруппы левые смежные классы можно рассматривать, как элементы некоторой группы. Она называется фактор-группа и обозначается G/H. Элементами фактор-группы являются смежные классы. Если $ordG < \infty, ordG/H$ равен индексу H.

Пример. Смежными классами по нормальной подгруппе $H\{e, C_3, C_3^2\}$ является множества H и $C_2' H : C_2' H = \{C_2', C_2'', C_2'''\}$, так как $H \cdot H = H$, и для рассмотрения группы G/H имеем следующую таблицу умножения:

	H	$C_2' H$
H	H	$C_2' H$
$C_2' H$	$C_2' H$	H

Изоморфизм и гомоморфизм

1^0. Если между элементами двух групп существуем взаимнооднозначное соответствие, которое не нарушается при групповом умножении, то такие группы называются изоморфными. Пусть G и $\widetilde{G}$ – изоморфные группы. Тогда, если элементам g_i и g_k группы G соответствуют элементы $\widetilde{g}_i$ и $\widetilde{g}_k$ группы $\widetilde{G}$, $g_i \leftrightarrow \widetilde{g}_i, g_k \leftrightarrow \widetilde{g}_k$, то $g_i g_k = g_l \leftrightarrow \widetilde{g}_l = \widetilde{g}_i \widetilde{g}_k$.

Иными словами, группы $G, \widetilde{G}$ называют изоморфными $\left(G \sim \widetilde{G}\right)$, если существует взаимнооднозначное отображение φ группы G на группу $\widetilde{G}$, сохраняющее групповую операцию, т.е. такое, что $\forall g_1, g_2 \in G$ имеем: $\varphi(g_1)\varphi(g_2) = \varphi(g_1 g_2)$. Отображение φ называется изоморфизмом групп G и $\widetilde{G}$.

Заметим, что если e – единица группы G, а $\widetilde{e}$ – единица группы $\widetilde{G}$, то $\varphi(e) = \widetilde{e}$. Кроме того:

а) $\varphi^{-1}(g_1 g_2) = \varphi^{-1}(g_1)\varphi^{-1}(g_2)$

б) $\forall \widetilde{g} \in \widetilde{G}$ из равенства $\widetilde{e} = \varphi(e) = \varphi(gg^{-1}) = \varphi(g)\varphi(g^{-1})$ следует, что обратным к элементу $\varphi(g)$ является элемент $\varphi(g^{-1})$.

Изоморфное отображение группы на себя называется автоморфизмом – Aut G.

Очевидно, изоморфные конечные группы имеют одинаковое число элементов, изоморфные группы полностью совпадают по структуре и с точки зрения теории групп, не отличаются одна от другой. Однако, в действительности такие группы могут отличаться по физическому или геометрическому смыслу их элементов, отличаться природой своих элементов, но обладать одинаковыми групповыми свойствами. Установление изоморфизма групп позволяет свести исследование рассматриваемой группы к изучению другой группы, изоморфной с ней.

2^0. Другим важным понятием в теории групп является гомоморфизм. Если каждому элементу группы G соответствует только один определенный элемент группы $\widetilde{G}$, а каждому элементу группы $\widetilde{G}$ соответствует несколько элементов группы G, причём это соответствие сохраняется при групповом умножении, то говорят, что группа $\widetilde{G}$ гомоморфна группе G.

Иными словами, отображение ψ группы G в группу $\widetilde{G}$ называется гомоморфизмом, если оно просто сохраняет групповую операцию: $\psi(g_1)\psi(g_2) = \psi(g_1 g_2)$ для $\forall g_1, g_2 \in G$, где $\psi(g_1), \psi(g_2) \in \widetilde{G}$ и перемножают по закону группы $\widetilde{G}$. Обозначение: $G \overset{Hom}{\to} \widetilde{G}$ – гомоморфизм G на $\widetilde{G}$ (читается справа налево: $\widetilde{G}$ гомоморфна G).

Рассмотрим некоторые свойства гомоморфных групп.

а) Если группа $G \overset{Hom}{\to} \widetilde{G}$ ($\widetilde{G}$ гомоморфна G), то единичному элементу G соответствует единичный элемент $\widetilde{G}$.

