Розділ 3. Нелінійні явища, пов'язані з кубічною нелінійною сприйнятливістю $\chi^{(3)}$.

Лекція 3-4(10).

Допплерівський опис розсіювання Мандельштама-Брилюена. Класична теорія розсіяння Мандельштама-Брилюена. Хвильове рівняння для електромагнітних хвиль. Вимушене розсіювання Мандельштама-Брилюена (ВРМБ). Величина порогової потужності ВРМБ

Вимушене розсіювання світла Мандельштама-Брилюена.

З параметричним підсиленням та генерацією світла є подібним явище вимушеного розсіювання. У сильному світловому полі накачування у нелінійному середовищі світлові хвилі можуть взаємодіяти не тільки одна з іншою, але й з акустичними хвилями-фотонами, тобто з квантами пружних коливань середовища, що рухаються у напрямку розповсюдження звукової хвилі зі швидкістю v та з енергією $h\Omega/2\pi$. При розсіюванні на фононах, що рухаються у напрямку хвилі I (**рис. 1**), фотон з частотою ω зникає, при взаємодії з фононом на частоті Ω, і перетворюється у фотон з частотою $\omega-\Omega$. Розсіювання на фононах, що рухаються у напряму II, відповідає перетворенню фотону з частотою ω та фонону з частотою Ω у фотон $\omega+\Omega$.

Напруженість електричної хвилі у напрямку дифракційних максимумів можна описати рівнянням типу

$$E(t) = A_0 \cos\Omega t \cos\omega t = (A_0/2)[\cos(\omega+\Omega)t + \cos(\omega-\Omega)t],$$

де ω - частота падаючого світла, Ω - частота звукової хвилі.

Компонент з частотою $\omega-\Omega$ називається стоксовим, а з частотою $\omega+\Omega$ - антистоксовим. Це компоненти вимушеного розсіювання. Можуть виникати компоненти і більш високих порядків з $\omega \pm n\Omega$ $(n = 2,3,.....)$.

Розсіювання світла великої інтенсивності у нелінійному середовищі, при якому відбувається збудження когерентних акустичних коливань, називається ***вимушеним розсіюванням Мандельштама-Брилюена***.

Хвиля $\omega+\Omega$ швидко затухає, а хвилі з частотами $\omega-\Omega$ та Ω можуть взаємодіяти аналогічно світловим хвилям у параметричному генераторі світла, причому ця взаємодія буде ефективною при виконанні просторового синхронізму.

При великих потужностях накачування (світлового накачування) нелінійне середовище може стати параметричним генератором звуку. Так, за допомогою лазерів вдається збудити потужні (до 10 кВт) звукові коливання з частотою 10^{-9} Гц у багатьох рідинах та твердих тілах.

Розглянемо це явище більш детально

Розсіювання світла на теплових акустичних хвилях було вивчено Брилюеном ще у 1922р. Одночасно з Брилюеном і незалежно від нього розсіювання світла у твердих тілах теоретично вивчалось Мандельштамом. Явище вимушеного розсіювання Мандельтама-Брилюена (ВРМБ), коли акустична, на який розсіюється світло, збуджується самим оптичним променем, було відкрито у 1964 р. Чао, Таунсом та Стойчевим. Вони виявили, що при пропусканні світла через кристал (кварцу або сапфірі у першому експерименті) потужного лазерного випромінювання частоти ω_2 у кристалі виникала когерентна акустична хвиля з частотою ω_s і одночасно випромінювався світловий промінь з частотою $\omega_2 - \omega_s$. Як акустичний так і розсіяний оптичний промені випромінювалися у строго визначених напрямках і виникали тільки при певній потужності лазеру. що перевищувала певне порогове значення. Схема пристрою, що була використана у першому експерименті показана на **рис. 2**.

Допплерівський опис розсіювання Мандельштама-Брилюена.

Розглянемо це явище з точки зору основних понять теорії розсіювання хвиль, що може дати деяке уявлення про фізичну природу ефекту.

