Тема 11. Квантові підсилювачі

Лекція 11. *Підсилення і генерація. Смуга пропускання підсилювача біжучої хвилі. Шум квантового підсилювача. Максимальна вихідна потужність. Імпульсний режим, максимальна вихідна енергія, зміна форми імпульсу при нелінійному підсиленні*.

Як вже розбиралося в попередніх лекціях в квантовій електроніці індуковане випромінювання активного середовища використовується для когерентного підсилення електромагнітного випромінювання, для створення квантових підсилювачів та генераторів. Треба підкреслити різницю між квантовими підсилювачами і квантовими генераторами.

Квантові підсилювачі, або лазерні підсилювачі служать для того, щоби збільшувати напруженість поля електромагнітної хвилі, яка подається на їх вхід. В цьому розумінні квантові підсилювачі як радіо, так і оптичного діапазону подібні до своїх попередників – напівпровідникових підсилювачів.

Квантові генератори повинні бути джерелами випромінювання, яке зароджується безпосередньо в генераторі і виходить з нього у зовнішній простір. Вони подібні до звичайних радіо генераторів, і, як і для радіо генераторів, для лазерних генераторів, як вже розглядалося раніше потрібен позитивний зворотній зв’язок. Інакше кажучи, квантові генератори є авто коливними системами, в яких генерація електромагнітних коливань реалізується в процесі когерентного підсилення коливань при відповідному зворотному зв’язку . У відповідності з теорією звичайних автоколивальних систем квантові генератори повинні давати монохроматичне випромінювання. При цьому для лазерних генераторів дуже важливо, що при індукованому випромінюванні в активному середовищі вторинні кванти повторюють не тільки частоту, але і напрям розповсюдження первинних квантів. Саме тому лазерне випромінювання має високу спрямованість. а лазерний промінь формується в генераторі автоматично. Але потрібно сказати, що не всі лазери-генератори є авто коливними системами.

Необхідний, як правило, для генерації зворотній зв’язок реалізується, коли активне середовище поміщується в об’ємний резонатор, в якому може бути збуджена система стоячих електромагнітних хвиль. в якійсь точці резонатору, при спонтанному переході з верхнього рівня на нижній виникає випромінювання. Якщо резонатор є настроєним в резонанс з частотою цього резонатору і якщо випромінює мий квант попадає в одну із стоячих хвиль, то випромінювання у стоячий хвилі накопичується і впливає на активне середовище, викликаючи індуковане випромінювання. Якщо потужність індукованого випромінювання перевищує потужність втрат на нагрівання стінок резонатору, розсіювання випромінювання і т.п., а також на корисне випромінювання у зовнішній простір, тобто якщо будуть виконані так звані умови самозбудження, то в резонаторі виникають незатухаючі коливання. В силу властивостей індукованого випромінювання ці коливання монохроматичні. Всі частинки активної речовини працюють синхронно. Ця синхронність обумовлена позитивним зворотним зв'язком, який реалізується в актах індукованого імітування випромінюванням, яке накопичено в резонаторі, тобто відбитим від стінок резонатору. Вище сказане дає ідеальну схему роботи лазера-генератора.

Характерною особливістю квантової електроніки є наступна обставина. Розвиток кожної нової області, освоєння кожного діапазону довжин хвиль починається з появи генераторів. Тільки після появи генераторів виникають підсилювачі. Можливо це зв'язано з тим, що підсилювачі стають потрібними тоді коли є що підсилювати (тобто коли з'явився генератор у новій області).

В НВЧ області першим з'явився аміачний мазер-генератор, потім – парамагнітні мазери-підсилювачі. В оптиці після появи рубінового та гелій-неонового лазерів-генераторів, що стало початком квантової електроніки оптичного діапазону, пізніше з'явилися потужні оптичні підсилювачі.

