3.Електродинаміка у просторі Мінковського

3.1. Чотиривимірна форма рівнянь Максвелла

Для опису електромагнітного поля введемо антисиметричну матрицю

$$\left\| F_{\mu\nu} \right\| = \begin{Vmatrix} F_{00} & F_{01} & F_{02} & F_{03} \\ F_{10} & F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{20} & F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{30} & F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{Vmatrix},$$

де $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$, E_i, H_i, $i = 1,2,3$ – компоненти напруженості електричного поля та індукції магнітного поля в декартових координатах x^1,x^2,x^3. Цю матрицю називають тензором електромагнітного поля.

Зауважимо, що компоненти цього тензора можна означити ще й так:

$$F_{0i} = -F_{i0} = E_i;$$

$$F_{ij} = -\varepsilon_{ijk} B_k,$$

де в останній рівності береться сума по k, причому індекси i,j,k приймають значення 1,2,3.

Як буде видно далі, $F_{\mu\nu}$ дійсно є двічі коваріантним тензором відносно перетворень з групи Лоренца та Пуанкаре; відповідно $F^{\mu\nu} = \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} F_{\alpha\beta}$ є двічі контраваріантним тензором. **Рівняння Максвелла** в гаусовій системі одиниць, переписані для $F_{\mu\nu}$, мають вид:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} J^\nu, \tag{3.1}$$

$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0, \tag{3.2}$$

де $\{J^\mu\} = \{c\rho, \mathbf{J}\}$, $\partial_\mu f \equiv \partial f / \partial x^\mu$, ρ – густина електричного заряду; $\mathbf{J} = \rho\mathbf{v}$ – звичайна густина струму; $\mathbf{v} = d\mathbf{x}/dt$ – звичайна тривимірна швидкість зарядів у точці, що розглядається ($J^0 = c\rho$; $J^i = \rho dx_i/dt$). Знайдемо трансформаційні властивості величини J^μ, яку можна записати як

$$J^\mu = \rho \frac{ds}{dt} \frac{dx^\mu}{ds}$$

З формули для перетворення густини заряду (1.19) випливає, що $\rho c\sqrt{1 - \mathbf{V}^2 / c^2} = \rho \dfrac{ds}{dt}$ є інваріантом – це густина заряду у власній системі, домножена на швидкість світла. Тоді J^μ має ті ж трансформаційні властивості, що й dx^μ / ds, тобто це контраваріантний вектор. Його називають **чотири-вектором густини струму.**

З умови антисиметрії $F_{\mu\nu}$ та з (3.1) випливає **закон збереження заряду**

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \tag{3.3}$$

як необхідна умова існування розв'язку рівнянь електромагнітного поля. Легко перевірити, за означенням J^{μ}, що це рівняння є іншим записом звичайного закону збереження заряду у диференціальній формі (рівняння неперервності).

Трансформаційні властивості $F_{\mu\nu}$. Враховуючи лінійність перетворення компонент J^{μ} при перетвореннях Лоренца

$$\frac{\partial J^{\mu}}{\partial x^{\mu}} = \frac{\partial}{\partial x'^{\alpha}}\left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\beta}} J'^{\beta}\right)\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} = L^{\alpha}_{\mu}\widetilde{L}^{\mu}_{\beta}\frac{\partial J'^{\beta}}{\partial x'^{\alpha}} = \delta^{\alpha}_{\beta}\frac{\partial J'^{\beta}}{\partial x'^{\alpha}} = \frac{\partial J'^{\alpha}}{\partial x'^{\alpha}},$$

бачимо, що ліва частина в (3.3) є інваріантом. Таким чином, *рівняння* (*3.3*) *є інваріантним при перетвореннях Лоренца*, воно виконується в усіх інерціальних СВ, якщо виконується хоча б в одній.

Досі ми не з'ясовували трансформаційні властивості величин $F_{\mu\nu}$, які є розв'язками рівнянь електродинаміки (3.1), (3.2).