Нехай світловий пучок (нескінченно широкий) з частотою ω_2 та хвильовим вектором $\mathbf{k}_2$ падає на акустичну хвилю з частотою ω_s, що розповсюджуєься із швидкістю $\mathbf{v}_s$ як показано на **рис. 3**. Областям, що розповсюджуються – стиснення (темні) та розрідження (світлі) відповідають варіації діелектричної проникливості („+” для стиснення та „-„ для розрідження) відносно стану, коли звукова хвиля відсутня. Варіації діелектричної проникливості призводять до частинного відбивання падаючого пучка у напрямку $\mathbf{k}_1$. Таким чином, акустична хвиля аналогічна дифракційній решитці із кроком, що дорівнює довжині акустичної хвилі λ_s. Інша аналогія може бути проведена з дифракцією рентгенівських променів на кристалі з еквівалентними атомними плоскостями, що розташовані на відстані λ_s. Але має місце суттєва різниця між розсіюванням світла на акустичній хвилі та двома вищенаведеними прикладами. Акустична хвиля рухається, так що відбитий промінь має допплерівський зсув і його частота $\omega_1 < \omega_2$ (для акустичної хвилі, що віддаляється, яка показана на **рис. 3**).

Використавши аналогію з дифракцією рентгенівських променів, запишемо умову відбивання у вигляді

$$2\lambda_s \sin\alpha = n\lambda_2, \quad n = 1,2....., \tag{1}$$

де α- кут падіння, що показано на **рис. 3**; λ_2- довжина хвилі падаючого світла у середовищі. Зсув частоти розсіяного світла визначається по формулі Допплера

$$\omega_2 - \omega_1 = \frac{2\omega_2 v_s \sin\alpha}{c} \tag{2}$$

де с- швидкість світла у середовищі ($c >> v_s$). З двох останніх рівнянь при $n = 1$ знайдемо, що $\omega_2 - \omega_1 = \omega_s$, тобто різниця між частотами падаючого та відбитого світла точно дорівнює частоті ω_s акустичної хвилі.

Вказаний процес розсіювання може бути розглянутий квантово механічно як знищення фотону частоти ω_2 з одночасним народженням фотону частоти ω_1 та фонону частоти ω_s. Тому рівність $\omega_2 - \omega_1 = \omega_s$ означає закон збереження енергії. По закону збереження імпульсу

$$\mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_s \tag{3}$$

де $\mathbf{k}_s$- хвильовий вектор акустичної хвилі. Оскільки $v_s <<< c$, то $k_2 = k_1$, і співвідношення (3) дає рівнобічний трикутник, який показано на **рис. 4**. Звідси $k_s = 2k_2 \sin\alpha$ або $\lambda_2 = 2\lambda_s \sin\alpha$, тобто закон збереження імпульсу співпадає з умовою брегівського відбивання (1).

Акустична енергія з'являється в результаті роботи, що проводиться над акустичною хвилею тиском випромінювання падаючої світлової хвилі, причому, для акустичної хвилі, **що віддаляється,** ця робота позитивна.

Присутність світлової хвилі з частотою ω_2 призводить до підсилення на частотах ω_1 та ω_s. Якщо це підсилення достатньо, щоби компенсувати втрати у середовищі, і якщо забезпечено позитивний зворотній зв'язок, то одночасно виникають коливання з частотою ω_1 (електромагнітні) та ω_s (акустичні). Це і є вимушене розсіювання Мандельштама-Брилюена.

Класична теорія розсіяння Мандельштама-Брилюена.

Змінне електричне поле викликає в результаті електрострикції змінну деформацію у рідині (або у кристалі), збуджуючи таким чином акустичні хвилі. З іншого боку, акустична хвиля модулює діелектричну проникливість середовища, що може привести до обміну енергією між електромагнітними хвилями, частоти яких відрізняються на величину, що дорівнює частоті акустичної хвилі. Таким чином, цей ефект є аналогічним вимушеному комбінаційному розсіюванню, тільки роль молекулярних коливань грає акустична хвиля.

