5. Тензор енергії-імпульсу електромагнітного поля

5.1. Чотири-імпульс системи тіл

Перепишемо рівняння руху частинки в зовнішньому електромагнітному полі за допомогою вектора чотири-імпульсу

$$p^{\mu} = mcu^{\mu}.$$

Очевидно, завдяки співвідношенню $u^{\mu}u_{\mu} = 1$, маємо

$$p^{\mu}p_{\mu} = m^2c^2. \qquad (5.1)$$

Рівняння руху мають вид

$$\frac{dp^{\mu}}{ds} = \frac{q}{c}F^{\mu}{}_{\nu}\frac{dx^{\nu}}{ds}.$$

Це співвідношення перепишемо у вигляді

$$\frac{dp^{\mu}}{dt} = \frac{q}{c}F^{\mu}{}_{\nu}\frac{dx^{\nu}}{dt}, \qquad (5.2)$$

з якого випливає фізичний зміст компонент p^{μ}. Дійсно, при $\mu = 0$, враховуючи представлення $F_{\mu\nu}$ через електричне і магнітне поля, маємо

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = q(\mathbf{Ev}),$$

де $\varepsilon = cp^0 = mc^2(1-\mathbf{v}^2/c^2)^{-1/2}$, $\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ – звичайна швидкість. Права частина цього рівняння – потужність, що витрачає електромагнітне поле, діючи на частинку, ε має зміст енергії рухомої частинки.

При $\mu = i = 1,2,3$ з (5.2) у тривимірних позначеннях дістанемо

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q\left\{\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{v}\times\mathbf{B}]\right\},$$

де $\{\mathbf{p}\}=\{p^i\}$ – тривимірна частина чотири-імпульсу; $\mathbf{p} = m\mathbf{v}(1-\mathbf{v}^2/c^2)^{-1/2}$.

Це рівняння описує обмін імпульсом між зарядженим тілом та електромагнітним полем, причому права частина рівняння дає значення сили, що діє на тіло. Таким чином, **p** має зміст імпульсу рухомого тіла.

З рівняння (5.1) випливає зв’язок між енергією та імпульсом

$$\varepsilon^2 = m^2c^4 + \mathbf{p}^2c^2.$$

Узагальнимо енергетичні співвідношення на випадок неперервного розподілу зарядів. Обмін чотири-імпульсом між полем та системою N точкових тіл описується рівнянням

$$\frac{dP^{\mu}}{dt} = \sum_{k=1}^{N}\frac{q_k}{c}F^{\mu}{}_{\nu}(x_k)\frac{dx_k^{\nu}}{dt},$$

яке випливає з (5.2), де введено позначення

$$P^{\mu} = \sum_{k=1}^{N} p_k^{\mu} \text{ – чотири-імпульс системи тіл.}$$

У випадку неперервного розподілу перейдемо від сум до інтегрування

$$\frac{dP^{\mu}}{dt} = \frac{1}{c}\int dq \cdot F^{\mu}{}_{\nu}\frac{dx^{\nu}}{dt} = \frac{1}{c}\int d^3x\rho\frac{dx^{\nu}}{dt}F^{\mu}{}_{\nu} = \frac{1}{c}\int d^3xF^{\mu}{}_{\nu}J^{\nu}. \qquad (5.3)$$

Права частина (5.3) визначає чотири-імпульс, який передає (за одиницю часу) поле системі частинок.

5.2. Енергія-імпульс електромагнітного поля

Введемо тензор енергії-імпульсу електромагнітного поля

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\left\{-F^{\mu\alpha}F^{\nu}{}_{\alpha} + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right\}. \qquad (5.4)$$

Обчислимо величину $\partial_{\nu}T^{\mu\nu}$, з урахуванням рівнянь Максвелла для $F_{\mu\nu}$. З рівнянь (3.2)

$$F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta,\nu} = -F^{\alpha\beta}(F_{\beta\nu,\alpha} + F_{\nu\alpha,\beta}) = -F^{\alpha\beta}(-F_{\nu\beta,\alpha} + F_{\nu\alpha,\beta}) =$$

$$= -F^{\alpha\beta}(F_{\nu\alpha,\beta} + F_{\nu\alpha,\beta}) = -2F^{\alpha\beta}F_{\nu\alpha,\beta}$$