Позначимо

$$F'_{\mu\nu} = \widetilde{L}^{\alpha}{}_{\mu}\widetilde{L}^{\beta}{}_{\nu}F_{\alpha\beta}, \qquad F'^{\mu\nu} = \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}F'_{\alpha\beta} = L^{\mu}{}_{\alpha}L^{\nu}{}_{\beta}F^{\alpha\beta}. \tag{3.4}$$

Прямі обчислення, що враховують властивості прямої та оберненої матриці перетворення координат і векторний характер J^{μ}, дають

$$\frac{\partial F'^{\mu\nu}}{\partial x'^{\nu}} + \frac{4\pi}{c}J'^{\mu} = L^{\mu}_{\alpha}\left(\frac{\partial F^{\alpha\nu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{4\pi}{c}J^{\alpha}\right) = 0,$$

$$\partial'_{\alpha}F'_{\beta\gamma} + \partial'_{\beta}F'_{\gamma\alpha} + \partial'_{\gamma}F'_{\alpha\beta} = \widetilde{L}^{\mu}{}_{\alpha}\widetilde{L}^{\nu}{}_{\beta}\widetilde{L}^{\lambda}{}_{\gamma}\left(\partial_{\mu}F_{\nu\lambda} + \partial_{\nu}F_{\lambda\mu} + \partial_{\lambda}F_{\mu\nu}\right) = 0.$$

Таким чином, тензор $F'_{\mu\nu}$, що подається співвідношеннями (3.4), є розв'язком рівнянь електромагнітного поля в системі S' з густиною струму J'^{μ}, тобто він може бути виражений через напруженість електричного поля та індукцію магнітного так само, як $F_{\mu\nu}$ у вихідній системі відліку. Тут ми враховуємо, що за конкретних умов, наприклад, за відсутності зовнішнього випромінювання, ці рівняння визначають $F_{\mu\nu}$ *однозначно* (нижче будуть подані формули (3.10), (3.13), що однозначно виражають $F_{\mu\nu}$ через 4-вектор струму). Таким чином, зв'язок компонент тензора електромагнітного поля в різних системах дійсно можна подати формулами (3.4). Оскільки співвідношення, аналогічні (3.4), можна отримати між будь-якими системами відліку, звідси випливає, що сукупність компонент $F_{\mu\nu}$ в усіх системах утворює двічі коваріантний тензор. Далі буде дано інше доведення (п.3.4) через вектор-потенціал, за допомогою явного розв'язку рівнянь поля.

3.2. Рівняння руху зарядженої частинки

Як бачимо, рівняння Максвелла задовольняють принципу відносності і не потребують ніяких змін в СТВ. Навпаки, рівняння руху ньютонівської динаміки мають бути модифіковані, оскільки, як можна показати, вони не задовольняють принципам СТВ і призводять до нефізичних наслідків, коли швидкості руху порівняні зі швидкістю світла. Цю модифікацію можна отримати, якщо врахувати, що за малих швидкостей можна користуватися ньютонівськими рівняннями. Зробимо це для рівняння руху зарядженої точкової частинки.

Зафіксуємо деякій момент (точніше, подію, яка визначається цим моментом та положенням частинки у цей момент) та розглянемо систему відліку, яка у цей момент є власною для цієї частинки, тобто таку, в якій швидкість частинки у цей момент дорівнює нулю. Тоді (у цей момент) швидкість зміни імпульсу частинки з масою спокою m та зарядом q може бути подана трьома співвідношеннями в декартових координатах

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\left\{\mathbf{E} + \tfrac{1}{c}\left[\mathbf{V}\times\mathbf{B}\right]\right\} = q\mathbf{E}\text{, причому } m\frac{d(\mathbf{v}^2/2)}{dt} = 0.$$

Прямим обчисленням можна перевірити (зробіть це, як вправу!), що ці чотири співвідношення в момент, коли $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, еквівалентні таким:

$$\frac{du^{\mu}}{ds} = \frac{e}{mc^2} F^{\mu}{}_{\nu} u^{\nu}, \tag{3.5}$$

де $s = c\tau$, τ – власний час вздовж світової лінії частинки, $u^{\mu} = dx^{\mu}/ds$. Обидві частини (3.5) є чотири-векторами, тому це співвідношення має бути вірним, якщо його записати у будь-якій системі відліку. Тут враховано, що якщо усі компоненти двох тензорів співпадають в одній системі координат, то вони співпадають у будь-якій іншій системі.

Оскільки ці міркування можна повторити для будь-якого моменту часу та будь-якої точки траєкторії частинки, рівняння (3.5) є шуканим релятивістським узагальненням рівняння руху зарядженої частинки.

Звернемо увагу, що серед чотирьох рівнянь (3.5) лише три є незалежними, якщо врахувати зв'язок (2.6) між компонентами чотири-швидкості. Тобто кількість ступенів свободи, що визначається кількістю фізично незалежних початкових умов для рівнянь руху, тут така ж сама, як і в класичній механіці.