Для виводу рівняння розповсюдження світла візьмемо у середині рідини елементарний об'єм $dxdydz$, на який діє електричне поле E (**рис. 5**). Нехай зміщення точки x від рівноважного положення дорівнює $u(x,t)$, так що одновимірна деформація дорівнює $\partial u / \partial x$. Введемо феноменологічну сталу γ, що враховує зміну діелектричної проникливості під впливом деформації, по формулі

$$\delta\varepsilon = -\gamma \frac{\partial u}{\partial x}, \tag{4}$$

так що при наявності деформації густина запасеної енергії змінюється на величину $-\frac{1}{2}\gamma(\partial u / \partial x)E^2$.

Зміна запасеної енергії, яка пов’язана з деформацією середовища, означає існування тиску. Цей тиск p можна знайти, якщо прирівняти зміну густини запасеної енергії $-\frac{1}{2}\gamma(\partial u/\partial x)E^2$ до роботи виходу $p\partial u/\partial x$, яка здійснюється у результаті деформації одиничного об’єму (тут було покладено $dx, dy, dz = 1$). В результаті отримаємо

$$p = -\frac{1}{2}\gamma E^2 \tag{5}$$

Повна електрострикцій на сила, яка діє на одиничний об’єм у позитивному напрямку вісі x, дорівнює

$$F = -\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\gamma}{2}\frac{\partial}{\partial x}E^2 \tag{6}$$

Тоді рівняння руху для $u(x,t)$ записується у вигляді

$$-\eta\frac{\partial u}{\partial t} + T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\gamma}{2}\frac{\partial}{\partial x}E^2 = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{7}$$

де η- стала затухання, яка феноменологічно враховує акустичні втрати, T та ρ, відповідно, пружна стала та густина середовища.

Припустимо, що акустичне та два електричних поля являють собою плоскі хвилі, що розповсюджуються у довільних напрямках, і запишемо їх у формі

$$\begin{aligned}
E_1(\mathbf{r},t) &= \frac{1}{2}E_1(r_1)e^{i(\omega_1 t - \mathbf{k}_1\mathbf{r})} + к.с.,\\
E_2(\mathbf{r},t) &= \frac{1}{2}E_2(r_2)e^{i(\omega_2 t - \mathbf{k}_2\mathbf{r})} + к.с.,\\
u(\mathbf{r},t) &= \frac{1}{2}u_s(r_s)e^{i(\omega_s t - \mathbf{k}_s\mathbf{r})} + к.с.
\end{aligned} \tag{8}$$

де r_1, r_2, r_s- відстані (з врахуванням знаку) відповідно вздовж напрямків розповсюдження $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_s,$, так що $r_i = (\mathbf{k}_i\mathbf{r}_i / k_i)$.

Використав останнє з рівностей (8) і зробив заміну x на r_s, отримаємо

$$\frac{\partial^2 u}{\partial {r_s}^2} = -\frac{1}{2}\left(k_s^2 u_s + 2ik_s \frac{du_s}{dr_s} - \frac{d^2 u}{dr_s^2}\right) e^{i(\omega_s t - \mathbf{k}_s \mathbf{r})} \quad , \tag{9}$$

після чого рівняння (7) може бути записано у вигляді

$$\left[(-i\eta\omega_s + \rho\omega_s^2)u_s - T\left(k_s^2 u_s + 2ik_s \frac{du_s}{dr_s}\right)\right] e^{i(\omega_s t - \mathbf{k}_s \mathbf{r})} + \kappa.c. = \\ = -\frac{\gamma}{4}\frac{\partial}{\partial r_s}\left\{E_2(r_2)E_1^*(r_1)e^{i[(\omega_2-\omega_1)t - (\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1)\mathbf{r}]}\right\} + \kappa.c., \tag{10}$$

якщо припустити, що

$$k_s^2 u_s >> \frac{d^2 u}{dr_s^2} << k_s \frac{du_s}{dr_s}$$

з (10) випливає, що

$$\omega_s = \omega_2 - \omega_1, \quad \mathbf{k}_s = \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1, \tag{11}$$

