



ТЕНЗОРНИЙ АНАЛІЗ

Робоча програма навчальної дисципліни (Силабус)

Реквізити навчальної дисципліни

Рівень вищої освіти	Перший (бакалаврський)
Галузь знань	10 Природничі науки
Спеціальність	105 Прикладна фізика та наноматеріали
Освітня програма	Прикладна фізика
Статус дисципліни	Нормативна (цикл професійної підготовки)
Форма навчання	очна (денна)
Рік підготовки, семестр	2 курс, осінній семестр
Обсяг дисципліни	Загальна кількість: (3 кр.) 90 год. Лекційних занять: 18 год. Практичних занять: 18 год. Самостійна робота студентів: 54 год.
Семестровий контроль / контрольні заходи	залік, поточний контроль, модульна контрольна робота
Розклад занять	http://ipt.kpi.ua/navchalnij-protses
Мова викладання	Українська
Інформація про керівника курсу / викладачів	Лектор: Наказної Павло Олександрович (p.nakaznoy@kpi.ua). Практика: Наказної Павло Олександрович.
Розміщення курсу	https://do.ipk.kpi.ua/course/view.php?id=2364

Програма навчальної дисципліни

1. Опис навчальної дисципліни, її мета, предмет вивчення та результати навчання

Тензорний аналіз є одним з основних математичних інструментів сучасної фізики, який необхідний для вивчення теорії поля та механіки суцільних середовищ. Об'єктом тензорного аналізу є спеціальні математичні об'єкти – тензори (лінійні оператори що діють на елементи лінійного або афіного простору та самі утворюють лінійний простір). Предметом є вивчення алгебраїчних операцій над тензорами (тензорної алгебри), а також диференціального та інтегрального числення тензорів. Важливість тензорного аналізу обумовлена необхідністю застосування методу координат для дослідження фізичних явищ. Складність (а часто й можливість взагалі) обчислень залежить від вдалого вибору координат, однак отримані висновки не повинні залежати від нього. Тензорний аналіз досліджує залежність отриманих математичних результатів від вибору системи координат та з'ясовує критерії їх інваріантності.

Мета курсу «Тензорний аналіз» полягає в тому, щоб довести до студента основні принципи тензорного аналізу. Завданням вивчення даної дисципліни є здатність розв'язування фізичних задач за допомогою тензорного числення, диференціальних та інтегральних операцій над тензорами, у т.ч. векторами.

Після засвоєння навчальної дисципліни студенти мають продемонструвати такі результати навчання:

знання: основних принципів тензорного числення

уміння: виконувати основні алгебраїчні операції над тензорами, знаходити їх власні значення та вектори, шукати як перетворюються їх компоненти при заміні координат, диференціювати та інтегрувати тензори з використанням узагальнених формул Гауса та Стокса

досвід: застосування понять тензорного числення до об'єктів різної природи, використання здобутих методів у подальшому навчанні.

Згідно з вимогами освітньо-наукової програми студенти після засвоєння навчальної дисципліни «Тензорний аналіз» мають продемонструвати такі результати навчання:

Фахові компетентності СВО

- ФК 5: Здатність до постійного розвитку компетентностей у сфері прикладної фізики, інженерії та комп'ютерних технологій.
- ФК 7: Здатність використовувати методи і засоби теоретичного дослідження та математичного моделювання в професійній діяльності.
- ФК 10: Здатність розуміти та застосовувати апарат спеціальних розділів математики для розв'язання проблем прикладної фізики, моделювати фізичні процеси і системи, використовуючи статистичні та стохастичні методи, комп'ютерну графіку, та представляти результати моделювання.

Програмні результати навчання

- ПРН 2: Застосовувати сучасні математичні методи для побудови й аналізу математичних моделей фізичних процесів.
- ПРН 16: Знання методів аналізу випадкових процесів, теорії ймовірності і математичної статистики, програмування, комп'ютерної графіки, прикладних програм і методів обчислень, методів розв'язання рівнянь математичної фізики, теорії функції комплексної змінної, тензорного аналізу, для розуміння сучасних фізичних теорій і розв'язання проблем прикладної фізики та моделювання процесів, що відбуваються в фізико-технічних системах.