Пусть e – единичный элемент G, $e \in G$. Тогда $\forall g \in G$ $eg = ge = g$. Пусть $\widetilde{e}, \widetilde{g} \in \widetilde{G}$, а $e, g \to \widetilde{e}, \widetilde{g}$. В силу гомоморфизма отсюда следует, что $eg \to \widetilde{e}\widetilde{g}; ge \to \widetilde{g}\widetilde{e}$. Так как $eg = ge = g$, следовательно, $\widetilde{e}\widetilde{g} = \widetilde{g}\widetilde{e} = \widetilde{g}$. Следовательно, $\widetilde{e}$ – единичный элемент $\widetilde{G}$.

б) Если группа $G \overset{Hom}{\to} \widetilde{G}$ ($\widetilde{G}$ гомоморфна G), то взаимнообратным элементом группы G соответствуют взаимнообратные элементы группы $\widetilde{G}$.

Пусть $g_i, g_k \in G, g_i g_k = e; g_i \to \widetilde{g}_i, g_k \to \widetilde{g}_k; e \to \widetilde{e}$.– в силу гомоморфизма групп $\widetilde{G}$ и G. Следовательно, $g_i g_k \to \widetilde{g}_i \widetilde{g}_k = \widetilde{e}$.

Теория представления конечных групп.

В приложениях теории групп к исследованию симметрии интерес представляет зачастую не структура самой по себе группы, а превращения и изменения, которые индуцируются в тех или иных физических системах и объектах элементами групп. Объектами, подвергающимися действиям элементов групп в общем случае являются либо координаты составных частей некоторых физических систем, либо функции координат. Эти объекты, в частности, координаты, можно рассматривать, как векторы в некотором пространстве.

С другой стороны, симметрии, с которыми сталкиваются в физике, химии, реализуются через линейные преобразования величин, которые характеризуют физическую систему. Элементы абстрактных групп и сами группы реализуются при своём действии на физическую систему через свои линейные представления операторами и матрицами, заданными и действующими в этом самом пространстве. Поэтому представления групп, с которыми мы будем иметь дело, реализованы в конечномерных линейных пространствах. В общем случае эти пространства будем считать комплексными.

Линейные векторные пространства

Множество R элементов x, y, z… любой природы называют линейным или аффинным пространством, если выполняются следующие три требования:

I Имеется правило, посредством которого любым двум элементам $x, y, \in R$ ставится в соответствие третий элемент z этого пространства, называемого суммой x и y: $z = x + y; z \in R$;

II Имеется правило, посредством которого $\forall x \in R$ и для $\forall \lambda$ вещественного, ставится в соответствие элемент u этого множества, называемый произведением элемента x на λ: $u = x\lambda = \lambda x; u \in R$;

III Указанные два правила подчиняются следующим восьми аксиоамам:

1. $x + y = y + x;$
2. $(x + y) + z = x + (y + z);$
3. существует нулевой элемент такой, что $x + 0 = x, x \in R;$
4. $\forall x \exists x'$, противоположный элементу x такой, что $x + x' = 0;$
5. $1 \cdot x = x \quad \forall x \in R;$
6. $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x;$
7. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x;$
8. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y \quad \forall x, y \in R$

При введении понятия линейного пространства абстрагируются не только от природы объекта, то и от конкретного вида правил образования суммы элементов и произведения элементов на число.

Примеры. Множество свободных векторов 3-мерного пространства (пространство B_3). Множество векторов на плоскости и на прямой тоже являются линейными пространствами B_2 и B_1 соответственно.

Пространство матриц $m \times n$.

Пространство непрерывных функций.

Пространство функций, являющихся решением дифференциального уравнения.

1^o Линейное пространство R называется нормированным, если в R определено правило, посредством которого каждым двум элементам

$x, y \in R$ ставится в соответствие число $\rho(x, y)$ – расстояние между x и y, обладающее следующим свойством:

$\rho(x, y) = \rho(y, x)$ – симметрия;

$\rho(x, y) = 0 \to x = y$;

$\rho(x, y) \le \rho(x) + \rho(y) \quad \forall x, y \in R$;

$\rho(\lambda x) = |\lambda| \rho(x) \quad \forall x \in R, \forall \lambda$

Величина ρ называется нормой, $\rho = \|x - y\|$. Линейное пространство, в котором задана норма, называют нормированным пространством. Его ещё обозначают $\|x\| = \rho(x,0)$. Норма может задаваться каким угодно способом.