Почнемо аналіз з розгляду підсилювачів. Розглянемо смугу пропускання підсилювача у лінійному режимі. Формула (1) дає вираз для коефіцієнта підсилення в центрі резонансної лінії (при $n_2 / g_2 > n_1 / g_1$).

$$\alpha = \left(\frac{n_1}{g_1} - \frac{n_2}{g_2} \right) \frac{g_1 2 B_{12} h\nu}{c\pi\Delta\nu_l} \tag{1}$$

де α- коефіцієнт поглинання, для випромінювання, що розповсюджується у вигляді біжучої хвилі в напрямку z із швидкістю c. $\Delta\nu_l$- ширина лінії переходу, g_1, g_2 кратності виродження (статистична вага), B_{12}- коефіцієнт Ейнштейна для індукованого поглинання. Позначимо лінійний, тобто відповідаючий малим сигналам, коефіцієнт підсилення в центрі інвертованої лінії резонансного поглинання символом α_0. Величина α_0 вимірюється в сантиметрах в мінус першому ступені і в літературі досить часто також називається показником (інкрементом підсилення).

Частотну залежність коефіцієнта підсилення можна врахувати за допомогою форм-фактору лінії $q(\nu)$, записавши $\alpha(\nu)$ у вигляді

$$\alpha(\nu) = \alpha_0 q(\nu) / q(\nu_0) \tag{2}$$

В режимі біжучої хвилі коефіцієнт підсилення по потужності всього підсилювача в цілому дорівнює

$$G(\nu) = \exp\left[(\alpha_0 q(\nu) / q(\nu_0) - \beta\right] \tag{3}$$

де $l-$ довжина підсилювача, а β- коефіцієнт нерезонансних втрат. Ширина смуги пропускання виявляється залежною від величини досягнутого підсилення, звужуючись по мірі росту підсилення. Дійсно, якщо ми визначимо, як звичайно, ширину смуги пропускання підсилювача як діапазон частот, в якому підсилення перевищує половину максимального, то рівняння

$$G(\nu) = G(\nu_0) / 2 \tag{4}$$

дає можливість обчислити цю ширину:

$$q(\nu) / q(\nu_0) = 1 - \ln 2 / \alpha_0 l \tag{5}$$

Якщо конкретизувати вигляд $q(\nu)$, то можна отримати значення ν, що визначають ширину смуги пропускання. При однорідному ушир енні, тобто лоренц овій форми лінії нескладні перетворення призводять до ширини смуги пропускання біжучої хвилі

$$\Delta\nu = \Delta\nu_Л (\ln 2)^{1/2} \left(\ln G_0 + \ln L - \ln 2\right)^{-1/2} \tag{6}$$

де $G_0 = G(\nu_0) = \exp\left[(\alpha_0 - \beta)l\right]$- чистий коефіцієнт підсилення в центрі лінії, а $L = \exp\left[\beta l\right]$- коефіцієнт втрат.

Видно, що при інверсії, тобто при підсиленні лінія звужується. Це звуження в режимі біжучої хвилі відбувається повільно, але при великих підсиленнях може досягати значних величин. Суть справи тут очевидна. Як ми вже розглядали в попередніх лекціях, в силу експоненціальної залежності коефіцієнта підсилення від довжини l підсилювача спектральні компоненти, які відповідають центру лінії підсилюються більш сильно. В границі великих довжин (великих G_0) підсилюється тільки центральна компонента. Очевидно, що формула (6) є справедливою тільки для $G_0 > 2$. Розглянемо тепер питання про шуми квантового підсилювача біжучої хвилі. Нехтуючи тепловими шумами, будемо враховувати тільки шум спонтанного випромінювання. При кімнатній температурі це відповідає оптичному діапазону, в радіодіапазоні – це випадок гелієвих температур. Окрім цього, оптичний випадок – це випадок вільного простору та спонтанного випромінювання у всі його моди. В радіодіапазоні легко виділяється один тип хвиле водного розповсюдження. рівняння для приросту енергії в одиниці об’єму активної речовини за одиницю часу має вигляд

$$\frac{d\rho}{dt} = (n_2 - n_1)\frac{h\nu B_{21}\rho}{\pi\Delta\nu_Л} + n_2\frac{h\nu 8\pi\nu^2 h\nu B_{21}}{c^3\pi\Delta\nu_Л} \qquad (7)$$