2. Пререквізити та постреквізити дисципліни (місце в структурно-логічній схемі навчання за відповідною освітньою програмою)

Для вивчення матеріалу курсу «Тензорний аналіз» необхідне успішне засвоєння курсів:

1. Математичний аналіз;
2. Алгебра та геометрія;

Також повинні вміти використовувати математичний апарат: операції з матрицями, диференціювати, інтегрувати.

Отримані практичні навички та засвоєні теоретичні знання під час вивчення навчальної дисципліни «Тензорний аналіз» можна використовувати в подальшому в навчальних дисциплінах, пов'язаних з теоретичними та практичними аспектами прикладної фізики, зокрема:

1. Електрика та магнетизм;
2. Оптика;
3. Класична механіка;
4. Теорія поля;

5. Фізика твердого тіла;
6. Теорія пружності
7. Фізика суцільних середовищ;
8. Електродинаміка суцільних середовищ.

3. Зміст навчальної дисципліни

Розділ 1. Векторне числення

Вступ. Місце тензорного аналізу серед інших математичних дисциплін

Тема 1.1 Вектори та основні операції над ними

Тема 1.2 Поняття евклідового простору та фундаментальної матриці

Тема 1.3 Ортобазис та операції у ньому

Розділ 2. Тензорне числення

Тема 2.1 Тензори 2-ого рангу над 3-вимірним евклідовим простором

Тема 2.2 Операції над тензорами 2-ого рангу

Тема 2.3 Спектральні властивості тензорів

Тема 2.4 Тензори довільного рангу

Тема 2.5 Тензори в криволінійних координатах

4. Навчальні матеріали та ресурси

Нижче наводиться перелік навчальних матеріалів та ресурсів для засвоєння матеріалу, розглянутого на лекційних заняттях та для додаткового вивчення. Його поділено на базові, які слід вивчати у першу чергу та додаткові, до яких можна звертатись факультативно.

Базові підручники та посібники

1. М. А. Разумова та В. М. Хотяїнцев. Основи векторного і тензорного аналізу. К.: ВПЦ «Київський університет», 2011.
2. П. О. Наказной. Тензорний аналіз. Збірник задач. К.: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021.

Додаткові підручники та посібники

3. L. Lebedev, M. Cloud та Eremeyev V. Tensor Analysis with Applications in Mechanics. World Scientific Publishing Company, 2010.
4. E. De Souza Sánchez Filho. Tensor Calculus for Engineers and Physicists. Springer, 2016.
5. F. Irgens. Tensor Analysis. Springer, 2019.
6. G. E. Mase. Theory and Problems of Continuum Mechanics. McGraw-Hill, 1970.
7. И. Э. Келлер. Тензорное исчисление. М.: Лань, 2012.
8. А. М. Анчиков. Основы векторного и тензорного анализа. Казань: Изд. Казанского ун-та, 1988.
9. М. М. Постников. Лекции по геометрии. Семестр I. Аналитическая геометрия. М.: Наука, 1986.
10. А. С. Бортакровский та А. В. Пантелеев. Линейная алгебра в примерах и задачах. М.: Высшая школа, 2005.

5. Методика опанування навчальної дисципліни (освітнього компонента)