2°. Введём понятие комплексного евклидова пространства L, как комплексного линейного пространства с заданным в нём скалярным произведением двух его элементов (x, y). Скалярное произведение определяют как числовую комплекснозначную функцию двух векторов, которая удовлетворяет следующим условиям:

$(x, y) = \overline{(y, x)}$;

$(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$;

$(x_1 + x_2), y = (x_1, y) + (x_2, y)$;

$(x, x) \ge 0; (x, x) > 0$ при $x \ne 0$

Длина (норма вектора) в таком пространстве $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$. Можно убедиться, что все свойства нормы, введённой таким образом, как выше, удовлетворяются.

Нормированное пространство называется полным, если любая фундаментальная последовательность (или последовательность Коши) в нём сходится, т.е., если для $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon)$ такое, что $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ при $\forall n, m > N(\varepsilon)$.

Полное нормированное пространство называется банаховым пространством или B-пространством.

В дальнейшем будем полагать, что $(x, y, z\ldots)$ – произвольные векторы пространства L.

3°. Рассмотрим множество векторов. Система ненулевых векторов $\{x_i\} \in R$ называется ортогональной, если $(x_i, x_j) = 0$ при $i \neq j$

Если векторы $\{x_i\} \in R$ ортогональны, то они линейно независимы, что означает, что не существует вещественных чисел $\alpha, \beta, \gamma\ldots$ таких, что линейная комбинация элементов x_i с этими числами является нулевым элементом , т.е. линейная комбинация обращается в нуль.

Если ортогональная система векторов полная (т.е. наименьшее содержащее её замкнутое подпространство есть всё R), то она называется ортогональным базисом.

Если норма каждого элемента в ортогональном базисе равна единице, то система векторов $\{x_i\}$ является ортогональным базисом и тогда $(x_i, x_j) = \begin{cases} 0, i \neq j \\ 1, i = j \end{cases}$.

Если в пространстве R можно найти n линейно независимых элементов, а любые n+1 элементов этого пространства линейно зависимы, то пространство имеет размерность имеет размерность n. Если в R указать систему из произвольного конечного числа линейно независимых элементов, то пространство бесконечномерное.

Доказывается, что во всяком n-мерном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис.

4°. Пусть мы имеем произвольный ортонормированный базис n-мерного евклидова пространства $e_1, e_2, \ldots e_n$, а *x, y* – два произвольных элемента этого пространства. Обозначим координаты элементов *x, y* относительно этого базиса через $(x_1, x_{2,} \dots x_n)$ и $(y_1, y_2 \dots y_n)$, т.е. $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$; $y = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \dots + y_n e_n$. Найдём выражение для скалярного произведения (x, y) этих элементов через их координаты относительно базиса $(x, y) = \left(\sum_i^n x_i e_i, \sum_j^n y_j e_j \right) = \sum_i \sum_j x_i y_j (e_i e_j) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$ в силу аксиом скалярного произведения и условия ортогональности базисных векторов. Таким образом, в ортонормированном базисе скалярное произведение двух любых элементов равно сумме произведений соответствующих координат этих элементов.

Пусть мы имеем разложение $x = \sum_i^k x_i e_i$. Умножив правую и левую части га e_k скалярно и используя аксиомы скалярного произведения, получаем:

$$(x e_k) = \left(\sum_i^n x_i e_i e_k \right) = \sum_i^n x_k (e_i e_k) = x_k \; ; \; x_k = x e_k$$

Таким образом, координаты произвольного элемента относительно ортогонального базиса равны скалярным произведениям этого элемента на соответствующие базисные векторы.

5°. Не пустое подмножество R' линейного пространства R называется подпространством, если оно само образует линейное пространство по отношению к определённым в R операциям сложения и умножения на число. Иными словами, $R' \subset R$ есть подпространство, если из того, что для $\forall x, y \in R'$ следует, что $\alpha x + \beta y \in R''$ при $\forall \alpha, \beta$.

Простейшие примеры.

1. Нулевое подпространство, т.е. подмножество линейного пространства R, состоящее из одного нулевого элемента; всё пространство R.