Для простоти запису тут прийнято, що $g_1 = g_2$. Слід мати на увазі, окрім цього, що другий член описує випромінювання в 4π стерадіан.
Перейдемо до густини потоку енергії (інтенсивності) в одиничному спектральному інтервалі, тобто до енергії, що проходить одиничний переріз за одиницю часу в одиничному спектральному інтервалі вздовж вісі підсилювача z. Оскільки $dz = cdt$, $\rho = I/c$, то

$$\frac{dI}{dz} = (n_2 - n_1)\frac{h\nu B_{21} I}{c\pi\Delta\nu_Л} + n_2\frac{h\nu 8\pi h\nu B_{21}}{\lambda^2 c\pi\Delta\nu_Л} \qquad (8)$$

Для повного потоку енергії (потужності) в одиничному спектральному інтервалі $P = AI$ (де A - площа апертури підсилювача) легко отримати

$$\frac{dP}{dz} = (n_2 - n_1)\frac{h\nu B_{21} P}{c\pi\Delta\nu_Л} + 2n_2\frac{(h\nu)^2\Omega(z) B_{21} A}{\lambda^2 c\pi\Delta\nu_Л} \qquad (9)$$

якщо в останньому члені (8) врахувати, що спонтанне випромінювання іде, підсилюючись, тільки в сторону вихідного кінця підсилювача і не в 4π ср, а в тілесний кут $\Omega(z)$. Тому в останньому члені повинна бути врахована тільки його частина, яка дорівнює $\Omega(z)/4\pi$.
Для довгого підсилювача з хорошим підсиленням можна наближено вважати, що кут Ω під яким видна вхідна зіниця підсилювача при спостереженні від вихідного кінця. Тоді

$$\Omega(z) \approx \Omega = A/4\pi l \qquad (10)$$

в результаті

$$\frac{dP}{dz} = (n_2 - n_1)\frac{h\nu B_{21}}{c\pi\Delta\nu_Л}P + 2n_2\frac{(h\nu)^2 B_{21} A^2}{\lambda^2 4\pi l^2 c\pi\Delta\nu_Л} \qquad (11)$$

Інтегрування (11) дає при $P_{вх} = P(z=0) = 0$,

$$P_{вих} = P(z=l) =$$

$$= 2h\nu \frac{n_2}{n_2 - n_1} \cdot \frac{A}{\lambda^2} \cdot \frac{A}{4\pi l^2} \left\{ \exp\left[(n_2 - n_1) \frac{h\nu B_{21}}{c\pi\Delta\nu_Л} l \right] - 1 \right\} \quad (12)$$

оскільки

$$\exp\left[(n_2 - n_1) \frac{h\nu B_{21}}{c\pi\Delta\nu_Л} l \right] = \exp[\alpha_0 l] = G_0 \quad (13)$$

то

$$P_{вих} = 2h\nu \frac{n_2}{n_2 - n_1} \cdot \frac{A}{\lambda^2} \cdot \frac{A}{4\pi l^2} (G_0 - 1) \quad (14)$$

Перерахунок до входу, тобто визначення ефективної шумової потужності в одиничному спектральному інтервалі на вході підсилювача, дає

$$P_{вх}^{еф} = 2h\nu \frac{n_2}{n_2 - n_1} \cdot \frac{A}{\lambda^2} \cdot \frac{A}{4\pi l^2} \frac{G_0 - 1}{G_0} \quad (15)$$

Коефіцієнт 2 обумовлений двома поляризаціями. Величини $A/\lambda^2 >> 1, A/4\pi l^2 << 1$, але вимога виконання умов геометричної оптики $\sqrt{A}/l > \lambda/\sqrt{A}$ призводить до того, що завжди $\left(A/\lambda^2\right)\left(A/4\pi l^2\right) >> 1$.