Лекційні заняття

№	Назва теми лекції та перелік основних питань
Розділ 1. Векторне числення	
1.	<p>Тема 1.1. Вектори та основні операції над ними. Вступ. Місце тензорного аналізу серед інших математичних дисциплін. Поняття лінійного простору. Вектори як елементи лінійного простору. Приклади лінійних просторів. Афінний простір та його базис. Координати векторів. Поняття лінійної залежності та незалежності векторів. Розклад вектора за базисом. Правило Айнштайна. Перетворення базису.</p> <p><i>Література для опрацювання:</i> [1, §1.2.1], [7, §1.2], [8, §17-19], [6, §1.3-4, 9, 10], [9, лекції 1, 2, 6], [3, §2.1, 3—4]</p>
2.	<p>Тема 1.2. Евклідові простори. Поняття скалярного добутку над лінійним простором. Фундаментальна матриця. Скалярний добуток довільних векторів. Взаємний базис та його перетворення. Контраваріантні та коваріантні координати. Геометричний зміст координат векторів. Формули Гіббза.</p> <p><i>Література для опрацювання:</i> [1, §7.1], [7, §1.3.1-7], [9, лекція 12], [3, §2.2, 5, 7]</p>
3.	<p>Тема 1.3. Ортобазис та операції у ньому. Означення ортобазису. Ортогоналізація довільного базису. Перетворення, що зберігають ортогональність. Полярні та аксіальні вектори. Векторний та мішаний добутки, їх геометричний зміст. Зв'язок між основним та взаємним базисами.</p> <p><i>Література для опрацювання:</i> [1, §2.1, 5.1—2], [7, §1.3.8-10, 12, §1.4], [6, §1.5, 7, 12, 13, 16], [4, §1.3], [9, лекції 13-15], [3, §4.9]</p>
Розділ 2. Тензорне числення	
4.	<p>Тема 2.1. Тензори 2-ого рангу над 3-вимірним евклідовим простором. Приклади лінійних операторів над векторами. Поняття діади та діадіку. Тензор як лінійний оператор та діадік. Тричленне представлення тензора. Матриця компонент тензора</p> <p><i>Література для опрацювання:</i> [1, §2.1-6, 4.5], [7, §2.1], [6, §1.1-2, 8], [3, §3.1-3]</p>
5.	<p>Тема 2.2. Операції над тензорами 2-ого рангу. Сума тензорів. Множення тензора на число. Множення тензорів. Піднесення тензора у степінь. Множення тензора на вектор. Транспонування тензора. Симетрування та альтернування тензора. Утворення білінійної форми за допомогою тензора. Слід тензора. Кульова та девіаторна тензора. Подвійний скалярний добуток тензорів. Повний скалярний добуток тензорів. Інваріанти тензора та їх обрахунок. Тотожність Гамільтона-Келі</p> <p><i>Література для опрацювання:</i> [1, §3.1-3, 4.1], [7, §2.2.1-13, 3.1.4—6], [6, §1.6, 14, 15, 17, 18], [3, §3.4-5]</p>
6.	<p>Тема 2.3. Спектральні властивості тензорів. Характеристичне рівняння для тензора. Теорема Гамільтона-Келі. Теорема Вієта для кубічного рівняння та аналіз спектру тензора. Головний напрям тензора. Властивості простого спектру. Ліві власні вектори та взаємний базис. Формули Гіббза для тензора 2-ого рангу. Спектральне розвинення тензора. Зв'язок інваріантів тензора із його власними значеннями</p> <p><i>Література для опрацювання:</i> [1, §4.2-4], [7, §3.1.7-9, 3.2.6—7, 10, 3.3.1—2], [6, §1.19, 20], [3, §3.6-8]</p>
7.	<p>Тема 2.4. Тензори довільного рангу. Ковектори як лінійні оператори. Спряжений простір. Тензори довільного рангу як оператори між векторними просторами. Закон перетворення компонент тензорів довільного рангу</p> <p><i>Література для опрацювання:</i> [1, §2.2.7], [8, §20-22], [3, §3.9-11]</p>

№	Назва теми лекції та перелік основних питань
8.	Тема 2.5. Тензори в криволінійних координатах. Базис у криволінійних координатах. Скалярний добуток як скаляр. Обернена тензорна ознака. Узагальнена обернена тензорна ознака. Піднімання та опускання індексів. Диференціювання у криволінійних координатах. Зв'язність. Фізичні компоненти тензорів. Полівектори <i>Література для опрацювання:</i> [1, §3.4-5, 7.2—3, 8], [8, §27-33], [6, §1.11], [4, §1.8], [3, §4.1, 4—8]
9.	Залік.

Практичні заняття

Задачі до практичних занять зі збірника [2], який містить основні теоретичні відомості та додатки, необхідні для розв'язування задач, а також відповіді до більшості завдань.

В кожній темі наведено всі відповідні задачі з [2]. Викладач може обрати частину з них для вивчення, зважаючи на успішність засвоєння матеріалу та відповідність до календарного плану.

