2. Співвідношення СТВ у просторі Мінковського

2.1. Перетворення Лоренца у чотиривимірному просторі

Будемо позначати координати подій в інерціальних системах так: $x^0 = ct$, t – час, $\{\mathbf{x}\} = \{x^1, x^2, x^3\}$ – просторові декартові координати. Далі працюватимемо у чотиривимірному просторі-часі (Мінковського), точками якого є події, що визначаються своїми координатами у певній системі відліку. Як було з'ясовано у попередньому розділі, перетворення координат є лінійним при переході від однієї інерціальної системи $\{x^\mu\} = \{x^0, x^1, x^2, x^3\}$ до іншої $\{x'^{\mu}\}$, причому це перетворення залишає незмінним числове значення квадрата інтервалу для довільних точок x_1^α та x_2^α чотиривимірного простору-часу

$$\left(x_1^0 - x_2^0\right)^2 - \left(x_1^1 - x_2^1\right)^2 - \left(x_1^2 - x_2^2\right)^2 - \left(x_1^3 - x_2^3\right)^2 = \eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu,$$

де $\Delta x^\alpha = x_1^\alpha - x_2^\alpha$, а матриця

$$\|\eta\| = \mathrm{diag}\,(1, -1, -1, -1) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}$$

має назву тензора Мінковського. Матриця $\eta_{\mu\nu}$ співпадає зі своєю оберненою $\eta^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$.

У цих позначеннях інваріантність квадрата інтервалу при перетворенні координат $x \to x'$

$$\Delta s^2 = \eta_{\mu\nu} \Delta x'^{\mu} \Delta x'^{\nu} = \eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu \tag{2.1}$$

нагадує умову інваріантності квадрату відстані між точками при просторових поворотах у тривимірному просторі. Тому кажуть, що при переході між інерціальними системами маємо чотиривимірний поворот.

Якщо розглядаються інерціальні системи зі спільним початком координат, зв'язок між ними дається однорідним перетворенням

$$x'^{\mu'} = L^{\mu'}{}_{\mu} x^\mu. \tag{2.2}$$

Підстановка (2.2) в (2.1) дає

$$\eta_{\mu'\nu'} \Delta x'^{\mu'} \Delta x'^{\nu'} = \eta_{\mu'\nu'} L^{\mu'}{}_{\mu} L^{\nu'}{}_{\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu = \eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu.$$

З урахуванням довільності компонент Δx^μ та симетрії $\eta_{\alpha\beta} = \eta_{\beta\alpha}$ з цього співвідношення випливає інваріантність згортки $\eta_{\mu'\nu'} \Delta (x')^{\mu'} \Delta (y')^{\nu'} =$ $= \eta_{\mu'\nu'} L^{\mu'}{}_{\mu} L^{\nu'}{}_{\nu} \Delta x^\mu \Delta y^\nu = \eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta y^\nu$ для будь-яких Δx^μ, Δy^μ (доведіть це самостійно!). Це накладає умову на матрицю перетворення

$$\eta_{\alpha\beta} = L^{\alpha'}{}_{\alpha} L^{\beta'}{}_{\beta} \eta_{\alpha'\beta'}. \tag{2.3}$$

Умова (2.3), або безпосередньо умова інваріантності квадрата інтервалу (2.1), визначає **загальну групу Лоренца (ГЛ) – групу всіх лінійних однорідних перетворень, що залишають інваріантним квадрат інтервалу**. Ця властивість притаманна усім перетворенням, що пов'язують координати в інерціальних системах відліку. При цьому просторові координати мають визначатися в декартовій системі; очевидно, що у криволінійних координатах співвідношення не зберігається, хоча його можна певним чином узагальнити.

Оскільки права частина (2.3) є добутком матриць $\|\mathbf{L}^{\mathrm{T}}\|\cdot\|\eta\|\cdot\|\mathbf{L}\|$, то, обчислюючи визначник добутку, отримаємо $\mathrm{Det}\mathbf{L}^{\mathrm{T}}\cdot\mathrm{Det}\mathbf{L} = (\mathrm{Det}\mathbf{L})^2 = 1$, звідки $\mathrm{Det}\|\mathbf{L}\| = \pm 1$.

Якщо розписати (2.3) з урахуванням явного виду $\|\eta\| = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$ для компоненти із значеннями індексів $\alpha = 0$, $\beta = 0$

$$1 = (L^0{}_0)^2 - (L^1{}_0)^2 - (L^2{}_0)^2 - (L^3{}_0)^2\,,$$

звідки $|L^0{}_0| \geq 1$.