Хоча тут розглядаємо рух заряджених частинок в електромагнітному полі, це не заважає дати загальну інтерпретацію для енергії та імпульсу частинки. Запишемо тривимірну форму рівнянь руху, яка є еквівалентною трьом компонентам (3.5) при $\mu = 1,2,3$:

$$m\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2/c^2}}\right) = q\left\{\mathbf{E} + \frac{1}{c}\left[\mathbf{V}\times\mathbf{B}\right]\right\}.$$

Оскільки права частина – це сила, що визначає швидкість передачі імпульсу, звідси випливає *вираз для релятивістського імпульсу*

$$\mathbf{P} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2/c^2}}.$$

Компонента $\mu = 0$ дає

$$mc^2\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2/c^2}}\right) = q(\mathbf{E}\cdot\mathbf{V}).$$

Права частина – це потужність, яку витрачає електричне поле, діючи на частинку. Звідси випливає *релятивістський вираз для енергії рухомого тіла*

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2 / c^2}}.$$

3.3. Плоскі хвилі. Ефект Доплера

При $J^{\mu} = 0$ розв'язок однорідних рівнянь Максвелла можна шукати у вигляді суперпозиції плоских хвиль

$$F_{\mu\nu}(x) = f_{\mu\nu}\, exp[-i\Omega(x)]\,,$$

де компоненти тензора $f_{\mu\nu}$ – сталі, а скаляр Ω – лінійна функція координат, $\Omega(x) = k_{\mu}x^{\mu}$, $k_{\mu} = \partial_{\mu}\Omega$ – хвильовий чотиривектор.

Частота коливань електромагнітного поля, яка сприймається спостерігачем на світовій лінії $x^{\mu}_{\text{сп}}(\tau)$ – це швидкість зміни величини $\Omega\left(x^{\mu}_{\text{сп}}(\tau)\right)$ за власним часом спостерігача:

$$\omega = \frac{d}{d\tau}\Omega\left(x^{\mu}_{\text{сп}}(\tau)\right) = c\frac{d}{ds}\Omega = ck_{\mu}u^{\mu}_{\text{сп}}\,, \tag{3.6}$$

де $u^{\mu}_{\text{сп}} = \dfrac{dx^{\mu}_{\text{сп}}}{ds_{\text{сп}}}$ – чотиришвидкість спостерігача, $s_{\text{сп}} = c\tau_{\text{сп}}$.

Вектор $k^{\mu} - k_{\alpha}u^{\alpha}_{\text{сп}}u^{\mu}_{\text{сп}}$, ортогональний до $u^{\mu}_{\text{сп}}$, визначає (у звичайному, тривимірному розумінні) напрямок руху електромагнітних хвиль відносно спостерігача, тобто у власній системі спостерігача тривимірні складові вектора k^{μ} колінеарні цьому напрямку. Це легко перевірити, враховуючи, що у власній системі чотиришвидкість має лише одну ненульову компоненту $\{u^{\mu}_{\text{сп}}\} = \{1,0,0,0\}$.

Підстановка тензора електромагнітного поля для плоских хвиль у (3.1) та (3.2) дає

$$f^{\mu\nu}k_{\nu} = 0, \tag{3.7}$$

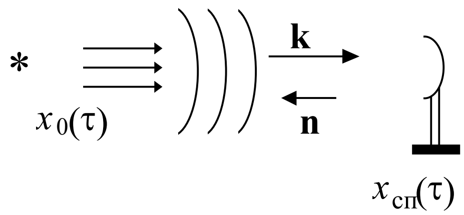
$$f_{\alpha\beta}k_{\gamma} + f_{\beta\gamma}k_{\alpha} + f_{\gamma\alpha}k_{\beta} = 0. \tag{3.8}$$

Перше рівняння (3.7) складає умову поперечності електромагнітних хвиль у вакуумі. Домножуючи (3.8) на k^{γ}, після сумування за індексом γ з урахуванням (3.7) отримуємо для ненульової амплітуди $f_{\alpha\beta}$

$$k_{\gamma}k^{\gamma} = 0 \quad \text{або} \quad \eta^{\mu\nu}\frac{\partial\Omega}{\partial x^{\nu}}\frac{\partial\Omega}{\partial x^{\mu}} = 0. \tag{3.9}$$

Звідси випливає $k^0 = |\mathbf{k}|$.

Ураховуючи це, отримаємо формулу ефекту Доплера. Аналогічно (3.6) власна частота коливань випромінювача з траєкторією $x^{\mu}_0(\tau_0)$ та 4-швидкістю $u^{\mu}_0 = dx^{\mu} / ds_0$ є $\omega_0 = \dfrac{d}{d\tau}\Omega\left(x^{\mu}_0(\tau_0)\right) = ck_{\mu}u^{\mu}_0$. Ця формула інваріантна, її можна використовувати у будь-якій системі.