2. Множество всех свободных векторов в 3-мерном пространстве образует линейное пространство B_3, аналогичные множества векторов на

плоскости и на прямой являются пространствами B_2 и B_1 соответственно, т.к. для них определены правила сложения, умножения на число, удовлетворяющие аксиомам линейного пространства. Подмножество B_2 всех свободных векторов, параллельных некоторой плоскости в линейном пространстве B_3 есть подпространство B_3.

Можно утверждать, что размерность любого подпространства n-мерного линейного пространства R не превосходит размерность n пространства R. Точнее, если подпространство R' не совпадает со всем n-мерным линейным пространством R, то размерность подпространства строго меньше n.

Пусть R_1 и R_2 – дав произвольных подпространства одного и того же пространства R. Совокупность всех элементов пространства R, принадлежащих одновременно R_1 и R_2, $R_1 \cap R_2$ образует подпространство пространства R, называемое пересечением R_1 и R_2, так как элементы этой совокупности удовлетворяют требованиям, сформулированным для подпространств.

Совокупность всех элементов пространства R вида $x + y$, где $x \in R_1$, $y \in R_2$, образуют подпространство пространства *R*, называемое суммой подпространств $R_1 + R_2$.

<u>Пример</u>. Если *R* – линейное пространство всех свободных векторов в 3-мерном пространстве B_3, R_1 – подпространство всех свободных векторов, параллельных плоскости xOy, R_2 – подпространство всех свободных векторов, параллельных плоскости xOz. Тогда $R_1 + R_2 = R$ В самом деле, $\forall x \in R \quad x = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}$, при этом $\alpha\vec{i} + \beta\vec{j} \in R_1$, $\gamma\vec{k} \in R_2$, а $R_1 \cap R_2$ есть множество всех свободных векторов, параллельных оси Ox.

Пусть R_1 и R_2 – два подпространства линейного n-мерного пространства R. Будем говорить, что пространство *R* представляет собой прямую сумму подпространств R_1 и R_2, если каждый элемент x пространства R может быть единственным способом представлен в виде суммы $X = x_1 + x_2$, где $x_1 \in R_1, x_2 \in R_2$ а $R = R_1 \oplus R_2$. Это равенство означает разложение пространства R в прямую сумму подпространств R_1 и R_2.

Пример. Пространство R всех свободных векторов можно разложить в прямую сумму подпространства R_1 всех векторов, параллельных xOy и R_2 всех векторов, параллельных оси oz. Отличие прямой и обычной сумм подпространств в том, $X = x_1 + x_2$, где $X \in R, x_1 \in R_1, x_2 \in R_2$ выполняется в обоих случаях, но для прямой суммы этот способ единственный, для обычной суммы не единственный. Так, пусть $X = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}$.. С одной сторон можно записать $X = x_1 + x_2$, где $x_1 = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} \in R_1, x_2\vec{k} \in R_2$. С другой стороны, $x = x_1' + x_2'$, где $x_1' = \beta\vec{j} \in R_1, x_2' = \alpha\vec{i} + \gamma\vec{k} \in R_2$.

Доказываются теоремы, что сумма подпространств R_i является прямой тогда, когда $R_i \cap (R_1 + R_2 + \cdots + R_m) = 0$ для $\forall i = 1 \cdots m$, и сумма $R = R_1 + R_2 + \cdots + R_m$ является прямой тогда и только тогда, когда $\dim R = \sum_{i=1}^{m} \dim R_i$.

6^0 Поскольку в евклидовых линейных пространствах введены лишь операции сложения элементов, умножения на число и скалярного произведения, то два евклидовых пространства R и R' называются изоморфными, если между элементами этих пространств можно установить взаимнооднозначное соответствие так, что если элементам $x, y \in R$ отвечают элементы $x', y' \in R'$, при этом $x \leftrightarrow x', y \leftrightarrow y'$, то элементам $(x + y) \leftrightarrow (x' + y'), \alpha x \leftrightarrow \alpha x', (x, y) \leftrightarrow (x', y')$. Иначе говоря, изоморфизм евклидовых пространств – это взаимнооднозначное соответствие, сохраняющее как линейные операции, определённые в этих пространствах, так и скалярное произведение.