№	Назва теми заняття та перелік розглянутих питань
1.	Векторний простір: утворення векторних просторів з елементів довільної природи, знаходження розмірності та базису, дослідження лінійної залежності векторів <i>Задачник:</i> [2, §1] <i>Література для опрацювання:</i> [6, приклади №1.5], [10, §8.1, 8.2.1—2, 8.3]
2.	Евклідов простір: утворення евклідових просторів з елементів довільної природи та застосування поняття скалярного добутку для задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії, математичного аналізу та теорії функцій комплексної змінної <i>Задачник:</i> [2, §2] <i>Література для опрацювання:</i> [6, приклади №1.2-3, 49], [10, §8.8.1-6]
3.	Векторний та мішаний добуток векторів. Символ Леві-Чівіті: обрахунок векторного та мішаного добутків векторів та їх використання у задачах з лінійної алгебри та аналітичної геометрії, математичного аналізу, векторного та тензорного числення <i>Задачник:</i> [2, §3] <i>Література для опрацювання:</i> [6, приклади №1.18, 20, 39—41, 56—60], [5, §1.1, 1.2.2], [9, лекція 16], [3, §2.6]
4.	МКР1. Диференціювання векторів: обрахунок градієнту та ротору від векторних полів методом згорток та із застосуванням властивостей оператора ∇ <i>Задачник:</i> [2, №4.1-39] <i>Література для опрацювання:</i> [6, приклади №1.50, 53, 65], [3, §4.2-3]
5.	Диференціювання векторів: обрахунок дивергенції та лапласіану від векторних полів методом згорток та із застосуванням властивостей оператора ∇ <i>Задачник:</i> [2, №4.40-59] <i>Література для опрацювання:</i> [6, §1.21]
6.	Інтегрування векторів: обрахунок інтегралів від векторних полів із використанням узагальнених формул Гауса та Стокса <i>Задачник:</i> [2, §5] <i>Література для опрацювання:</i> [6, §1.22-23, 54—55, 66], [5, §9.2], [3, §4.10]
7.	Тензори 2-ого рангу: тензорне числення, побудова тензорів як діадиків та лінійних операторів, властивості тензорів <i>Задачник:</i> [2, №6.1-11] <i>Література для опрацювання:</i> [6, приклади №1.6-17, 19, 22—28, 36—38, 42, 64]

№	Назва теми заняття та перелік розглядуваних питань
8.	Тензори 2-ого рангу: операції над тензорами, знаходження власних значень та власних векторів тензорів <i>Задачник:</i> [2, №6.12-22] <i>Література для опрацювання:</i> [6, приклади №1.43, 45—48, 61]
9.	Тензорний аналіз у криволінійних координатах: знаходження базису, вивчення ефектів зв'язності, диференціальні та інтегральні операції над тензорами у криволінійних координатах. МКР2 <i>Задачник:</i> [2, §7] <i>Література для опрацювання:</i> [6, приклади №1.29-32, 52, 62, 67], [10, §8.4], [5, §9.3]

6. Самостійна робота студента

Самостійна робота студентів має на меті розвиток творчих здібностей та активізація їх розумової діяльності, формування потреби безперервного самостійного поповнення знань та розвиток морально-вольових зусиль. Завданням самостійної роботи студентів є навчити студентів самостійно працювати з літературою, творчо сприймати навчальний матеріал і осмислювати його та формування навичок до щоденної роботи з метою одержання та узагальнення знань, умінь і навичок.

На самостійну роботу відводяться наступні види завдань:

- обробка і осмислення інформації, отриманої безпосередньо на заняттях;
- робота з відповідними підручниками та особистим конспектом лекцій;
- виконання підготовчої роботи до практичних занять, до написання МКР (модульної контрольної роботи) та колоквиуму;
- підготовка до складання семестрового контролю.

Політика та контроль

7. Політика навчальної дисципліни (освітнього компонента)

Відвідування занять

Відвідування лекцій, а також відсутність на них, не оцінюється. Однак, студентам рекомендується відвідувати заняття, оскільки на них викладається теоретичний матеріал та розвиваються навички, необхідні для успішного складання заліку.