де враховано антисиметрію $F_{\mu\nu}$. Звідси

$$\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = 2F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta,\nu} = -4F^{\alpha\beta}F_{\nu\alpha,\beta}$$

Ураховуючи це співвідношення та беручи до уваги першу групу рівнянь Максвелла (3.1), дістаємо

$$T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = \frac{1}{4\pi}\left\{-F^{\mu\alpha}{}_{,\nu}F^{\nu}{}_{\alpha} - F^{\mu\alpha}F^{\nu}{}_{\alpha,\nu} - \eta^{\mu\nu}F^{\alpha\beta}F_{\nu\alpha,\beta}\right\} =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left\{F^{\mu}{}_{\alpha,\nu}F^{\alpha\nu} - F^{\mu\alpha}F^{\nu}{}_{\alpha,\nu} - F^{\alpha\beta}F^{\mu}{}_{\alpha,\beta}\right\} =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}F^{\mu\alpha}\partial_{\nu}F^{\nu}{}_{\alpha} = -\frac{1}{c}F^{\mu\alpha}J_{\alpha},$$

тобто

$$T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = -\tfrac{1}{c}F^{\mu}{}_{\alpha}J^{\alpha}. \qquad (5.5)$$

Права частина, згідно з (5.3), визначає чотири-імпульс, що втрачає поле при дії на заряди в одиниці об'єму за одиницю часу. Проінтегруємо (5.5) по тривимірному об'єму Ω_3, тоді права частина дасть втрати енергії поля в об'ємі Ω_3 за одиницю часу. Ліва частина дає змогу отримати явний вираз для цієї величини через польові функції:

$$\int_{\Omega_3} d^3x(T^{\mu\nu}{}_{,\nu}) = \frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int_{\Omega_3} T^{\mu 0}d^3x + \int_{\Omega_3} d^3x\frac{\partial T^{\mu i}}{\partial x_i} =$$

$$=\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega_3} T^{\mu 0} d^3x + \oint\limits_{\partial\Omega_3} d\sum\nolimits_i T^{\mu i},$$

де $d\Sigma_i$ – елемент площини поверхні $\partial\Omega_3$, що обмежує просторову область Ω_3, ($d\Sigma_1 = dydz$, $d\Sigma_2 = dxdz$, $d\Sigma_3 = dxdy$).

Інтегральний закон збереження енергії та імпульсу усієї системи „поле + частинки" в цій області має такий вигляд:

$$\frac{dP^\mu}{dt} + \frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega_3} T^{\mu 0} d^3x + \oint\limits_{\partial\Omega_3} d\sum\nolimits_i T^{\mu i} = 0, \tag{5.6}$$

де враховано (5.3), (5.5).

Звідси T^{00} можна інтерпретувати, як густину енергії електромагнітного поля, T^{i0}/c – як густину імпульсу. Останній доданок описує потік чотири-імпульсу через поверхню $\partial\Omega_3$, відповідно cT^{0i} описує потік енергії.

Запишемо співвідношення для компонент тензора енергії-імпульсу (5.4)

$$T^{00} = \frac{1}{8\pi}\left(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2\right), \tag{5.7}$$

T^{00} – густина енергії електромагнітного поля; $T^{0i} = \Pi^i / c$, де вектор

$$\mathbf{\Pi} = \frac{c}{4\pi}\left[\mathbf{E}\times\mathbf{B}\right] \tag{5.8}$$

називають вектором Пойнтінга. Він дає густину потоку енергії електромагнітного поля: як видно з (5.6), $\oint\limits_{\partial\Omega_3} \mathbf{\Pi} d\mathbf{\Sigma}$ дає енергію, що витікає через $\partial\Omega_3$ за одиницю часу. Одночасно $T^{0i}/c = T^{i0}/c = \Pi^i/c^2$ дає густину імпульсу поля, причому рівняння (5.6) при $\mu = i$ описує збереження імпульсу. Доданок $\oint\limits_{\partial\Omega_3} d\Sigma_j \cdot T^{ij}$ описує імпульс, що витікає за одиницю часу через поверхню $\partial\Omega_3$. Відповідно, вектор $\{T^{i1}, T^{i2}, T^{i3}\}$ можна інтерпретувати як густину потоку i-тої компоненти імпульсу.

Для просторової частини тензора енергії-імпульсу маємо співвідношення $T_{ij} = -\sigma_{ij}$, де тривимірний тензор

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{4\pi}\left\{E_i E_j + B_i B_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2)\right\} \tag{5.9}$$

називають максвелівським тензором натягів.