Доказывается, что все евклидовы пространства одной и той же размерности n изоморфны друг другу Евклидовы пространства бесконечного числа измерений не обязательно изоморфны друг другу.

Линейные операторы

В этом разделе рассматриваются комплексные евклидовы конечномерные пространства.

1^o Пусть мы имеем два линейных пространства V и W размерности m и n соответственно. Будем называть оператором А, действующим из V в W, отображение вида А: $V \to W$, сопоставляющее каждому элементу x пространства V некоторый элемент y пространства W. Обозначение: $y = A(x)$ или $y = Ax$, где $x \in V, y \in W$

Определение. Оператор А, действующий из V в W называется линейным, если для любых элементов $x_1, x_2 \in V$ и любого комплексного числа λ выполняются соотношения:

1^o $A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2$

2^o $A(\lambda x) = \lambda Ax$

Замечания.

а) Если пространство W совпадает с пространством V, то линейный оператор А, действующий в этом случае из V в V, называется линейным преобразованием V.

б) В дальнейшем ограничимся рассмотрением только линейных операторов, так как все операторы, представляющие интерес с точки зрения симметрии – линейные.

2° Рассмотрим множество *L(V,W)* линейных операторов, действующих из V в W. В этом множестве определим операции суммы операторов и умножения оператора на скаляр.

Пусть A и B – два линейных оператора, действующих из V в W. Суммой этих операторов назовём линейный оператор $A+B$, определяемый равенством:

$$(A+B)x = Ax + Bx$$

Произведением линейного оператора A на скаляр λ назовём линейный оператор λA, определяемый равенством:

$$(\lambda A)x = \lambda(Ax)$$

Назовём нулевым оператор, обозначаемый символом 0 (A=0) и отображающий все элементы пространства V в нулевой элемент пространства W. Иными словами, оратор 0 действует по правилу $0x = 0$.

Для каждого оператора A определим противоположный оператор $-A$ соотношением

$$-A = (-1)A$$

Очевидно, что множество *L(V,W)* всех линейных операторов, действующих из V в W с указанными выще операциями, образует линейное пространство, так как для него определены сума двух элементов, умножение на любое число, нулевой элемент и противоположный элемент,

Матричная запись линейных операторов

Пусть в линейном пространстве L зафиксирован базис $e_1, e_2 \cdots e_n$, пусть x – произвольный элемент пространства L, и пусть $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ – разложение элемента x по заданному базису, где x_k. – координаты x относительно базиса, x_k – любые вещественные числа. Пусть A – линейный оператор из $L(V,V)$. Тогда имеем:

$$Ax = \sum_{k=1}^{n} x_k A e_k$$

Вектор e_k – базисной вектор. Обозначим действие оператора A на базисный вектор как e_k''. Действие оператора в линейном пространстве с базисом задано, если задано действие оператора A на базисные векторы $Ae_k = e_k'$. Оператор A действует в пространстве L и отображает все величины в то же пространство. Так как векторы $e_1, e_2 \cdots e_n$ образуют базис, вектор e_k'' можно разложить по этому базису:

$$e_k' = Ae \ = \sum_{j=1}^{n} a_{jk} e_j$$

Таким рбразом, преобразование всего базиса полностью задаётся набором n^2 коэффициентов a_{jk}. Тогда для произвольного вектора

$$Ax = \sum_{k=1}^{n} x_k A e_k = \sum_{k=1}^{n} x_k \sum_{j=1}^{n} a_{jk} e_j = \sum_{j=1}^{n} (\sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k) e_j$$

Если $y - Ax$, и элемент y имеет координаты $y_1, y_2, \cdots y_n$, то есть $y = \sum_{y=1}^{n} y_j e_j$,

то сравнивая соотношения $\sum_{j=1}^{n} y \ e_j = \sum_{j=1}^{n} (\sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k) e_j$ получаем:

$$y_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k \ , \ j = 1 \cdots n$$

Квадратная матрица A с элементами a_{jk}, $A = (a_{jk})$ называется матрицей оператора в заданном базисе $e_1, e_2 \cdots e_n$.