Звідси видно, що не усі перетворення з ГЛ можна неперервним чином отримати з одиничної матриці (наприклад, часові або просторові інверсії $t \to -t$, $x^1 \to -x^1$ тощо). **Власною групою Лоренца** називають зв'язну підгрупу загальної групи Лоренца, яка містить одиницю, тобто таку підгрупу загальної ГЛ, кожний елемент котрої можна отримати шляхом неперервної зміни коефіцієнтів матриці $\|\mathbf{L}\|$, починаючи від одиничної матриці і залишаючись всередині підгрупи. Це відповідає умові

$$\mathrm{Det}\|\mathbf{L}\| = 1, \quad L^0{}_0 \geq 1.$$

Оскільки $\mathrm{Det}\|\mathbf{L}\|$ є якобіаном переходу $x^\mu \to x'^\mu$, звідси випливає **інваріантність елементу об'єму** $\mathrm{d}^4x = \mathrm{d}x^0\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3 = \mathrm{d}^4x'$.

Приклад власного перетворення Лоренца дають формули (1.10). Якщо система $\{x'^\mu\}$ рухається відносно системи $\{x^\mu\}$ зі швидкістю v, що спрямована вздовж осі x^1, ці формули мають такий вигляд:

$$x'^1 = \gamma\left(x^1 - \beta x^0\right), \quad x'^0 = \gamma\left(x^0 - \beta x^1\right), \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = v/c\,.$$

Відповідна матриця *одновимірного перетворення Лоренца* має вид:

$$\left\|L^{\mu'}{}_\mu\right\| = \left\|\frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^\mu}\right\| = \left\|\begin{matrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\|.$$

Можна показати, що будь-яке перетворення власної ГЛ можна подати як суперпозицію просторових поворотів та одновимірного перетворення Лоренца. Таким чином, перетворення, що пов'язують різні інерціальні системи відліку (без просторових та часових інверсій) – це перетворення власної групи Лоренца.

Загальна ГЛ містить власну ГЛ як підгрупу, решта перетворень загальної ГЛ є суперпозиціями власної ГЛ та інверсій простору й часу.

Якщо доповнити перетворення групи Лоренца просторовими та часовими трансляціями, маємо **групу перетворень Пуанкаре**

$$x'^{\mu'} = L^{\mu'}{}_{\mu} x^{\mu} + a^{\mu}. \tag{2.4}$$

Нагадаємо базові співвідношення з тензорного аналізу.

Коваріантним вектором відносно групи Лоренца (або групи Пуанкаре) називають сукупність компонент $\{A_\mu\}$, μ=0,1,2,3, які задані в усіх системах координат, пов'язаних перетворенням (2.2) (або (2.4)), причому для довільних таких систем $\{x\}$ та $\{x'\}$ ці компоненти $\{A_\mu\}$ та $\{A'_\mu\}$ задовольняють співвідношенню

$$A_\mu = \frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} A_{\mu'} = L^{\mu'}{}_{\mu} A_{\mu'}.$$

Для **контраваріантного вектора** $\{B^\mu\}$ відносно групи Лоренца компоненти пов'язані оберненим перетворенням

$$B'^{\mu'} = \frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} B^{\mu} = L^{\mu'}{}_{\mu} B^{\mu}.$$

Якщо L^{-1} – обернена до L матриця, тобто $\left(L^{-1}\right)^{\mu}{}_{\alpha} = \dfrac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}}$, $L^{\beta}{}_{\mu}\left(L^{-1}\right)^{\mu}{}_{\alpha} = \delta^{\beta}{}_{\alpha}$ та $\left(L^{-1}\right)^{\mu}{}_{\alpha} L^{\alpha}{}_{\nu} = \delta^{\mu}{}_{\beta}$, тоді очевидно, що $A'_{\mu'} = \left(L^{-1}\right)^{\mu}{}_{\mu'} A_{\mu}$, $B^{\mu} = L^{\mu}{}_{\mu'} B'^{\mu'}$.