(ці співвідношення можуть розглядатися як закони збереження енергії та імпульсу, відповідно). Права частина (10) може бути перетворена до вигляду

$$-\frac{\gamma}{4}\left[\frac{d}{dr_s}(E_2 E_1^*) - ik_s E_2 E_1^*\right] e^{i(\omega_s t - \mathbf{k}_s \mathbf{r})},$$

а хвильове рівняння у цілому приймає вигляд

$$2ik_s v_s^2 \frac{du_s(r_s)}{dr_s} + \left(k_s^2 v_s^2 - \omega_s^2 + \frac{i\eta\omega_s}{\rho}\right) u_s(r_s) = -\frac{i\gamma k_s}{4\rho} E_2(r_2) E_1^*(r_1) \tag{12}$$

Останнє рівняння справедливе при умові, що

$\left|(d/dr_s)(E_2E_1^*)\right| << \left|k_sE_2E_1^*\right|$.

При її розрахунку було використано співвідношення $T/\rho = v_s^2$, де v_s - швидкість розповсюдження акустичних хвиль у середовищі.

Хвильове рівняння для електромагнітних хвиль.

Почнемо з хвильового рівняння

$$\nabla^2 E_i(\mathbf{r},t) = \mu_0\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_i(\mathbf{r},t) + \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}(P_{NL})_i, \qquad (13)$$

де $(P_{NL})_i$ - i-та компонента нелінійної поляризації, яка грає роль джерела, що збуджує поле $E_i(\mathbf{r},t)$. Використав перше з рівнянь (8), отримаємо

$$\nabla^2 E_1(\mathbf{r},t) = -\frac{1}{2}\left[k_1^2 E_1(r_1) + 2i\mathbf{k}_1\cdot\nabla E_1(r_1) + \nabla^2 E_1(r_1)\right]e^{i(\omega_1 t - \mathbf{k}_1\mathbf{r})} + к.с. \qquad (14)$$

Підставив (14) у (13), вважаючи $i=1$, будемо нехтувати членом $\nabla^2 E_1(r_1)$ і використав, що $\mathbf{k}_1\cdot\nabla E_1(\mathbf{r}_1) = k_1(dE_1/dr_1)$, прийдемо до рівняння

$$\left[k_1\frac{dE_1(r_1)}{dr_1}\right]e^{i(\omega_1 t - \mathbf{k}_1\mathbf{r})} + к.с. = i\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}(P_{NL})_i \qquad (15)$$

Нелінійна поляризація, що входить до (15), є додаткова поляризація, яка спричинена акустичною хвилею і, таким чином $(P_{NL})_i = (\delta\varepsilon)E$, або з урахуванням (4)

$$(P_{NL})_i = -\gamma E(\mathbf{r},t)\frac{\partial u(\mathbf{r},t)}{\partial r_s}. \qquad (16)$$

Згідно з (8) добуток $E(\partial u/\partial r_s)$ містить члени, що коливаються з частотами $(\pm\omega_s \pm \omega_1)$ та $(\pm\omega_s \pm \omega_2)$. Але лише ті з них, для яких $\pm(\pm\omega_2 - \omega_s) = \pm\omega_1$, діють як синхронні джерела, так, що рівняння (15) можуть бути записані у вигляді

$$k_1 \frac{dE_1}{dr_1} e^{i(\omega_1 t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r})} = \frac{i\mu_0}{4} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \times$$
$$\times \left\{ -\gamma E_2 e^{i(\omega_2 t - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r})} \frac{\partial}{\partial r_s} \left[u_s^* e^{i(\omega_s t - \mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r})} \right] \right\}$$

або з урахуванням (11)

$$k_1 \frac{dE_1}{dr_1} = \frac{i\omega_1^2 \gamma \mu_0}{4} E_2 \left(ik_s u_s^* + \frac{du_s^*}{dr_s} \right)$$

коли $|du_s / dr_s| << |k_s u_s|$, хвильове рівняння приймає вигляд

$$\frac{dE_1}{dr_1} = -\frac{\omega_1^2 \gamma \mu_0 k_s}{4k_1} E_2 u_s^* - \frac{\alpha E_1}{2} \tag{17}$$

причому дисипативний член $-\alpha E_1 / 2$ додано для врахування втрат у середовищі на частоті ω_1, якими ми до цього моменту нехтували.