Формула $e_k' \ = \sum_{j=1}^{n} a_{jk} e_j$ связывает новые преобразованные базисные векторы с исходным базисом, а формула $y_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k$, $j = 1 \cdots n$ компоненты любого преобразованного вектора с его первоначальными компонентами, причём и те, и другие компоненты относятся к исходному базису.

Таким образом, каждому оператору *A* из *L(V,V)* при заданном базисе линейного пространства *V* отвечает (сопоставляется) матрица *A* этого оператора. Возникает обратный вопрос: каждой ли данной матрице *A* при заданном базисе в *V* можно поставить в соответствие линейный оператор *A*, матрице которого будет данная матрица? Доказывается, что если в линейном пространстве *V* задан базис $e_1, e_2 \cdots e_n$ и $A = (a_{jk})$ – квадратная матрица из *n* строк и *n* столбцов, то существует единственный линейный оператор *A*, матрицей которого в заданном базисе является матрица *A*.

Ранг линейного оператора *A* равен рангу матрицы *A* этого оператора: $rangA = rang\|A\|$

<u>Замечание</u>. Если размеры пространств не совпадают, т.е., если мы имеем преобразование типа $A:\ V \to W$, где размерность *V* есть *n*, размерность *W* есть *m*, то образ пространства $V \to W$ представляет собой линейное подпространство, размер которого есть ранг матрицы $\|A\|$, т.е. не превосходит *n*.

Если базис e_i – ортонормированный, то возможна ещё одна интерпретация матричных элементов a_{jk}. Вычислим скалярное произведение $(e_j e_i')$, получим: $(e_j e_i') = e_j A e_i = \sum_k a_{ki} \delta_{jk} = a_{ji}$. Таким образом, матричный элемент a_{ji} – это скалярное произведение $(e_j A e_i)$, где оператор *A* вложен между двумя базисными векторами.

Действия с операторами. Обратный оператор

Произведением TS двух операторов T и S в векторном пространстве L назовём результат действия сначала оператора S, а затем оператора T. Если векторное пространство с базисом и если $Se_i = \sum_j S_{ji} e_j$; $Te_j = \sum_k T_{kj} e_k$, то

$TSe_i = \sum_j S_{ji} Te_j = \sum_j \sum_k S_{ji} T_{kj} e_k = \sum_k \left\{ \sum_j T_{kj} S_{ji} \right\} e_k$. Таким образом, матричные элементы произведения TS имеют вид $(TS)_{ki} = \sum_j T_{kj} S_{ji}$. Отсюда ясно, что матрица произведения операторов TS есть обычное произведение матриц T и S в указанном порядке. При этом операторы, как и матрицы, в общем случае не коммутируют. Разность $TS - ST$ двух разных произведений операторов T и S называют их коммутатором $TS - ST = [T, S]$, который сам является оператором. Принято считать, что оператор действует на вектор, находящийся справа от него.

Если $Tr = r'$ в векторном пространстве, то можно определить обратный оператор T^{-1} соотношением $r = T^{-1} r'$. Очевидно, что $T^{-1} T = TT^{-1} = E$ – тождественный оператор. В любом произвольном базисе он даётся единичной диагональной матрицей. Матрица T^{-1} – матрица, обратная T. При этом предполагается, что обратная матрица существует, а преобразование должны быть взаимнооднозначными, и детерминант $T \neq 0$.

Далее, докажем, что $(TS)^{-1} = S^{-1} T^{-1}$. В самом деле, так как $(TS)^{-1} TS = T$, то, умножая справа последнее соотношение на S^{-1}, получим $(TS)^{-1} TSS^{-1} = S^{-1}$; т.е. $(TS)^{-1} T = S^{-1}$; умножая последнее справа на T^{-1}, имеем; $(TS)^{-1} TT^{-1} = S^{-1} T^{-1}$. Утверждение доказано.

Линейный сопряжённый и самосопряжённый оператор. Унитарный оператор

Пусть V – конечномерное евклидово пространство. Рассмотрим линейные операторы из $L(V,V)$.

1°. Оператор A^+ из $L(V,V)$ называется сопряжённым оператору A, если для $\forall x, y \in V$ выполняется соотношение: $(Ax, y) = (x, A^+ y)$, где $(Ax, y), (x, A^+ y)$ – скалярное произведение.