Оскільки Det$\|\mathbf{L}\|\neq 0$, існує обернена матриця L^{-1}:

$$L^{\alpha'}{}_{\alpha}\left(L^{-1}\right)^{\alpha}{}_{\gamma'} = \delta^{\alpha'}{}_{\gamma'}$$

Домножимо (2.3) на обернену матрицю

$$\eta_{\alpha\beta}\left(L^{-1}\right)^{\alpha}{}_{\gamma'} = \left(L^{-1}\right)^{\alpha}{}_{\gamma'} L^{\alpha'}{}_{\alpha} L^{\beta'}{}_{\beta} \eta_{\alpha'\beta'} = \delta^{\alpha'}{}_{\gamma'} L^{\beta'}{}_{\beta} \eta_{\alpha'\beta'} = L^{\beta'}{}_{\beta} \eta_{\gamma'\beta'},$$

звідси

$$\left(L^{-1}\right)^{\mu'}{}_{\alpha'} = \eta^{\mu'\mu} \eta_{\alpha'\alpha} L^{\alpha}{}_{\mu},$$

де $\eta^{\mu\nu} = \mathrm{diag}\,(1,-1,-1,-1) = \eta_{\mu\nu}$.

Тензори визначаються набором чисел (компонент), які перетворюються як прямий добуток відповідного числа коваріантних контраваріантних векторів. Наприклад, двічі коваріантний та один раз контраваріантний тензор $T_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$ перетворюється при перетворенні (2.4) за правилом

$$T'_{\alpha'\beta'}{}^{\gamma'} = \tilde{L}^{\alpha}{}_{\alpha'} \tilde{L}^{\beta}{}_{\beta'} L^{\gamma'}{}_{\gamma} T_{\alpha\beta}{}^{\gamma}.$$

З тензорів однакової будови можна утворювати лінійну комбінацію; з довільних тензорів можна утворювати прямий добуток.

З формули для перетворення тензорів очевидно, що *коли усі компоненти тензора дорівнюють нулю в одній системі, то вони є нульовими в усіх* *системах.* Звідси, *якщо усі компоненти двох тензорів співпадають в одній системі, то вони співпадають в усіх системах.*

В силу (2.3) матриця $\|\eta_{\alpha\beta}\|$ складає двічі коваріантний тензор – тензор Мінковського, причому компоненти цього тензора зберігають свої числові значення при перетвореннях. Специфічною його властивістю є також те, що завдяки рівностям $\|\eta^{\mu\nu}\| \equiv \|\eta_{\mu\nu}\|$, $\eta^{\alpha\beta}\eta_{\alpha\beta} = \delta^{\alpha}{}_{\beta}$ це одночасно є двічі контраваріантний тензор: $\eta^{\alpha'\beta'} = L^{\alpha'}{}_{\alpha} L^{\beta'}{}_{\beta} \eta^{\alpha\beta}$, що випливає безпосередньо з (2.3).

За допомогою тензора Мінковського можна опускати й піднімати індекси, наприклад $U^{\mu} = \eta^{\mu\alpha} U_{\alpha}$ (покомпонентно це буде $U_0 = U^0$, $U_i = -U^i$, $i = 1,2,3$), або $F^{\mu}{}_{\nu} = \eta^{\mu\alpha} F_{\alpha\nu}$; легко довести, що ці величини мають відповідні тензорні властивості при перетвореннях Лоренца. З фізичної точки зору піднімання та опускання індексів не приводить до якихось нових об’єктів, тому зазвичай після цієї операції зберігають такі самі позначення тензорів, над якими ця операція виконується. *Зверніть увагу на положення індексів після піднімання та опускання*. Наприклад, в $F^{\mu}{}_{\nu}$ після піднімання індекс μ залишився на першому місці.

Окрім тензора Мінковського, маємо ще один об’єкт, числові значення компонент якого не змінюються при власних перетвореннях Лоренца. Це **абсолютно антисиметричний символ** (Леві-Чівіта) $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$, що змінює знак при перестановках будь-яких двох індексів, причому $\varepsilon^{0123} = 1$. Очевидно, всі компоненти $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ дорівнюють або 1, якщо впорядкована сукупність індексів $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ складає парну перестановку чисел $\{0,1,2,3\}$, або -1 у разі непарної перестановки. Якщо ж хоча б одна пара індексів співпадає, маємо 0. Знайдемо закон перетворення $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$. За означенням визначника

$$\det\left\|\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\right\| = \frac{\partial x'^{0}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{1}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x'^{2}}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial x'^{3}}{\partial x^{\delta}} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta},$$

тому для довільної перестановки верхніх індексів

$$\varepsilon^{\alpha'\beta'\gamma'\delta'} \det\left\|\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\right\| = \frac{\partial x'^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\beta'}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x'^{\gamma'}}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial x'^{\delta'}}{\partial x^{\delta}} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}.$$

Сукупність величин, що перетворюються таким чином, називають тензорною густиною. Але відносно власних перетворень Лоренца $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ є чотирьохіндексним контраваріантним тензором, оскільки визначник в останній формулі дорівнює одиниці.