Але легко бачити, що у випадку одномодового хвилеводного (а не в умовах справедливості геометричної оптики) розповсюдження і однієї поляризації результат (15) приймає вигляд

$$P_{вх}^{еф} = h\nu \frac{n_2}{n_2 - n_1} \cdot \frac{G_0 - 1}{G_0} \quad (16)$$

що при великій інверсії і високому коефіцієнті підсилення дає

$$P_{вх}^{еф} = h\nu \quad (17)$$

Формулам (16) та (17) відповідає підсилення при розповсюдженні випромінювання, наприклад в активній речовині, що поміщена в прямокутний хвилевод НВЧ. Це ж відноситься і до оптичних хвилеводів, що зроблені у вигляді одномодових діелектричних світло волокон.

Таким чином мінімальна ефективна потужність вхідних шумів квантового підсилювача в одиничному спектральному інтервалі складає $h\nu$. Можна показати, що будь-який когерентний підсилювач, тобто підсилювач, що зберігає фазу вхідного сигналу при збільшенні його інтенсивності, в силу співвідношення невизначеностей $\Delta n \Delta \varphi \geq 1/2$ має вхідні шуми, що принципово не усуваються, з потужністю в одиничному спектральному інтервалі $h\nu$. На це вперше звернув увагу Ч.Таунс.

Перейдемо тепер до розгляду енергетичних характеристик лазерів-підсилювачів, тобто розглянемо питання про вихідну потужність квантового підсилювача біжучої хвилі.

В оптиці квантові підсилювачі рідко застосовуються для підсилення слабких сигналів з метою підвищення чутливості приймальних пристроїв цього діапазону електромагнітних хвиль, що пояснюється наявністю в цій області хороших приймачів. При прийомі слабких сигналів застосування квантових підсилювачів може бути доцільним в далекій ІЧ області і НВЧ діапазоні. Цікавим застуванням квантових підсилювачів в системах інформаційного плану є підсилення зображень (збільшення яскравості зображення), наприклад, в лазерній мікроскопії, коли відносно слабке світло, відбите від об’єкту або яке проходить через об’єкт і не пошкоджує цей об’єкт, підсилюється лазером підсилювачем до високої яскравості, що дозволяє проектувати зображення на великі екрани. Очевидно, що в цьому випадку підсилювач повинен бути вельми багатомодовим, оскільки не плоска хвиля несе інформацію про просторовий розподіл характерних особливостей зображення, яке передається. Підсилювачі зображень, як правило, працюють при рівні вхідних сигналів, що суттєво перевищує порогів.

Ще більш високий рівень вхідних сигналів у випадках, коли лазерні підсилювачі застосовуються з метою отримання гранично високих значень вихідної потужності або енергії із збереженням високої якості вихідного випромінювання. Добре відомо, що всі види маніпуляції випромінюванням (настройка і стабілізація частоти, амплітудна, частотна, фазова, імпульсна модуляція, формування імпульсів випромінювання і. т. ін.) найбільш зручно робити при помірному рівні потужності випромінювання. Якщо необхідна висока потужність, необхідно застосовувати подальше підсилення. В квантовій електроніці для цього використовують кантові підсилювачі.

При аналізі питання про вихідну потужність лазерів-підсилювачів необхідно приймати до уваги ефект насичення. Формула для різниці населеності (див. попередні лекції) $n_2 - n_1$ була отримана для однорідно уширених смуг ($z = \dfrac{z_0}{1 + (g_1 + g_2)I / 2g_2 I_S}$, z- величина резонансного поглинання (підсилення), z_0- означає відповідну різницю населеностей у відсутності зовнішнього поля, тобто при $I = 0$, індекс s - відповідає насиченню - saturation) . Ми обмежимося цим випадком у подальшому розгляді.