Наведемо також співвідношення, що випливає з явного виду (5.4) тензора енергії-імпульсу електромагнітного поля

$$T^{\mu\nu}\eta_{\mu\nu} = T^\mu{}_\mu = 0.$$

5.3. Чотири-тензор моменту

У нерелятивістській теорії компоненти векторного добутку $[\mathbf{r}\times\mathbf{p}]$, що подають момент імпульсу, можна записати як $x^i p^j - x^j p^i$; ця величина зберігається внаслідок ньютонівських рівнянь руху. Розглянемо контраваріантне узагальнення цього виразу

$$M^{\mu\nu} = x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu, \tag{5.10}$$

яке називають чотири-тензором моменту імпульсу. Обчислимо, як змінюється ця величина вздовж траєкторії зарядженої частинки:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}M^{\mu\nu} &= \left\{\frac{dx^\mu}{dt}p^\nu - \frac{dx^\nu}{dt}p^\mu\right\} + x^\mu\frac{dp^\nu}{dt} - x^\nu\frac{dp^\mu}{dt} = \\ &= \frac{q}{c}\left\{x^\mu F^\nu{}_\alpha\frac{dx^\alpha}{dt} - x^\nu F^\mu{}_\alpha\frac{dx^\alpha}{dt}\right\} \end{aligned} \tag{5.11}$$

Тут враховано, що $p^\nu = mcu^\nu$, $\dfrac{dx^\mu}{dt} = u^\mu\dfrac{ds}{dt}$, а також рівняння руху (5.2).

Для системи частинок

$$\frac{d}{dt}\sum M^{\mu\nu} = \sum\frac{q}{c}\left[x^\mu F^\nu{}_\alpha - x^\nu F^\mu{}_\alpha\right]\frac{dx^\alpha}{dt}.$$

При переході до неперервного розподілу обмін чотири-моментом між системою частинок і полем можна записати так:

$$\frac{d}{dt}\sum M^{\mu\nu} = \tfrac{1}{c}\int\left[x^\mu F^\nu{}_\alpha - x^\nu F^\mu{}_\alpha\right]J^\alpha dV, \tag{5.12}$$

де враховано $\sum\limits_{\Delta V} q\dfrac{dx^\alpha}{dt} \to \rho\dfrac{dx^\alpha}{dt}\Delta V = J^\alpha\Delta V$.

Покажемо, що чотири-тензор моменту імпульсу поля можна означити формулою:

$$M^{\mu\nu\alpha} = \int\left(x^\mu T^{\nu\alpha} - x^\nu T^{\mu\alpha}\right)d^3x.$$

Маємо

$$\partial_\alpha\left(x^\mu T^{\nu\alpha} - x^\nu T^{\mu\alpha}\right) = \delta^\mu_\alpha T^{\nu\alpha} - \delta^\nu_\alpha T^{\mu\alpha} + x^\mu T^{\nu\alpha}{}_{,\alpha} - x^\nu T^{\mu\alpha}{}_{,\alpha}.$$

Для $T^{\mu\nu}$ маємо рівняння збереження чотири-імпульсу (5.5), використовуючи яке, дістанемо:

$$\partial_\alpha\left(x^\mu T^{\nu\alpha} - x^\nu T^{\mu\alpha}\right) = -\tfrac{1}{c}\left(x^\mu F^\nu{}_\alpha - x^\nu F^\mu{}_\alpha\right)J^\alpha.$$

Проінтегруємо це співвідношення по області Ω_3 ($\mu = i$) із застосуванням формули Остроградського-Гауса і складемо з (5.2):

$$\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int\limits_\Omega d^3x\left(x^\mu T^{\nu 0} - x^\nu T^{\mu 0}\right) + \oint\limits_{\partial\Omega} d\Sigma_i\left(x^\mu T^{\nu i} - x^\nu T^{\mu i}\right) + \frac{d}{dt}\sum M^{\mu\nu} = 0.$$

Це співвідношення виражає збереження чотири-моменту імпульсу, причому підінтегральний вираз в першому доданку дає густину цієї величини, а другий доданок дає її потік через $\partial\Omega$. При просторових значеннях індексів μ,ν це співвідношення подає закон збереження компонент звичайного моменту імпульсу.