Далі усі величини розглядаємо у системі спостерігача, де його 4-швидкість $u_c^\mu = \{1,0,0,0\}$, а виміряна ним частота $\omega_{сп} = ck_\mu u_{сп}^\mu = ck_0 = ck^0$. Напрям поширення хвиль, що приймає спостерігач, визначається просторовою частиною чотири-вектора k^μ; він є протилежним напрямку на джерело випромінювання $\mathbf{n} = -\mathbf{k}/|\mathbf{k}| = -\mathbf{k}/k^0$.

Тоді $\dfrac{\omega_{сп}}{\omega_0} = \dfrac{k_\mu u_{сп}^\mu}{k_\mu u_0^\mu} = \dfrac{k_0}{k_\mu u_0^\mu} = \dfrac{1}{u_0^0(1+\mathbf{nv}/c)} = \dfrac{\sqrt{1-\mathbf{v}^2/c^2}}{(1+\mathbf{nv}/c)}$.

3.4. Вектор–потенціал

Внаслідок рівнянь (3.2) можна ввести чотиривектор потенціалу A_μ (чотирипотенціал)

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu . \tag{3.10}$$

При виконанні (3.10) рівняння (3.2) виконуються тотожно. З подальшого буде видно, що формула (3.10) дає розв'язок також (3.1), якщо належним чином підібрати A_μ. Очевидно, фізичні поля, що їх описує тензор $F_{\mu\nu}$, залишаться незмінними при перетворенні $A_\nu \to A_\nu + \partial_\nu\phi$, де ϕ – довільна функція. Це перетворення 4-потенціалу називають калібрувальним. Завдяки калібрувальній інваріантності можна накласти **умову Лоренца**

$$\partial_\nu A^\nu = 0. \tag{3.11}$$

Цю умову далі перевіримо явно, коли отримаємо розв'язок.

За умови (3.11) підстановка (3.10) у рівняння Максвелла (3.1) дає

$$\Box\, A^\nu = (4\pi/c)J^\nu , \tag{3.12}$$

де $\Box = \partial_\nu \partial^\nu = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu$ – оператор д`Аламбера (хвильовий оператор).

Розв'язок (3.12) за умови (3.11) породжує розв'язок рівнянь Максвелла для тензора електромагнітного поля за формулою (3.10). Як відомо з курсу математичної фізики, розв'язок рівняння (3.12) у вигляді запізнюючих потенціалів, що відповідає **умові відсутності зовнішнього випромінювання**, можна подати за допомогою фундаментального розв'язку $D_{ret}(x^\mu)$ оператора Даламбера, де

$$D_{ret}(x^\mu) = \frac{1}{2\pi}\theta(x^0)\delta[(x^0)^2 - \mathbf{x}^2] ,$$

$\theta(t)$ – функція Хевісайда,

δ – функція Дірака; $\Box\, D(x^\mu) = \delta^4(x^\mu) \equiv \delta(x^0)\delta(x^1)\delta(x^2)\delta(x^3)$.

Відповідний розв'язок рівняння (3.12) має вид згортки

$$A^\nu = (4\pi/c)D_{ret} * J^\nu . \tag{3.13}$$

Він описує електромагнітне поле обмеженого струму з 4-вектором густини J^{ν}. Функція D_{ret} є скаляром відносно власних перетворень Лоренца, оскільки тут аргумент δ-функції залежить від квадрата інтервалу, а в $\theta(x^0)$ аргумент не змінює знаку при цих перетвореннях. Тому з (3.13) випливає, що A^{ν} є чотиривектором відносно перетворень власної групи Лоренца, якщо J^{ν} – чотиривектор. Це дає змогу дати незалежне обчислення закону перетворення $F_{\mu\nu}$ при переході в іншу систему відліку з використанням формули (3.10), тобто встановити, що $F_{\mu\nu}$ – двічі коваріантний тензор.

Користуючись рівнянням (3.13), перевіримо також калібрувальну умову (3.11). Маємо

$$\partial_{\nu} A^{\nu} = (4\pi / c)\partial_{\nu}\{D_{ret} * J^{\nu}\} = (4\pi / c)D_{ret} * \partial_{\nu} J^{\nu} = 0$$

внаслідок закону збереження заряду (3.3). Тепер очевидно, що тензор $F_{\mu\nu}$, обчислений за формулою (3.10), задовольняє рівнянням (3.1), (3.2).