Оскільки різниця $n_2 - n_1$ визначає коефіцієнт підсилення, то з врахуванням цієї формули рівняння переносу випромінювання в середовищі з коефіцієнтом нерезонансних втрат β і лінійним коефіцієнтом підсилення α_0 записується при спрощуючому припущенні $g_1 = g_2$ у вигляді

$$\frac{dI}{dz} = -\beta I + \frac{\alpha_0 I}{(1 + I / I_S)} \qquad (18)$$

Після введення безрозмірної інтенсивності $J = I / I_S$ і виконав нескладні перетворення, це рівняння можна звести до вигляду

$$dz = \frac{1 + J}{J} \cdot \frac{dJ}{\alpha_0 - \beta - \beta J} \qquad (19)$$

яке легко інтегрується. При довжині підсилювача l отримаємо

$$(\alpha_0 - \beta)l = \ln\frac{J_2}{J_1} - \frac{\alpha_0}{\beta}\ln\frac{\alpha_0 - \beta(1 + J_2)}{\alpha_0 - \beta(1 + J_1)} \qquad (20)$$

де J_1 вхідна інтенсивність, а J_2- вихідна. В загальному вигляді для цього трансцендентного рівняння завжди можлива побудова відповідних графічних залежностей $J_2(J_1)$ при α_0 та β як параметрах. Але можна розглянути окремі випадки коли його можна простити.

Якщо величини $\beta J_2 / (\alpha_0 - \beta)$ та $\beta J_1 / (\alpha_0 - \beta)$ малі, то (20) переходить в

$$(\alpha_0 - \beta)l = \ln\frac{J_2}{J_1} + \frac{\alpha_0}{\alpha_0 - \beta}(J_2 - J_1) \qquad (21)$$

При малих рівнях сигналу ($J_2 << 1, J_1 << 1$) перший член є переважаючим і ми отримуємо експоненціальне зростання інтенсивності (лінійне підсилення):

$$J_2 = J_1 \exp[(\alpha_0 - \beta) l] \qquad (22)$$

В випадку відсутності втрат ($\beta = 0$), але при сильному поглинанні ($J_1 >> 1$) експоненціальне зростання змінюється на лінійне. Дійсно, при $J_1 >> 1$ можна записати

$$\ln \frac{J_2}{J_1} = \ln\left(1 + \frac{J_2 - J_1}{J_1}\right) = \frac{J_2 - J_1}{J_1},$$ тоді з (21) отримаємо

$$\alpha_0 l = \frac{J_2 - J_1}{J_1} + J_2 - J_1 \qquad (23)$$

що дає

$$J_2 = J_1 + \alpha_0 l \frac{J_1}{1 + J_1} \approx J_1 + \alpha_0 l \qquad (24)$$

У відсутності втрат енергії при сильному насиченні кожна елементарна ділянка підсилювача додає енергію в загальний потік. При врахуванні втрат ситуація суттєво змінюється. При малих, але скінчених значеннях відношення β / α_0 та при $J_1, J_2 >> 1$ вихідне рівняння (20) можна переписати у вигляді

$$\frac{J_2^{\beta/\alpha_0}}{\alpha_0 - \beta J_2} = \frac{J_1^{\beta/\alpha_0}}{\alpha_0 - \beta J_1} \exp \frac{(\alpha_0 - \beta)\beta l}{\alpha_0} \qquad (25)$$

Нехтуючи різницею в значеннях J_2^{β/α_0} та J_1^{β/α_0} а також величиною β / α_0 у порівнянні з одиницею, з (25) можна отримати

$$J_2 = \frac{\alpha_0}{\beta}(1 - e^{-\beta l}) + J_1 e^{-\beta l} \qquad (26)$$