Пропущені контрольні заходи

Модульні контрольні роботи виконуються згідно графіку та не переписуються, виконання в інший час можливе лише з поважної причини

Календарний рубіжний контроль

Проміжна атестація студентів (далі — атестація) є календарним рубіжним контролем. Метою проведення атестації є підвищення якості навчання студентів та моніторинг виконання графіка освітнього процесу студентами¹.

¹Рейтингові системи оцінювання результатів навчання: Рекомендації до розроблення і застосування. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. 20 с.

Термін атестації	Перша атестація 8-й тиждень	Друга атестація 14-й тиждень
Критерій: поточний контроль	≥ 20 балів	≥ 40 балів

Академічна доброчесність

Політика та принципи академічної доброчесності визначені у розділі 3 Кодексу честі Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського». Детальніше: <https://kpi.ua/code>.

Норми етичної поведінки

Норми етичної поведінки студентів і працівників визначені у розділі 2 Кодексу честі Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського». Детальніше: <https://kpi.ua/code>.

Процедура оскарження результатів контрольних заходів

Студенти мають можливість підняти будь-яке питання, яке стосується процедури контрольних заходів та очікувати, що воно буде розглянуто згідно із наперед визначеними процедурами (згідно «Положення про систему забезпечення якості вищої освіти у Національному технічному університеті України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», «Положення про організацію навчального процесу»).

8. Види контролю та рейтингова система оцінювання результатів навчання (PCO)

Видами контролю успішності засвоєння матеріалу дисципліни є модульна контрольна робота (МКР), колоквіум, робота на практичних заняттях та семестровий контроль.

Модульна контрольна робота

Модульна контрольна робота поділяється на дві 45-хвилинні частини, що проводяться на практичних заняттях згідно графіку. Вони складаються з одного теоретичного питання на формулювання та 4 задач, подібних до тих, що розглядалися на практичних заняттях та під час виконання домашніх робіт.

Максимальна кількість балів за кожну контрольну роботу дорівнює 30 балів, за дві 60. Максимальна кількість балів за кожне завдання вказана в умові. Оцінка за завдання може варіюватись у залежності від кількості зроблених помилок у розв'язку та специфіки конкретного завдання. Списані відповіді, які студент не може пояснити, не зараховуються.

Колоквіум

Колоквіум відбувається у формі усної співбесіди з викладачем з теоретичних питань за матеріалами прочитаних на даний момент лекцій та складається з відповідей на 3 запитання. У разі необхідності уточнення оцінки викладач може задати додаткові запитання. Максимальна оцінка за колоквіум – 30 балів

Активність на практичних заняттях

Ваговий бал для роботи біля дошки – 2. Максимальна кількість – 10 балів. Робота оцінюється згідно критеріїв:

- Отримання повної правильної відповіді без підказок (+) – 2 бала
- Отримання повної правильної відповіді з підказками (+.) – 1.5 бали
- В цілому правильний хід розв'язку, що супроводжувався суттєвими помилками (\pm) – 1 бал
- В цілому неправильний хід розв'язку що містив правильні ідеї (\mp) – 0.5 бала
- Розв'язку нема, або він повністю неправильний (–) – 0 балів.

Конструктивна ідея або відповідь із місця оцінюється в 1 бал. З огляду на обмежену кількість виходів до дошки студенти зацікавлені у активній участі в роботі на практичних заняттях.

Бонусні бали

За особливу гарну роботу на практиці або на лекції студент може додатково до базових балів отримати 5 бонусних балів.

Семестровий контроль (залік)

Стартовий рейтинг R_c є сумою рейтингових балів отриманих у семестрі (включаючи до 5 бонусних балів). Сума максимально можливих базових балів дорівнює 100 балам:

№	Контрольний захід	Бал	Кількість	Всього
1	Модульні контрольні роботи	30	2	60
2	Колоквіум	30	1	30
3	Практичні заняття	10		10
	Всього			100

У разі $R_c \geq 60$ балів, студент може отримати відповідну оцінку без виконання залікової роботи, причому його рейтинг із кредитного модулю $RD = R_c$, або написати залікову роботу.