Аналогічним чином виводиться рівняння

$$\frac{dE_2}{dr_2} = -\frac{\omega_2^2 \gamma \mu_0 k_s}{4k_2} E_1 u_s^* - \frac{\alpha E_2}{2} \tag{18}$$

для хвилі з частотою $\omega_2 = \omega_1 + \omega_s$.

Співвідношення (12), (17) та (18) утворюють замкнуту систему рівнянь відносно амплітуд акустичного $u_s(r_s)$ та електромагнітних $E_1(r_1)$, $E_2(r_2)$ полів. Вирішенню цих рівнянь при деяких певних умовах буде присвячений подальший розгляд.

Вимушене розсіювання Мандельштама-Брилюена.

Розглянемо вимушене розсіювання Мандельштама-Брилюена. В цьому випадку достатньо інтенсивне оптичне поле на частоті ω_2 викликає одночасну генерацію оптичної хвилі на частоті ω_1 та акустичної хвилі на частоті $\omega_s = \omega_2 - \omega_1$. Аналіз спрощується у граничному випадку, коли величина потужності, що відбирається від поля накачування на частоті ω_2 в результаті генерації на частотах ω_1 та ω_s, набагато менше вхідної потужності. При цих умовах можна покласти $E_2(r_2) = const$ і обмежитися вирішенням рівнянь (12) та (17). У першому з цих рівнянь покладемо $\omega_s = k_s v_s$, тобто приймемо для акустичної хвилі той же закон дисперсії, що і у випадку розповсюдження у середовищі без втрат. При цих припущеннях

$$\frac{du_s}{dr_s} = -\frac{\eta}{2\rho v_s} u_s - \frac{\gamma}{8\rho v_s^2} E_2 E_1^* \qquad (19)$$

рівняння (17) для оптичного поля на частоті ω_1 перепишеться у вигляді

$$\frac{dE_1^*}{dr_1} = -\frac{\alpha E_1^*}{2} - \frac{\gamma k_1 k_s}{4\varepsilon} E_2^* u_s \qquad (20)$$

слід нагадати, що змінні r_1 та r_s суть відстані, що виміряні вздовж довільних напрямків розповсюдження $\mathbf{k}_1$ та $\mathbf{k}_s$, відповідно, оптичної та акустичної хвилі. Ускладнення, що пов'язано з присутністю двох змінних r_1 та r_s у зв'язаних рівнняннях (19) та (20) може бути усунута шляхом переходу до координати ξ, що виміряна вздовж бісектриси кута, як показано на **рис. 6**. Використав співвідношення $r_s = r_1 = \xi \cos\theta = q$ ми зможемо перейти від (19) та (20) до рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{du_s}{dq} &= -\frac{\eta}{2\rho v_s} u_s - \frac{\gamma}{8\rho v_s^2} E_2 E_1^*, \\ \frac{dE_1^*}{dq} &= -\frac{\alpha E_1^*}{2} - \frac{\gamma k_1 k_s}{4\varepsilon} E_2^* u_s \end{aligned} \qquad (21)$$

Ці рівняння описують зростання (або затухання) акустичного зміщення u_s та електричного поля E_1 вздовж любого з двох напрямків розповсюдження, якому зіставляється координата q .