При великих довжинах ($\beta l >> 1$) вхідний сигнал згасає, а вихідний досягає стаціонарного значення (в одиницях $I = J I_S$)

$$I_{\max} = \frac{\alpha_0}{\beta} I_S \tag{27}$$

Звідси випливає важливий висновок, що в лазері-підсилювачі біжучої хвилі інтенсивність вихідного випромінювання визначається у кінцевому рахунку інтенсивністю насичення, коефіцієнтом лінійного підсилення та коефіцієнтом втрат. Стаціонарне значення інтенсивності випромінювання, яке розповсюджується по підсилювачу, встановлюється тоді, коли все, що може емітувати одиничний відрізок довжини активної речовини в режимі повного насичення, поглинається за рахунок нерезонансних втрат в тому ж відрізку. Цей баланс поглинутої та випроміненої енергії призводить до зникнення подальшого підсилення по мірі розповсюдження вздовж підсилювача.
Наведені вище результати отримані із загального рішення рівняння переносу енергії. Але аналіз вищенаведених граничних випадків може бути зробленим набагато більш прозорим за допомогою вихідного рівняння (18). При $I / I_S >> 1$ рівняння (18) приймає вигляд

$$\frac{dI}{dz} = -\beta I + \alpha_0 I_S \tag{28}$$

Якщо інтенсивність досягає граничного значення $I_{\max}$, то це означає, що подальшого підсилення не буде. Отже, $dI / dz = 0$, а це має місце при $I_{\max} = (\alpha_0 / \beta) I_S$, тобто у відповідності з (27). Пряме рішення спрощеного рівняння (28) дає в цьому випадку той же результат, що і перетворення загального рішення рівняння (18). Аналогічна ситуація має місце і з випадками $\beta = 0$ і малих I.
Наведений вище розгляд був виконаний для неперервного режиму підсилення неперервних сигналів. Імпульсний режим, тобто режим, характерні часи якого менше часу релаксації населеностей активного середовища підсилювача, потребує окремого аналізу.
Проста енергетична оцінка може бути зроблена достатньо легко. У випадку окремих сигналів, що відповідають імпульсному насиченню підсилення, на відрізку підсилювача dz випромінюється енергія $(nh\nu / 2) dz$, де n - інверсія на одиницю довжини підсилювача. На цьому ж відрізку в силу лінійних нерезонансних втрат поглинається енергія $\beta F dz$, де F - густина енергії, яка проходить через поперечний переріз підсилювача. В результаті рівняння балансу має вигляд

$$n\frac{h\nu}{2} - \beta F = \frac{dF}{dz} \qquad (29)$$

що по суті еквівалентно рівнянню (28). Густина енергії досягає свого максимуму $F_{\max}$, коли dF / dz перетворюється на нуль. Отже

$$F_{\max} = n\frac{h\nu}{2\beta} \qquad (30)$$

Звернувшись до виразу для густини енергії насичення $F_S = h\nu / 2\sigma$ та для лінійного коефіцієнта підсилення $\alpha_0 = n\sigma$ можна легко отримати, що

$$F_{\max} = \frac{\alpha_0}{\beta} F_S \qquad (31)$$

Отриманий вираз по формі аналогічний (17), але не є йому еквівалентним, оскільки не може бути отриманим простим множенням його правої та лівої частин на протяжність імпульсу. Суть справи зводиться до того, що імпульсні сигнали насичують дворівневу квантову систему інакше, ніж неперервні.

У випадку імпульсних сигналів важливу роль грають не тільки енергетичні характеристики підсилювачів, але і питання про форму і протяжність імпульсів випромінювання, що підсилюються. При суттєво нелінійній взаємодії потужного імпульсу з підсилюючим середовищем, коли імпульс, що розповсюджується, скидає інверсію і викликає висвячування енергії, що була запасена у середовищі, і відбувається зміна форми імпульсу по мірі його підсилення. Справа в тому, що при достатньо високій інтенсивності вже передня частина імпульсу скидає значну долю інверсії, і тому вона підсилюється в більшій мірі ніж задня частина імпульсу. Це призводить до переміщення центра тяжіння розподілу енергії в імпульсі в напрямку переднього фронту імпульсу і, при достатньо різких фронтах, до скорочення протяжності імпульсу.

Тут потрібно зробити наступне зауваження.