Якщо $R_{\text{доп}} = 40 \leq R_c < 60$, студент повинен написати допускову або залікову роботу.

Якщо $R_c < R_{\text{доп}}$, для отримання допуску до заліку студент повинен виконати допускову роботу.

Допускова робота складається з 8-ми елементарних завдань, що передбачають однозначну відповідь та оцінюються по одному балу кожне в разі отримання правильної відповіді. Якщо правильно виконано не менше ніж $n = 6$ завдань, R_c вважається рівним 60 балам.

Оцінка за залікову роботу є підсумковою. Вона складається з 5 завдань (2 теоретичних та 3 задачі). Максимальна кількість балів по кожному завданню $S_{\text{max}} = 8$ балів. Критерії оцінки S_i кожного завдання:

- $S_i = 8$ – Отримання повної правильної відповіді (+)
- $S_i = 6-7$ – Отримання повної правильної відповіді із незначними зауваженнями (+.)
- $S_i = 4-5$ – В цілому правильний хід розв'язку, що супроводжувався суттєвими помилками або не доведений до кінця розв'язок (\pm)
- $S_i = 2-3$ – В цілому неправильний хід розв'язку що містив правильні ідеї (\mp)

- $S_i = 1$ – Записані лише ключові означення (–)
- $S_i = 0$ – Відсутній розв’язок, або він повністю невірний (0).

Кількість балів за залікову роботу $S = \sum S_i$. У випадку позитивної оцінки ($S \geq 24$) підсумкова кількість рейтингових балів визначається згідно формули: $RD = S \cdot 2.5$, у випадку негативної оцінки ($S < 24$) $RD = R_c$.

Підсумковому значенню **RD** ставиться у відповідність оцінка:

Кількість балів	Оцінка
95 – 100	Відмінно
85 – 94	Дуже добре
75 – 84	Добре
65 – 74	Задовільно
60 – 64	Достатньо
40 – 59	Незадовільно
0 – 39	Не допущено

9. Питання до залікової роботи

Нижче наведений орієнтовний перелік теоретичних питань до залікової роботи. Цей перелік може корегуватись якщо якісь теми були зменшені або збільшені в обсязі.

1. Поняття векторного простору та лінійної залежності або незалежності його елементів
2. Базис векторного простору та його перетворення
3. Поняття афінного простору та його базис
4. Поняття евклідового простору та фундаментальної матриці
5. Спряжений базис та його перетворення. Формули Гіббса
6. Геометричний зміст скалярного добутку, контра- та коваріантних координат
7. Довжини та кути в евклідовому просторі
8. Ортобазис та перетворення що його зберігають
9. Полярні та аксіальні вектори. Векторний добуток та його властивості
10. Мішаний добуток та його властивості
11. Лінійні оператори над векторами. Поняття діадного множення векторів та тензори 2-ого рангу
12. Тричленне представлення тензора. Розвинення тензора за базисом та перетворення його компонент
13. Множення тензорів та квадратичні форми
14. Транспонований тензор. Симетрування та альтернування довільного тензору
15. Слід тензору. Подвійний скалярний та повний скалярний добутки тензорів
16. Інваріанти тензору. Знаходження I_1 та I_2
17. Тотожність Гамільтона-Келі
18. Характеристичне рівняння тензора та теорема Гамільтона-Келі
19. Властивості власних значень тензора
20. Спектральний розвинення тензора
21. Ковектори та лінійні функціонали. Закон перетворення тензору довільного рангу

22. Базис у криволінійному просторі. Обернена тензорна ознака. Інваріантність тензорних рівнянь
23. Піднімання та опускання індексів. Зв'язність

Робочу програму навчальної дисципліни (силабус):

Складено: _____ старший викладач Наказной Павло Олександрович
(посада, науковий ступінь, вчене звання, ПІБ)

Ухвалено: кафедрою _____ інформаційної безпеки
(повна назва кафедри)

(протокол № 16/2020 від 27 серпня 2020 р.)

Затверджено: Вченою радою _____ Фізико-технічного інституту
(назва факультету/інституту)

(протокол № 7/1 від 7 вересня 2020 р.)