Очевидно, что оператор A^+, сопряжённый к линейному оператору, сам является линейным оператором . В самом деле, по определению

$$(x, y) = (\overline{y, x})$$

$$(\lambda x, y) = \lambda(x, y) = \lambda(\overline{y, x})$$

$$(x, \lambda y) = (\overline{\lambda y, x}) = \overline{\lambda(y, x)} = \overline{\lambda}(\overline{y, x}) = \overline{\lambda}(x, y)$$

Поэтому

$$(Ax, \alpha y_1 + \beta y_2) = (\overline{\alpha y_1 + \beta y_2, Ax}) = \overline{\alpha}(\overline{y_1, Ax}) + \overline{\beta}(\overline{y_2, Ax}) = \overline{\alpha}(Ax, y_1) + \overline{\beta}(Ax, y_2) =$$

$$= \overline{\alpha}(x, A^+ y_1) + \overline{\beta}(x, A^+ y_2) = (x, A^+(\alpha y_1 + \beta y_2))$$

Отметим следующие свойства сопряжённых операторов:

$E^+ = E$; $(A + B)^+ = A^+ + B^+$; $(\lambda A)^+ = \overline{\lambda} A^=$; $(A^+)^+ A$; $(AB)^+ = B^+ A^+$

Существует теорема о том, что в векторном пространстве со скалярным произведением, имеющем ортонормированный базис, матрица оператора A^+ получается из матрицы оператора A путём трансформирования и комплексного сопряжения. То есть, взяв в качестве x, y векторы ортов e_1, e_2, получаем:

$$(Ax, y) = Ae_i, e_j = \sum_k a_{ki} e_k e_j = \sum_k a_{ki} \delta_{kj} = a_{ij}$$

$$(Ax, y) = (x, A^+ y) = e_i A^+ e_j = e_i \sum_k a_{kj}^+ e_k = \sum_k a_{kj}^+ e_i e_k = \sum_k a_{kj}^+ \delta_{ik} = a_{ji}^+$$

Отсюда имеем $a_{ij} = a_{ji}^{+}$, т.е. матрица оператора A^{+} в ортогональном базисе является трансформированной и комплексносопряжённой.

Линейный оператор A из $L(V,V)$ называется самосопряжённым, если справедливо равенство $A^{+} = A$. Самосопряжённый оператор называют эрмитовым.

. 2°. Определение. Линейный оператор U из $L(V,V)$ называют унитарным, если $\forall x, y \in V$ справедливо соотношение $(Ux,Uy) = (x, y)$, т.е. унитарный оператор не изменяет скалярного произведения.

Доказывается, что для того, чтобы оператор был унитарным, действующим в евклидовом пространстве V, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $U^{+} = U^{-1}$. Условие унитарности записывают ещё в виде $UU^{+} = U^{+}U = E$. Это последнее условие важно тем, что при этом скалярное произведение сохраняется, т.к. если взять $r' = Ur; s' = Us$, то $(r', s') = (Ur, Us) = (r, U^{+}Us) = (r, s)$. Это означает, что, если векторы e_i образуют ортонормированный базис, а вектор $e_i' = Ue_i$, то векторы e_i' образуют новый ортонормированный базис. Таким образом, унитарный оператор есть оператор перехода от одного ортонормированного базиса к другому.

Для эрмитовых или самосопряжённых операторов $(Hr, s) = (r, Hs)$ при любых r, s: $(Hr, s = (r, H^{+}s) = (r, Hs)$, т.к. $H^{+} = H$, что следует из определения самосопряжённого оператора.

Понятие унитарных и эрмитовых (самосопряжённых) операторов имеет смысл только тогда, когда полностью определены векторное пространство и скалярное произведение.

Пример.

3°. В комплексном евклидовом (эрмитовом) пространстве важную роль играют унитарные операторы. Аналогом унитарных преобразований в вещественном евклидовом пространстве являются ортогональные операторы.