При розповсюдженні короткого імпульсу когерентного випромінювання в підсилюючому резонансному середовищі може проявлятися когерентний характер взаємодії випромінювання з речовиною. При когерентній взаємодії дипольний момент, який індуковано полем в частинках речовини, не згасає самодовільно на протязі часу взаємодії. Ц означає, що при когерентних взаємодіях протяжність імпульсу повинна бути коротше самого короткого з часів релаксації поляризації активної речовини. Коли протяжність імпульсу випромінювання більше часу фазової пам'яті речовини, взаємодія некогерентна. Умовою некогерентності взаємодії імпульсу когерентного випромінювання є умова втрати когерентності стану речовини за час імпульсу

$$\tau_{imp} >> \frac{1}{2\pi\Delta\nu_{Л}} \tag{32}$$

Оскільки підсилювач не може підсилювати сигнали, протяжність яких менше оберненої ширини смуги пропускання підсилювача, то в умовах довгих підсилювачів з великим підсиленням умова (32) виконується практично завжди.

В умовах некогерентної взаємодії завжди можна користуватися звичайними рівняннями переносу випромінювання, що випливають із закону збереження енергії. Із-за не стаціонарності процесу імпульсного підсилення рівняння типу (18) в звичайних похідних замінюється рівнянням в частинних похідних

$$\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial I}{\partial t}+\frac{\partial I}{\partial z}=(\alpha-\beta)I \tag{33}$$

де коефіцієнт підсилення α залежить від інтенсивності. В імпульсному режимі ефект насичення, визначаючий залежність коефіцієнта підсилення z від інтенсивності сигналу, виражається у формі $z=\frac{n_2}{g_2}-\frac{n_1}{g_1}=z_0\exp\left[-\frac{g_2+g_1}{2g_2}\cdot\frac{F_{imp}}{F_S}\right]$, тоді рівняння переносу для короткого імпульсу ($\tau_{imp} << \tau$) приймає вигляд

$$\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial I}{\partial t}+\frac{\partial I}{\partial z}=\left\{\alpha_0\exp\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{g_1+g_2}{g_2}\cdot\frac{1}{F_S}\int_{-\infty}^{t}I(t',z)dt'\right]-\beta\right\}\cdot I \tag{34}$$

де α_0- лінійний коефіцієнт підсилення (коефіцієнт підсилення малого сигналу), $F_S=h\nu/2\sigma$ і при записі підінтегрального виразу було враховано можливу зміну форми імпульсу $I(t,z)$ по мірі розповсюдження вздовж напрямку z.

Рівняння (34) у загальному вигляді не вирішується. Далекий від реальності ідеальний випадок відсутності втрат $(\beta=0)$ призводить до рішення, що дає лінійне зростання енергії при перевищенні густини енергії насичення, що відповідає аналогічній ситуації у випадку неперервного режиму.

Зміна форми імпульсу по мірі його підсилення може бути проаналізована шляхом числового вирішення (34). Проста картина скорочення протяжності імпульсу, що підсилюється, легко відслідковується у випадку прямокутного ступінчастого вхідного імпульсу. Для імпульсів з плавним переднім фронтом картина змінюється. Переважне підсилення головної частини імпульсу призводить до поступового по мірі підсилення переміщення максимуму по передньому фронту в напрямку розповсюдження випромінювання, що підсилюється. Величина переміщення визначається характером переднього фронту вихідного імпульсу. Переміщення максимуму перешкоджає стисненню імпульсу. Тому при нелінійному підсиленні скорочуються тільки імпульси з достатньо крутим переднім фронтом. До їх числа відноситься, наприклад, імпульс гаусової форми: $I \sim \exp\left(-t^2/\tau_{imp}^2\right)$. А у випадку, наприклад, експоненціального зростання переднього фронту скорочення відсутнє. Тому у випадках, коли нелінійне підсилення використовують для скорочення протяжності імпульсу, що підсилюється, застосовується штучне обрізання плавної частини вхідного імпульсу за допомогою швидкісних затворів.