Припустимо зростання експоненціальним

$$u_s(q) = u_s^0 e^{lq},$$
$$E_1^*(q) = (E_1^0)^* e^{lq} \qquad (22)$$

і вирішимо характеристичне рівняння, яке отримується при підстановці (22) у (21). Рішення має вигляд

$$l = -\frac{1}{4}(\alpha_s + \alpha) + \\ + \sqrt{(\alpha_s + \alpha)^2 - \left(4\alpha_s\alpha_1 - \frac{k_1 k_s \gamma^2 |E_2|^2}{8\rho\varepsilon v_s^2}\right)} \qquad (23)$$

де $\alpha_s = -\eta / \rho v_s$ - оптична стала затухання. Коли показник зростання l позитивний, теплові акустичні хвилі, що розповсюджуються вздовж $\mathbf{k}_s$, і електромагнітні хвилі з частотою ω_1, що розповсюджуються вздовж $\mathbf{k}_1$, будуть одночасно підсилюватися по закону (22). Це викличе значне нарощування відповідних потужностей вздовж цих двох напрямків. У відповідності з (23) умова $l \geq 0$ для ВРМБ виконується при

$$|E_2|^2 \geq \frac{2T\varepsilon\alpha_s\alpha_1}{\gamma^2 k_1 k_s} \qquad (24)$$

де було використано $v_s^2 = T / \rho$.

Якщо виразити акустичну та оптичну сталі затухання через довжини затухання $L_s = 2/\alpha_s$ та $L_1 = 2/\alpha_1$ (тобто відстані на який амплітуди полів зменшуються у e разів), то вираз для порогового накачування приймає вигляд .

$$|E_2|^2 = \frac{32T\varepsilon}{\gamma^2 k_1 L_1 k_s L_s} \qquad (25)$$

Чисельний приклад.

Для оцінки порядку величини порогової потужності ВРМБ візьмемо наступні чисельні значення, що характерні для кварцу: $T = 5 \cdot 10^{10} \, н / м^2$ - типове значення модуля пружності твердих тіл,

$\gamma \sim \varepsilon_0 \sim 10^{11} \phi / м$ - типове значення коефіцієнту електрострикції (нагадаємо, що $\gamma = \rho(d\varepsilon / d\rho)$; $\lambda_1 \sim \lambda_2 = 1 мкм$;

$$L_1 = м, \ \ k_1 L_1 = \frac{2\pi L_1}{\lambda_1} = 2\pi \cdot 10^6;$$

$\omega_s \sim 2\omega_2 \dfrac{v_s n}{c} \sim 12\pi \cdot 10^9 сек^{-1}$ - оцінка по формулі (2) при $v_s = 3 \cdot 10^3 м / сек$ та $\lambda_2 = 1 мкм; L_s = 10^{-3} м$ - типове значення для кварцу та сапфіру.

Підставляючи ці значення у (25), отримаємо для порогової густини потужності, що дорівнює $c\varepsilon|E|^2$, значення ~ 10^{11} вт/м^2. Генератором, що забезпечує такий рівень потужності є лазер, що працює у режимі гігантських імпульсів. У більшості рідин явище самофокусування, яке було розглянуто у попередніх лекціях. забезпечує потік потужності. величина якого навіть при невисоких вхідних потужностях перевищує порогові значення для ВРМБ. Цим пояснюється той факт, що для багатьох середовищ експериментально знайдені пороги ВРМБ співпадають з порогами самофокусування.

Особливо цікавий випадок $\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 < 0$. Він має місце, коли кут 2θ між акустичним та розсіяним світловим променем на частоті ω_1 перевищує $\pi / 2$. Цей випадок з фізичної точки зору відрізняється тим, що швидкість зростання розсіяної хвилі E_1 залежить від значень E_1 у точках, що розташовані вздовж напрямку розповсюдження $\mathbf{k}_1$ перед хвильовим фронтом, що розглядається. Такий зворотній зв’язок забезпечується звуковою хвилею в силу її протилежного напрямку розповсюдження. Аналогічно розсіяна світлова хвиля частоти ω_1 забезпечує зворотній зв’язок для акустичної хвилі.

Інший підхід до проблеми розсіяння світла та звука оснований на припущенні про те, що взаємодіють не біжучі хвилі, а резонансні типи коливань, тобто взаємодія відбувається у оптичному та акустичному резонаторах.

Література:

2. И.Р.Шен. Принципы нелинейной оптики. М.: «Наука», 1989.
11. А.Ярив. Квантовая электроника и нелинейная оптика. М. Советское Радио.-1973.-456с.