Легко бачити, що *коваріантний* символ Леві-Чівіта

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = \eta_{\alpha\alpha'}\eta_{\beta\beta'}\eta_{\gamma\gamma'}\eta_{\delta\delta'}\varepsilon^{\alpha'\beta'\gamma'\delta'} = -\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$$

має аналогічні властивості ($\varepsilon_{0123} = -1$).

Вектор A_α (або A^α) називають **часоподібним**, якщо $A_\alpha A^\alpha > 0$, **просторовоподібним**, якщо $A_\alpha A^\alpha < 0$, **ізотропним** або **світлоподібним**, якщо $A_\alpha A^\alpha = 0$.

2.2. Власний час та чотиривектор швидкості

Траєкторії точкових тіл (світові лінії) в чотиривимірному просторі-часі зручно записувати у параметричному вигляді: $x^\mu = f^\mu(p)$, де p – деякий неособливий параметр, який монотонно зростає з часом. Зважаючи на те, що швидкості фізичних тіл не перевищують швидкості світла, маємо вздовж світової лінії тіла з ненульовою масою

$$(dx^0)^2 - (d\mathbf{x})^2 > 0$$

або

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu > 0,$$

в цьому разі траєкторію $x^\mu(p)$ називають часоподібною (оскільки вектор дотичної dx^μ / dp часоподібний). У протилежному випадку маємо просторовоподібну криву. Для фотонів та інших частинок нульової маси, що рухаються зі швидкістю світла,

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = 0,$$

тоді траєкторію називають ізотропною або світлоподібною.

Власний час визначений на часоподібних траєкторіях формулою

$$\tau = \frac{1}{c} \int\limits_{p_1}^{p_2} \left(\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} \right)^{1/2} dp, \tag{2.5}$$

яка дає змогу обчислити інтервал часу між точками $x^\mu = x^\mu(p_i)$, $i=1{,}2$ за показами годинника, що рухається разом з тілом вздовж траєкторії $x^\mu(p_i)$. Якщо від параметра p перейдемо до координатного часу $t=x^0/c$, отримаємо з (2.5) відому формулу

$$\tau = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \left(\frac{d\mathbf{x}}{cdt} \right)^2}\, dt\,.$$

Нагадаємо, що (2.5) має місце для *довільних часоподібних траєкторій, у тому числі й для тих, що описують неінерціальні рухи точкових тіл*. Але система відліку, де зберігає свій вигляд формула (2.5), має бути інерціальною.

З урахуванням властивостей x^μ та $\eta_{\mu\nu}$, при перетвореннях Лоренца легко бачити, що величина

$$d\tau^2 = \frac{1}{c^2} \eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} dp^2$$

є інваріантом відносно цих перетворень. Власний час тіла (2.5), як і належить бути числовим показам годинника, не залежить від вибору координат, в яких здійснюється обчислення. Зазначимо також, що формула (2.5) не залежить від вибору допустимого параметра p.

Часоподібну траєкторію зручно параметризувати за допомогою величини $s = c\tau + \mathrm{const}$, де вибір константи визначається початком відліку власного часу. На світовій лінії тіла $x(s)$ введемо контраваріантний **чотиривектор швидкості** (далі чотиришвидкість) $u^\mu = dx^\mu / ds$, а також відповідний коваріантний вектор $u_\mu = \eta_{\mu\nu} u^\nu$. Легко перевірити, що вони перетворюються належним чином при координатних перетвореннях. Безпосередньо з (2.3) маємо співвідношення

$$\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 1 \quad \text{або} \quad u^\mu u_\mu = 1, \tag{2.6}$$

яке називатимемо умовою нормування чотиришвидкості. Звідси видно, що з чотирьох компонент u^μ незалежними є лише три. У власній системі відліку, де тіло на даний момент покоїться, просторові компоненти швидкості дорівнюють нулю ($u^i = 0$, $i = 1,2,3$) і $u^0 = 1$, що, очевидно, задовольняє умову нормування. Інколи цю систему називають також системою спокою тіла.

Якщо $x^\mu(p)$ – світлоподібна (наприклад, траєкторія руху фотонів), то, виходячи з (2.4), у цьому разі замість (2.6) маємо для будь-якої параметризації

$$\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} = 0 .$$