Линейный оператор P, действующий в вещественном евклидовом пространстве V, называется ортогональным, если для любых x, y из V выполняется равенство: $(Px, Py) = (x, y)$, т.е. ортогональный, как и унитарный оператор, сохраняет скалярное произведение. Отсюда следует, что если $e_1 \cdots e_n$ – ортонормированный базис евклидова пространства, то $Pe_1 \cdots Pe_n$ – также ортонормированный базис. Для ортогональных операторов, как и для унитарных, $P^+ = P^{-1}$, т.е. $P^+P = E = PP^+$. Так как $P^+ = P^{-1}$, то элементы унитарной матрицы связаны между собой соотношением: $\sum_j p_{ji}^+ p_{jk} = \delta_{ik}; \sum_j p_{ij} p_{kj}^+ = \delta_{ik}$. Если матрица P – действительна, то матрица P^+ будет транспонированной. Унитарная действительная матрица называется ортогональной.

Линейные невырожденные преобразования пространства

Группы преобразования пространства можно задать как множество операторов, отвечающим определенным условиям. Если линейное пространство $W \to V$, т.е линейное пространство W отображается на линейное пространство V посредством оператора A таким образом, что образ суммы элементов равен сумме образов, образ произведения на число равен произведению этого числа на образ, то такой оператор называют линейным. Линейный оператор называют невырожденным, если детерминант матрицы этого оператора не равен нулю:

А: $W \to V$, $A(x + y) = Ax + Ay$; $A(\lambda x) = \lambda Ax \forall \lambda \neq 0$; $Ax, Ay \in V, \det A \neq 0$

Будем рассматривать линейные невырожденные преобразования вида $V \to V$. Важным свойством невырожденного линейного преобразования

$V \to V$ является то, что каждый такой оператор отображает пространство V на себя взаимнооднозначно. Иными словами, если A – невырожденный оператор, то $\forall x \in V$ соответствует только один элемент $y \in V$ по соотношению $y = Ax$, и если y – любой фиксированный элемент пространства V, то существует только один элемент x, такой, что $y = Ax$.

В самом деле, если $(A) = (a_{jk})$ – матрица A в данном базисе, а элементы x, y имеют в данном базисе координаты $x_1, x_2 \cdots x_n . y_1 y_2 \cdots y_n$, то в матричном виде соотношение $y = Ax$ запишется в виде:

$$y_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k \ , \ j = 1 \cdots n$$

Координаты x_k можно рассматривать как неизвестные при заданных y_j, A – невырожденный, $\det A \neq 0;$ система уравнений имеет единственное решение для x_k.Это означает, что для $\forall y \in V$ существует только один элемент x такой, что $y = Ax$. Таким образом, при заданном невырожденном A можно говорить о невырожденном линейном преобразовании пространства V, или просто линейном преобразовании.

Группа линейных преобразований

Пусть V – n-мерное линейное пространство, вещественное или комплексное с элементами $x, y, z, \cdots$., $GL(n)$ – множество всех невырожденных линейных преобразований этого пространства (преобразования, осуществляемые линейными операторами $V \to V$ при условии, что $\det A \neq 0$).

Определим в $GL(n)$ закон композиции, который назовём умножением линейных преобразований так, как это определено для линейных операторов. Произведением AB .линейных преобразований $A, B \in GL(n)$

назовём линейный оператор, действующий по правилу: $(AB)x = A(Bx)$, при этом в общем случае $AB \neq BA$. Это преобразование невырожденное, т.к. $\det(AB) = \det A \cdot \det B \neq 0$, поскольку $\det A \neq 0, \det B \neq 0$

Существует следующая теорема: множество $GL(n)$ невырожденных линейных преобразований линейного n-мерного пространства V с введённой выше операцией умножения есть группа линейных преобразований линейного пространства V.

Теорема доказывается проверкой условий (б-г) определения группы:

б) $A(BC) = (AB)C$ – выполняется:

в) I – тождественное преобразование, $\det I = 1 \neq 0$; $AI = IA = A$; таки образом, I – единица группы и она существует;

г) $\exists A^{-1}$, т.к. $\det A \neq 0$; а т.к. $y = Ax$, то $y_i = \sum a_{jk} x_k$. Следовательно, можно определить единственным образом координаты x_k, используя обратное преобразование A^{-1}, это обратное преобразование линейно. Кроме того, $A^{-1}A = I$, $\det A^{-1} \neq 0$.

Таким образом, $GL(n)$ – группа, т.е. множество невырожденных линейных преобразований n-мерного пространства образует группу.